

УДК 681.2.08

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЫШЕННОЙ  
ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ  
ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ РАЗРЕШЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ,  
ПОЛУЧЕННЫХ С МАТРИЧНЫХ ФОТОПРИЕМНИКОВ\***

**В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов**

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Рассматривается возможность повышения разрешения матричных фотоприемников путем удвоения частоты пространственной дискретизации и последующей обработки полученных отсчетов.

*Ключевые слова:* матричный фотоприемник, внутрипиксельная дискретизация, дисперсия ошибки, отсчетная функция, цифровой компенсирующий фильтр.

**Введение.** В предлагаемой работе рассматривается решение задачи, изложенной в [1] и связанной с повышением пространственного разрешения изображений, регистрируемых с помощью двухкоординатного регулярного перемещения фотоприемника низкого разрешения вдоль исходного изображения. В основе анализа лежит представление первичной информации, снимаемой с матричного фотоприемника, в виде двумерного ряда Фурье с последующим переходом к массиву с меньшим размером пикселя путем частичной компенсации линейных искажений, вносимых в изображение реальным элементом фотоматрицы.

Реальный элемент фотоматрицы площадью  $2\Delta \times 2\Delta$  имеет зону постоянной чувствительности  $(1 + 2\alpha)\Delta \times (1 + 2\alpha)\Delta$  в центре. Информация снимается с каждого элемента матрицы в ее четырех положениях, отстоящих друг от друга на расстоянии интервала дискретизации  $\Delta$  по осям  $x$  и  $y$  и обеспечивающих удвоение частоты дискретизации по каждой из осей.

Если в качестве модели изображения (сигнала) выбрать случайное стационарное поле, то средний квадрат ошибки между истинным значением сигнала и значением, полученным с фотоматрицы, имеющей размер пикселя  $2\Delta \times 2\Delta$ , представляется в виде

$$\varepsilon_{2\Delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\lambda S_f(\omega, \lambda) \left( 1 - \left( \frac{\sin \omega \Delta}{\omega \Delta} \right)^2 \left( \frac{\sin \lambda \Delta}{\lambda \Delta} \right)^2 \right),$$

где  $S_f(\omega, \lambda)$  — спектральная плотность изображения. При увеличении частоты пространственной дискретизации сигнала по осям  $x$  и  $y$  и последующей обработке результатов измерений предполагается уменьшить средний квадрат ошибки до величины

$$\varepsilon_{\Delta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\lambda S_f(\omega, \lambda) \left( 1 - \left( \frac{\sin 0,5\omega \Delta}{0,5\omega \Delta} \right)^2 \left( \frac{\sin 0,5\lambda \Delta}{0,5\lambda \Delta} \right)^2 \right).$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Президиума РАН (программа № 2.1/2009 г.) и Президиума СО РАН (интеграционный проект № 71/2009 г.).

Эффективность компенсации линейных искажений путем внутрипиксельной дискретизации можно охарактеризовать отношением дисперсий  $\delta = \varepsilon_{2\Delta}^2 / \varepsilon_{\Delta}^2$ .

Отметим, что

$$\varepsilon_{2\Delta}^2 \approx \frac{\Delta^2}{3} (\langle \omega^2 \rangle + \langle \lambda^2 \rangle), \quad \varepsilon_{\Delta}^2 \approx \frac{\Delta^2}{12} (\langle \omega^2 \rangle + \langle \lambda^2 \rangle),$$

где

$$\langle \omega^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_f(\omega, \lambda) \omega^2, \quad \langle \lambda^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda S_f(\omega, \lambda) \lambda^2,$$

поэтому максимальное повышение точности  $\delta \approx 4$ .

Дисперсия ошибки представления сигнала  $\varepsilon_f^2$  после обработки четырех изображений не совпадает с дисперсией  $\varepsilon_{\Delta}^2$  и имеет вид  $\varepsilon_f^2 = \varepsilon_{\Delta}^2 + \varepsilon^2$ ; значение дополнительной величины  $\varepsilon^2$  определяется далее.

**Отсчетные функции компенсирующего фильтра. Дисперсия ошибки реконструкции.** Приведенные расчеты базируются на результатах работы [2]. Компенсируемый префильтр (пространственные частоты  $|\omega|, |\lambda| \leq \pi/\Delta$ ) имеет очевидное описание:

$$\tilde{h}_M(\omega, \lambda) = \frac{\sin 0,5(1+2\alpha)\omega\Delta}{0,5(1+2\alpha)\omega\Delta} \frac{\sin 0,5(1+2\alpha)\lambda\Delta}{0,5(1+2\alpha)\lambda\Delta}, \quad (1)$$

$$\tilde{h}_{\Delta}(\omega, \lambda) = \frac{\sin 0,5\omega\Delta}{0,5\omega\Delta} \frac{\sin 0,5\lambda\Delta}{0,5\lambda\Delta}. \quad (2)$$

В отличие от [2] недокомпенсация определяется размером интервала дискретизации. Поэтому на отсчетах массива  $(r\Delta, p\Delta)$  ( $-N \leq r \leq N, -N \leq p \leq N$ ) дисперсия ошибки (изображение — случайное поле)

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{rp}^2 \rangle &= \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} d\omega d\lambda S_f(\omega, \lambda) \times \\ &\times \left| e^{-i\Delta(r\omega+p\lambda)} \tilde{h}_{\Delta}(\omega, \lambda) - \tilde{h}_M(\omega, \lambda) \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N e^{-i\Delta(n\omega+m\lambda)} w(r\Delta, n\Delta, p\Delta, m\Delta) \right|^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $w(r\Delta, n\Delta, p\Delta, m\Delta)$  — отсчетная функция цифрового фильтра;  $S_f(\omega, \lambda)$  — спектральная плотность изображения; дисперсия изображения равна нулю на частотах  $|\omega|, |\lambda| > \pi/\Delta$  ( $\sigma_f^2 = S_f(0, 0)$ ).

После вынесения функции  $\tilde{h}_{\Delta}(\omega, \lambda)$  из-под знака модуля в (3) получим соотношение, аналогичное формуле (4) из [2]:

$$\varepsilon_{rp}^2(\omega, \lambda) = \left| e^{-i\Delta(r\omega+p\lambda)} - \tilde{h}(\omega, \lambda) \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N e^{-i\Delta(n\omega+m\lambda)} w(r\Delta, n\Delta, p\Delta, m\Delta) \right|^2, \quad (4)$$

где подлежащий компенсации префильтр

$$\tilde{h}(\omega, \lambda) = \frac{\tilde{h}_{2\Delta}(\omega, \lambda)}{\tilde{h}_{\Delta}(\omega, \lambda)} = \tilde{h}(\omega) \tilde{h}(\lambda). \quad (5)$$

Отличие его от [2] заключается только в двумерности соотношения (4).

Отсчетная функция цифрового фильтра, полученная исходя из двумерного преобразования Фурье, факторизуется:

$$w(r\Delta, n\Delta, p\Delta, m\Delta) = w(r\Delta, n\Delta)w(p\Delta, m\Delta), \quad (6)$$

где в соответствии с соотношением (7) из [2] (характеристика  $\tilde{h}(\omega)$  фильтра — функция четная) для ортогонального базиса  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}(2k-1)t\right)\right)$

$$w(r\Delta, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \left( \sum_{k=-N}^N \frac{\cos \omega_{2k} n \Delta}{\tilde{h}(\omega_{2k})} \cos \omega_{2k} r \Delta + \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\sin \omega_{2k-1} n \Delta}{\tilde{h}(\omega_{2k-1})} \sin \omega_{2k-1} r \Delta \right), \quad (7a)$$

$$w(p\Delta, m\Delta) = \frac{1}{2N+1} \left( \sum_{k=-N}^N \frac{\cos \lambda_{2k} m \Delta}{\tilde{h}(\lambda_{2k})} \cos \lambda_{2k} p \Delta + \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\sin \lambda_{2k-1} m \Delta}{\tilde{h}(\lambda_{2k-1})} \sin \lambda_{2k-1} p \Delta \right). \quad (7b)$$

Для гармонического ряда с ортогональным базисом  $\left(\cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2kt\right), \sin\left(\frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2kt\right)\right)$

$$w(r\Delta, n\Delta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \frac{\cos \omega_{2k}(n-r)\Delta}{\tilde{h}(\omega_{2k})}, \quad (8a)$$

$$w(p\Delta, m\Delta) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \frac{\cos \lambda_{2k}(p-m)\Delta}{\tilde{h}(\lambda_{2k})}. \quad (8b)$$

Здесь

$$\omega_{2k}, \lambda_{2k} = \frac{\pi}{(2N+1)\Delta}2k; \quad \omega_{2k-1}, \lambda_{2k-1} = \frac{\pi}{(2N+1)\Delta}(2k-1). \quad (9)$$

Подстановка (7) в (4) после очевидных преобразований дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\omega, \lambda) &= (\cos(\omega r + \lambda p)\Delta - \cos^* \omega r \Delta \cdot \cos^* \lambda p \Delta + \sin^* \omega r \Delta \cdot \sin^* \lambda p \Delta)^2 + \\ &+ (\sin(\omega r + \lambda p)\Delta - \sin^* \omega r \Delta \cdot \cos^* \lambda p \Delta - \cos^* \omega r \Delta \cdot \sin^* \lambda p \Delta)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где введены обозначения

$$\cos^* \omega r \Delta = \tilde{h}(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{\cos \omega_{2k} r \Delta}{2\tilde{h}(\omega_{2k})} (\varphi_{\Sigma}(\omega \Delta - \omega_{2k} \Delta) + \varphi_{\Sigma}(\omega \Delta + \omega_{2k} \Delta)), \quad (11a)$$

$$\sin^* \omega r \Delta = \tilde{h}(\omega) \sum_{k=-(N-1)}^N \frac{\sin \omega_{2k-1} r \Delta}{2\tilde{h}(\omega_{2k-1})} (\varphi_{\Sigma}(\omega \Delta - \omega_{2k-1} \Delta) - \varphi_{\Sigma}(\omega \Delta + \omega_{2k-1} \Delta)). \quad (11b)$$

В данных соотношениях

$$\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta \mp \omega_{2k}\Delta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2}\Delta(\omega \mp \omega_{2k})}{(2N+1)\sin \frac{\Delta}{2}(\omega \mp \omega_{2k})}, \quad \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta \mp \omega_{2k-1}\Delta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2}\Delta(\omega \mp \omega_{2k-1})}{(2N+1)\sin \frac{\Delta}{2}(\omega \mp \omega_{2k-1})}.$$

Для параметра  $\lambda$  значения параметров  $\omega_{2k}$ ,  $\omega_{2k-1}$  и индекс  $r$  заменяются величинами  $\lambda_{2k}$ ,  $\lambda_{2k-1}$  и  $p$ . Если используются соотношения (8а) и (8б), то формула для  $\cos^* \omega r \Delta$  совпадает с формулой (11а). Тогда величина

$$\sin^* \omega r \Delta = \tilde{h}(\omega) \sum_{k=-N}^N \frac{\sin \omega_{2k} r \Delta}{2\tilde{h}(\omega_{2k})} (\varphi_{\Sigma}(\omega\Delta - \omega_{2k}\Delta) - \varphi_{\Sigma}(\omega\Delta + \omega_{2k}\Delta)). \quad (11b)$$

В этом случае для параметра  $\lambda$  значения параметра  $\omega_{2k}$  и индекс  $r$  заменяются величинами  $\lambda_{2k}$  и  $p$ .

**Моделирование алгоритмов обработки.** Были проведены расчеты дисперсии ошибки

$$\varepsilon^2 = \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} d\omega d\lambda S_f(\omega, \lambda) \left( \frac{\sin 0,5\omega\Delta}{0,5\omega\Delta} \right)^2 \left( \frac{\sin 0,5\lambda\Delta}{0,5\lambda\Delta} \right)^2 \varepsilon^2(\omega, \lambda)$$

с использованием формулы (10) при  $\alpha = 0,4$ ,  $2N + 1 = 255$  и различных спектральных плотностях сигнала.

В качестве нормированной спектральной плотности использовалось соотношение

$$S_f(\omega, \lambda) = \frac{(\gamma\Delta)^2}{4(1 - e^{-\gamma\pi})^2} e^{-\gamma\Delta(|\omega| + |\lambda|)}$$

при различных значениях параметра  $\gamma$ . Дисперсия  $\sigma_f^2 = 1$ . Результаты этих вычислений приведены на рис. 1. Из рисунка следует, что если исключить края изображения, то выполняется неравенство  $\varepsilon^2 \ll \varepsilon_{\Delta}^2$ . На рис. 2 приведена зависимость, характеризующая эффективность предлагаемой методики повышения качества изображения.

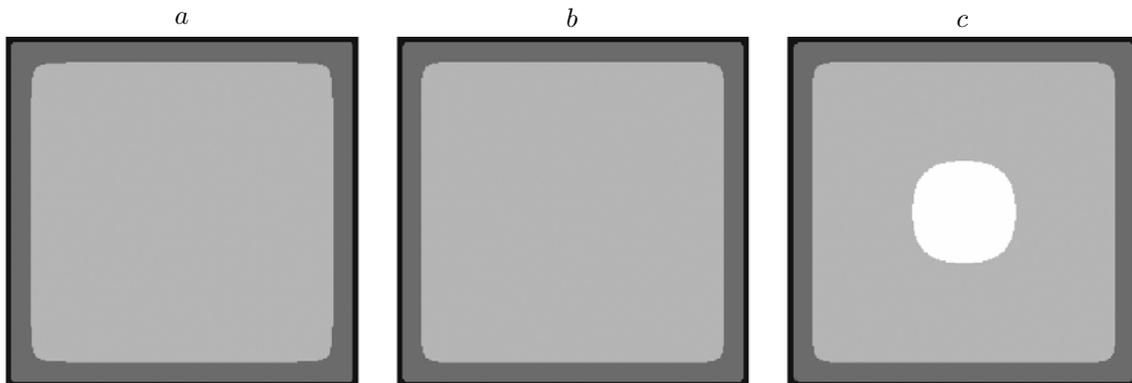


Рис. 1. Результаты обработки случайного сигнала с различными параметрами  $\gamma$ :  $\gamma = 0$  (а),  $\gamma = 1$  (б),  $\gamma = 2$  (с) (градации яркости соответствуют следующим диапазонам изменения дисперсии ошибки: черный —  $\varepsilon^2 \geq 10^{-3}$ ; темно-серый —  $10^{-3} > \varepsilon^2 \geq 10^{-5}$ ; светло-серый —  $10^{-5} > \varepsilon^2 \geq 10^{-8}$ ; белый —  $10^{-8} > \varepsilon^2 \geq 0$ )

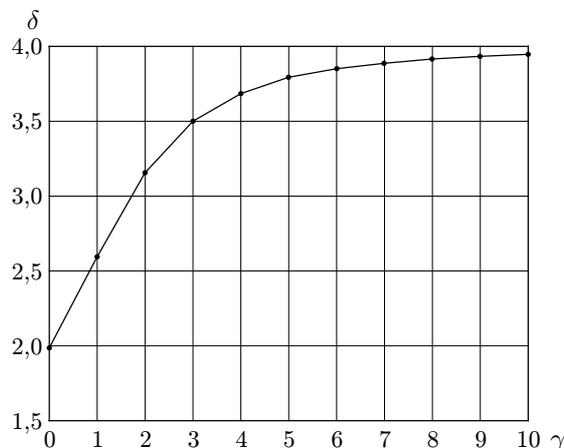


Рис. 2. Зависимость отношения дисперсий ошибок  $\delta$  от параметра  $\gamma$

**Заключение.** По результатам выполненных в данной работе аналитических исследований и компьютерного моделирования можно сделать вывод о том, что операция субдискретизации позволяет повысить разрешение фотоматриц, если геометрия последних близка к идеальной. При этом следует иметь в виду, что в исследовании предполагалось отсутствие шума. В реальности же при проведении практических расчетов для дополнительной ошибки  $\varepsilon_{\varphi}^2$ , вносимой аддитивным шумом, можно воспользоваться оценкой

$$\varepsilon_{\varphi}^2 < \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} \int_{-(\pi/\Delta)}^{\pi/\Delta} d\omega d\lambda \frac{S_f(\omega, \lambda)}{\tilde{h}_{2\Delta}^2(\omega, \lambda)},$$

если спектральную плотность шума в первом приближении считать равной

$$S_{\varphi}(\omega, \lambda) \approx \sigma_{\varphi}^2 \frac{\Delta^2}{4\pi^2} 1 \left[ \left( \frac{\pi}{\Delta} - |\omega| \right) \left( \frac{\pi}{\Delta} - |\lambda| \right) \right].$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Резник А. Л., Ефимов В. М. Повышение пространственного разрешения цифровых изображений и сигналов с помощью регулируемого субпиксельного сканирования // Микросистемная техника. 2003. № 8. С. 20–25.
2. Ефимов В. М., Резник А. Л., Торгов А. В. Компенсация линейных искажений сигнала с использованием его гармонического разложения // Автометрия. 2008. 44, № 4. С. 3–12.

Поступила в редакцию 30 июля 2009 г.