

УДК 62-40

## АЛГОРИТМИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ МЕТОД ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ\*

Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

*Самарский государственный технический университет,  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: rapoport@samgtu.ru*

Предлагается базирующийся на специальной процедуре последовательной параметризации управляющих воздействий точный метод решения краевых задач оптимального управления системами с распределенными параметрами в условиях заданных в равномерной метрике допусков на отклонения от требуемого конечного состояния управляемого объекта. Метод используется для решения задачи оптимального по быстродействию управления инновационной технологией индукционного нагрева массивных тел, вращающихся в магнитном поле постоянного тока.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, принцип максимума, параметризация управляющих воздействий, сопряженные переменные, целевое множество, полубесконечная оптимизация, альтернативный метод, индукционный нагрев.

**Введение.** Известные трудности решения краевых задач оптимального управления (ЗОУ) динамическими объектами в классической двухточечной формулировке [1] приобретают принципиальный характер применительно к бесконечномерным системам с распределенными параметрами (СРП) [2–4], а приближенные решения ЗОУ СРП, получаемые широко распространенными методами исходной дискретизации моделей СРП, могут привести к существенным отклонениям от характеристик оптимального процесса либо вообще оказываются неприемлемыми при высоких требованиях к точности моделирования СРП, неуправляемых относительно заданного конечного состояния [4].

Возможный способ преодоления указанных затруднений состоит в переходе к заведомо разрешимой ЗОУ с заданным целевым множеством в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, которое отвечает достижимым значениям практически всегда существующих и обычно оцениваемых в равномерной метрике допусков на отклонение от номинальной точки, фиксируемой положением правого конца фазовой траектории в исходной двухточечной схеме [4].

В работах [4–6] предлагается и апробируется на конкретных примерах способ решения ЗОУ СРП в подобной постановке, основанный на специальной процедуре последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий, существенном использовании дополнительной информации о базовых закономерностях предметной области и точной редукции исходной задачи к задачам полубесконечной оптимизации (ЗПО), разрешаемым альтернативным методом.

В данной работе приводятся формальная постановка ЗОУ СРП в указанной трактовке, общая схема предлагаемого способа ее решения и иллюстрируются возможности распространения альтернативного метода на новый круг важных прикладных задач.

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-08-00297) и целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» (проект № 2.1.2/4236).

**Постановка задачи.** Пусть управляемая функция состояния  $Q(x, t)$  объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты  $x \in [x_0, x_1]$  и времени  $t \in [0, t_1]$  бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  разложения  $Q(x, t)$  в бесконечный ряд по собственным функциям  $\varphi_n(\mu_n, x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{u}_n(\mu_n, t) + d_{0n}u_0(t) + d_{1n}u_1(t);$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}_0^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x) \quad (2)$$

применительно к типовой модели СРП в форме линейного стационарного уравнения в частных производных параболического типа с краевыми условиями Дирихле, Неймана или их линейной комбинацией [4, 7]. Здесь  $\bar{u}_n(\mu_n, t)$  — моды разложения внутреннего распределенного управляющего воздействия  $u(x, t)$  в ряд вида (2):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x); \quad (3)$$

$u_0(t)$  и  $u_1(t)$  — граничные управления, сосредоточенные в точках  $x = x_0$  и  $x = x_1$  соответственно;  $\mu_n^2$  — собственные числа;  $d_{0n}$ ,  $d_{1n}$  — известные коэффициенты;  $\bar{Q}_0^{(0)}(\mu_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — заданное начальное состояние объекта.

Управляющие воздействия стесняются ограничениями:

$$\begin{aligned} u_{\min} \leq u(x, t) \leq u_{\max}; \quad u_{1\min} \leq u_1(t) \leq u_{1\max}; \\ u_{0\min} \leq u_0(t) \leq u_{0\max}; \quad x \in [x_0, x_1]; \quad t \in [0, t_1]. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть качество процесса управления оценивается интегральным функционалом

$$I = \int_0^{t_1} f_0(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{W}, t) dt \rightarrow \min_{\mathbf{W}} \quad (5)$$

с заданной подынтегральной функцией  $f_0$  своих аргументов

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\bar{Q}_n(\mu_n, t)), \quad \mathbf{W}(t) = (\bar{u}_n(\mu_n, t), u_0(t), u_1(t)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и за время  $t_1$  требуется обеспечить приближение  $Q(x, t_1)$  к заданному пространственному распределению управляемой величины  $Q^{**}(x)$  с допустимой абсолютной точностью  $\varepsilon$  согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t_1) \varphi_n(\mu_n, x) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

определяющему с учетом (2) целевое множество допустимых конечных состояний СРП с оценкой отклонений от  $Q^{**}(x)$  в равномерной метрике.

Необходимо найти оптимальное управление  $\mathbf{W}^*(t)$ , которое переводит бесконечномерный объект управления (1) из заданного начального состояния в требуемое конечное согласно (6) при минимальном значении критерия оптимальности (5) в условиях ограничений (4).

**Параметризация управляющих воздействий и редукция к задаче полубесконечной оптимизации.** Применение к задаче (1)–(6) стандартной процедуры принципа максимума Понтрягина приводит к сложной системе соотношений практически неразрешимой краевой задачи оптимального управления (П-системе), формально определяющей параметрическое представление  $\mathbf{W}^*(t)$  с точностью до граничных значений бесконечного числа сопряженных переменных [1, 4].

В условиях (6) предлагается способ последовательной конечномерной параметризации  $\mathbf{W}^*(t)$  на множестве финишных значений  $\tilde{\psi}_i, i = \overline{1, N}$ , первых  $N$  сопряженных функций, соответствующих первым  $N$  модам  $\bar{Q}_n, n = \overline{1, N}$ , в (1), при равных нулю всех остальных значениях  $\psi_i(t_1), i > N$ :

$$\psi^{(N)} = (\psi_i(t_1)) = (\tilde{\psi}_i), i = \overline{1, N}; \quad \psi_i(t_1) = 0, i > N \quad (7)$$

(« $\psi^{(N)}$ -параметризация» в [6]).

Равенства (7) представляют собой условия трансверсальности на правом конце траектории в бесконечномерном фазовом пространстве СРП с некоторыми фиксированными конечными значениями  $\bar{Q}_{nk}$  первых  $N$  мод  $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$  при  $t = t_1$  и свободными величинами  $\bar{Q}_n(\mu_n, t_1)$  для всех  $n > N$ .

В условиях (7) минимально достижимые в классе управлений, однозначно характеризующиеся вектором  $\psi^{(N)}$ , значения  $\varepsilon_{\min}^{(N)}$  ошибки  $\varepsilon$  равномерного приближения  $Q(x, t_1)$  к  $Q^{**}(x)$ , т. е. минимаксные погрешности приближения на отрезке  $[x_0, x_1] \ni x$ , монотонно убывают с ростом  $N \in \{\overline{1, \rho}\}$ :

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0, \quad (8)$$

характеризуя сужающееся к  $Q^{**}(x)$  семейство целевых множеств для  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}, j = \overline{1, \rho}$ , в (6) вплоть до значения  $\varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0$ , где точная нижняя грань  $\varepsilon_{\inf}$  оказывается большей или равной нулю соответственно для неуправляемых или управляемых относительно  $Q^{**}(x)$  объектов.

Неравенства (8) создают потенциальные возможности обеспечения требуемой точности  $\varepsilon > 0$  достижения  $Q^{**}(x)$  при конечном числе  $N$ , принципиально упрощая тем самым краевую задачу оптимального управления СРП.

В работе [6] установлен принцип минимальной сложности  $\psi^{(N)}$ -параметризованной структуры оптимальных программных управлений  $\mathbf{W}^*(\psi^{(N)}, t)$ , согласно которому за счет свободы выбора конечных значений  $\bar{Q}_n(\mu_n, t_1), n > N$ , оптимальные управляющие воздействия в рассматриваемой ЗОУ характеризуются минимально возможной для данного значения  $\varepsilon$  в (6) размерностью  $N = N_0$  вектора  $\psi^{(N_0)}$  по определению величин минимакса в последовательности неравенств (8):

$$N_0 = v \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(v)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(v-1)}, \quad v \in \{1, \rho\}. \quad (9)$$

В характерных частных случаях, когда из условий (7) следуют тождества  $\psi_i(t) \equiv 0$  для всех  $i > N$ , а в качестве аргументов  $f_0$  в (5) фигурируют не более  $N$  первых составляющих  $\bar{Q}_n$ , исходная ЗОУ СРП сводится к управлению усеченной конечномерной подсистемой первых  $N$  уравнений модели объекта (1) [6], что кардинальным образом упрощает задачу определения структуры параметризованных программных управлений  $\mathbf{W}^*(\psi^{(N_0)}, t)$ .

Дальнейший прямой путь непосредственного вычисления вектора  $\psi^{(N_0)}$  связан с необходимостью решения, как правило, существенно нелинейной и весьма сложной даже при конечном числе  $N_0$  компонент  $\psi^{(N_0)}$  П-системы принципа максимума. Возникающие здесь

серьезные затруднения могут быть во многих случаях преодолены путем построения отображений  $\psi^{(N)} \rightarrow \Delta^{(N)}$  на множество параметров  $\Delta^{(N)} = (\Delta_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , непосредственно характеризующих управляющие воздействия оптимальной структуры в пространственно-временной области их определения.

В свою очередь, аналитические условия оптимальности в совокупности с дополнительной информацией о свойствах оптимизируемых процессов в конкретной предметной области в целом ряде модельных ситуаций вполне определяют характер управляющих воздействий на участках их непрерывного изменения в пространственно-временной области и позволяют выявить в зависимости от заданной величины  $\varepsilon$  в (6) возможные варианты компоновки оптимальных программ из этих участков с конечным числом разрывов в точках их «сшивания». Эти точки и выступают чаще всего в роли параметров  $\Delta_i$ , приобретающих тем самым очевидный физический смысл. Последующее сопоставление  $\psi^{(N)}$ - и  $\Delta^{(N)}$ -параметризованных структур создает возможности построения однозначных отображений  $\psi^{(N)} \rightarrow \Delta^{(N)}$  в форме замкнутой системы соотношений, связывающих компоненты  $\psi^{(N)}$  и  $\Delta^{(N)}$  [6]. Переход к  $\Delta^{(N)}$ -параметризации управляющих воздействий сохраняет базовые соотношения (8) и (9) [6].

Во многих случаях условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина позволяют непосредственно получить  $\Delta^{(N)}$ -параметризованное представление оптимального управления  $\mathbf{W}^*(\Delta^{(N_0)}, t)$ , минуя предварительный этап  $\psi^{(N)}$ -параметризации [5, 8]. В целом ряде прикладных задач изначально требуется найти управляющие воздействия в заданном классе  $\Delta^{(N)}$ -параметризуемых функций согласно исходным требованиям, диктуемым техническими возможностями их реализации [8].

Интегрирование уравнений объекта (1) с  $\Delta^{(N)}$ -параметризованными управлениями  $\mathbf{W}(\Delta^{(N)}, t)$  дает возможность получить согласно (2) конечное состояние объекта  $Q(x, t_1)$  и значение критерия оптимальности (5) в виде явных зависимостей  $Q(x, \Delta^{(N)})$  и  $I(\Delta^{(N)})$  соответственно от компонент  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , вектора  $\Delta^{(N)}$ . В результате осуществляется точная редукция исходной ЗОУ СРП к задаче минимизации функции  $I(\Delta^{(N)})$  конечного числа  $N$  переменных  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,

$$I(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)}} \quad (10)$$

с бесконечным числом ограничений, диктуемых требованием (6) для всех  $x \in [x_0, x_1]$  и заменяемых одним условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| Q(x, \Delta^{(N)}) - Q^{**}(x) \right| \leq \varepsilon \quad (11)$$

(задача полубесконечной оптимизации) [4–6].

Решение широкого круга ЗПО вида (10), (11) с учетом правила (9) относительно вектора  $\Delta^{(N)}$ , а также априори неизвестных величин минимакса в (8) при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$ ,  $j \in \{\overline{1, \rho}\}$ , может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернативным методом [5].

Метод базируется на специальных альтернативных свойствах вектора  $\Delta^{(N_0)}$ , являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации об оптимальной форме пространственного распределения результирующего состояния  $Q(x, \Delta^{(N_0)})$  управляемой СРП, диктуемой закономерностями предметной области в каждой конкретной рассматриваемой задаче. Согласно альтернатив-

ным свойствам одинаковые значения максимальных отклонений

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| Q(x, \Delta^{(N_0)}) - Q^{**}(x) \right|,$$

равные допустимой величине  $\varepsilon$ , достигаются в некоторых точках на отрезке  $[x_0, x_1]$ , общее число которых оказывается равным числу искомым неизвестных в ЗПО (10), (11).

Последующая редукция данных равенств на основании дополнительных сведений о форме кривых  $Q(x, \Delta^{(N_0)}) - Q^{**}(x)$  на  $[x_0, x_1]$  к соответствующей системе уравнений относительно этих неизвестных и дальнейшее ее решение стандартными численными методами исчерпывает решение исходной ЗОУ СРП. Описанная схема решения ЗОУ СРП в рассматриваемой постановке распространяется на задачи со значительно более сложными, в том числе цифровыми, моделями СРП с управляемыми функциями состояния, описывающими пространственно-временные характеристики взаимосвязанных процессов в физических полях различной природы [5, 8].

В работах [4–6, 8–10] предлагаемый метод используется для решения широкого круга ЗОУ СРП вида (1)–(6) применительно к управлению нестационарными термодиффузионными процессами, вариационным постановкам задач параметрической идентификации математических моделей СРП, синтезу оптимальных по быстродействию систем управления объектами с распределенными параметрами с неполным измерением состояния и др. Далее рассматривается его распространение на другие приложения в области технологической теплофизики.

**Оптимизация инновационной технологии индукционного нагрева.** Рассмотрим задачу оптимизации по критерию быстродействия принципиально новой энергосберегающей технологии нагрева алюминиевых слитков цилиндрической формы перед прессованием, которая реализуется путем их вращения в мощном магнитном поле постоянного тока, создаваемом в сверхпроводящих обмотках возбuditелей [11].

Численная модель процесса нагрева, описываемого сложной системой взаимосвязанных уравнений Максвелла и Фурье для электромагнитного и температурного полей, разработана на основе метода конечных элементов в среде программного комплекса ANSYS [11]. Полученные результаты свидетельствуют, в частности, о возможности пренебречь в первом приближении неравномерностью температурного распределения по длине слитка.

В качестве управляющего воздействия примем скорость вращения  $v(t)$ , стесненную ограничениями

$$0 \leq v(t) \leq v_{\max} \tag{12}$$

на ее предельно допустимую величину  $v_{\max}$ .

Перед последующей обработкой давлением необходимо обеспечить равномерный нагрев слитка до требуемой температуры  $\theta^{**} = \text{const}$  с заданной абсолютной точностью  $\varepsilon$  согласно оценке целевого множества вида (6):

$$\max_{x \in [0, R]} \left| \theta(x, t_1) - \theta^{**} \right| \leq \varepsilon, \tag{13}$$

где  $R$  — радиус цилиндра;  $\theta(x, t_1)$  — результирующее распределение температуры по радиальной координате  $x$ .

Необходимо найти оптимальное управление  $v^*(t)$ , обеспечивающее при заданном начальном температурном состоянии  $\theta(x, 0) = \theta_0 = \text{const} < \theta^{**}$  выполнение требования (13) за минимально возможное время  $t_1$  в условиях ограничения (12).

Исследования на численных моделях [11] показывают, что основные закономерности и качественные характеристики пространственно-временного распределения температуры

$\theta(x, t)$  при управлении по скорости вращения слитка в магнитном поле постоянного тока не изменяются по сравнению с управляющими воздействиями по мощности внутреннего тепловыделения в типовых технологиях периодического индукционного нагрева (ПИН) в переменном электромагнитном поле [8, 9].

На этом основании, подобно известным результатам решения задачи быстрогодействия при управлении ПИН по мощности нагрева [8, 9], процедура принципа максимума непосредственно определяет, минуя этап  $\psi^{(N)}$ -параметризации,  $\Delta^{(N)}$ -параметризованное представление оптимальной программы  $v^*(t)$  в форме кусочно-постоянной (релейной) функции времени, попеременно принимающей только свои предельно допустимые значения в (12) и заданной с точностью до длительностей  $\Delta_i, i = \overline{1, N}$ , интервалов своего постоянства, выступающих в роли искоемых параметров, общее число которых  $N = N_0$  задается в зависимости от величины  $\varepsilon$  в (13) по правилу (9):

$$v^*(t) = \frac{v_{\max}}{2} [1 + (-1)^{j+1}],$$

$$\sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i < t < \sum_{i=1}^j \Delta_i \quad (j = \overline{1, N_0}, \Delta_0 = 0). \quad (14)$$

В итоге по общей схеме (10), (11) осуществляется процедура точной редукции исходной задачи к задаче полубесконечной оптимизации

$$I(\Delta^{(N_0)}) = \sum_{i=1}^{N_0} \Delta_i \rightarrow \min_{\Delta^{(N_0)}};$$

$$\max_{x \in [0, R]} |\theta(x, \Delta^{(N_0)}) - \theta^{**}| \leq \varepsilon, \quad (15)$$

где явная форма  $\theta(x, \Delta^{(N_0)})$  зависимости  $\theta(x, t_1)$  от вектора параметров  $\Delta^{(N_0)}$  находится по численной модели объекта.

Аналогии с качественными закономерностями конечных температурных состояний оптимальных по быстроддействию ПИН с управлением по мощности нагрева приводят к сохранению в рассматриваемой задаче соответствующих этим процессам оптимальной формы кривой радиального распределения результирующей температуры и его альтернативных свойств, установленных в [4, 8, 9].

Ограничимся далее характерным случаем  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в (13), для которого на основании (9) будем иметь  $N_0 = 2$  в (14), (15) и в соответствии с (14) (рис. 1)

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & 0 < t < \Delta_1, \\ 0, & \Delta_1 < t < \Delta_1 + \Delta_2. \end{cases} \quad (16)$$

Согласно альтернативным свойствам  $\theta(x, \Delta^{(2)})$  при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$  в конце оптимального процесса достигаются предельно допустимые отклонения результирующего температурного распределения от заданной величины  $\theta^{**}$ , равные  $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ , в трех точках по радиусу цилиндра: на его оси  $x = 0$ , боковой поверхности  $x = R$  с минимальной температурой  $\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(2)}$ , а также во внутренней точке  $x_3 \in (0, R)$  температурного максимума  $\theta^{**} + \varepsilon_{\min}^{(2)}$  (рис. 2).

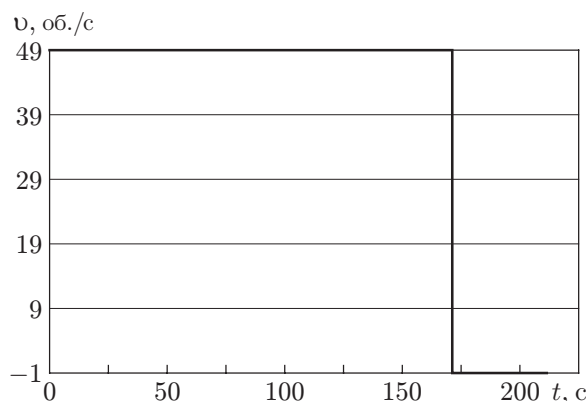


Рис. 1. Двухинтервальный оптимальный алгоритм управления скоростью вращения заготовки при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

Указанные свойства приводят к системе четырех уравнений

$$\begin{cases} \theta(0, \Delta^{(2)}) - \theta^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \theta(x_э, \Delta^{(2)}) - \theta^{**} = \varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \theta(R, \Delta^{(2)}) - \theta^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial \theta(x_э, \Delta^{(2)})}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

решение которой известными численными методами на цифровой модели объекта относительно искомым параметров  $\Delta_1, \Delta_2$ , величины минимакса  $\varepsilon_{\min}^{(2)}$  и промежуточной неизвестной  $x_э$  [5, 8, 9] исчерпывает решение исходной задачи оптимального быстрогодействия. Возможность попутного определения величины минимакса  $\varepsilon_{\min}^{(2)}$  представляет самостоятельный интерес. Некоторые расчетные результаты при  $\theta^{**} = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\theta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  отражены на рис. 1, 2.

Если на протяжении оптимального процесса с алгоритмом управления (16) максимальная температура превышает допустимый предел  $\theta_{\text{доп}}$ , необходимо перейти к решению

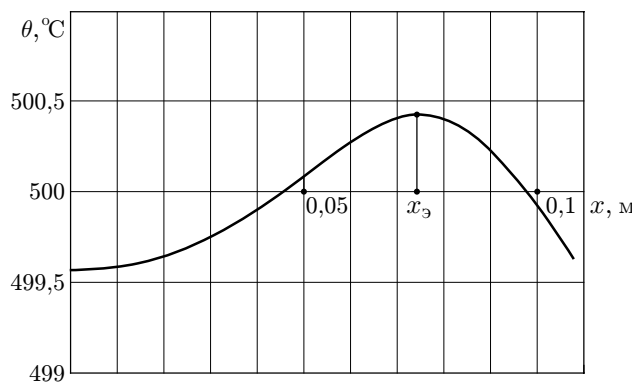


Рис. 2. Распределение температур по радиусу заготовки в конце оптимального процесса нагрева при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$

поставленной задачи быстродействия с соответствующим фазовым ограничением

$$\theta_{\max}(t) = \max_{x \in [0, R]} \theta(x, t) \leq \theta_{\text{доп}}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (18)$$

В типичном случае  $\theta_{\text{доп}} > \theta^{**} + \varepsilon$  оптимальный алгоритм (16) дополняется участком движения по ограничению  $v^* = v^0(t)$ ,  $t \in (t_1, \Delta_1)$ :

$$v^*(t) = \begin{cases} v_{\max}, & 0 < t < t^0, \\ v^0(t), & t^0 < t < \Delta_1, \\ 0, & \Delta_1 < t < \Delta_1 + \Delta_2, \end{cases} \quad (19)$$

где момент  $t^0$  выхода на ограничение заведомо определяется равенством  $\theta(x, t^0) = \theta_{\text{доп}}$ , а  $v^0(t)$  находится из условия  $\theta_{\max}(t) = \theta_{\text{доп}}$ ,  $t \in (t^0, \Delta_1)$ .

В роли искомых параметров в (19) опять выступают длительности  $\Delta_1, \Delta_2$  двух интервалов оптимальной программы с той лишь разницей по сравнению с (16), что под  $\Delta_1$  понимается протяженность периода нагрева с максимально допустимой интенсивностью управляющего воздействия  $v_{\max}$  на участке  $(0, t^0)$  и  $v^0$  на участке  $(t^0, \Delta_1)$  при фиксированном значении  $t^0$ .

Форма кривой результирующего радиального распределения температуры и расчетная система уравнений альтернансного метода сохраняются в виде (17), где только теперь конкретные зависимости  $\theta(x, \Delta^{(2)})$  от  $\Delta^{(2)}$  усложняются при переходе от (16) к алгоритму управления (19).

Если  $\varepsilon$  в (15) фиксируется заранее заданным численным значением  $\varepsilon_0$  в условиях априори неизвестных величин минимакса в последовательности неравенств (8), то решение задачи быстродействия производится в два этапа.

На первом из них последовательно решаются предлагаемым методом для возрастающего ряда значений  $j = 1, 2, \dots, k$  задачи быстродействия, сводимые к виду (15), при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$  с использованием альтернансных свойств  $\theta(x, \Delta^{(N_0)})$ , подобно приведенному примеру для  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ . Попутно определяемые при этом значения  $\varepsilon_{\min}^{(j)}$  сравниваются на каждом шаге с заданным значением  $\varepsilon_0$  вплоть до выполнения неравенств  $\varepsilon_{\min}^{(k)} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(k-1)}$  при некотором  $k \leq \rho$ .

На втором этапе задача решается тем же способом уже при фиксированной величине  $\varepsilon_0$ , для которой по правилу (9) устанавливается размерность  $N_0 = k$  искомого  $\Delta^{(k)}$ -параметризуемого управления.

В соответствии с указанным вычислительным алгоритмом сначала рассматривается случай  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ , для которого согласно (9)  $N_0 = 1$ , оптимальный режим нагрева реализуется с предельно допустимой скоростью на всем протяжении процесса нагрева:

$$v^*(t) = v_{\max}, \quad 0 < t < \Delta_1, \quad (20)$$

и альтернансные свойства  $\theta(x, \Delta^{(1)})$  фиксируют достижение предельно допустимых отклонений  $\theta(x, \Delta^{(1)})$  от  $\theta^{**}$ , равных  $\varepsilon_{\min}^{(1)}$ , на оси и боковой поверхности цилиндра с минимальной и максимальной температурами  $\theta^{**} - \varepsilon_{\min}^{(1)}$  и  $\theta^{**} + \varepsilon_{\min}^{(1)}$  соответственно.

На этом основании вместо (17) составляется расчетная система двух уравнений

$$\begin{cases} \theta(0, \Delta_1) - \theta^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(1)}, \\ \theta(1, \Delta_1) - \theta^{**} = \varepsilon_{\min}^{(1)}, \end{cases} \quad (21)$$



разрешаемая относительно двух неизвестных  $\Delta_1$  и  $\varepsilon_{\min}^{(1)}$ .

Если  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ , то исходная задача решена на первом шаге. В случае  $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(1)}$  следует перейти к варианту  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ , сводимому к системе уравнений (17). При выполнении неравенств  $\varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(1)}$  переходим ко второму этапу решения задачи для  $\varepsilon = \varepsilon_0$  в условиях  $k = 2$  с  $\Delta^{(2)}$ -параметризуемым алгоритмом управления вида (16).

В отличие от случая  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ , минимальная и максимальная температуры  $\theta^{**} - \varepsilon$  и  $\theta^{**} + \varepsilon$  в конце оптимального процесса достигаются только в двух точках: соответственно в точке  $x = 0$  на оси цилиндра и в точке  $x_3 \in (0, R)$  температурного максимума при  $|\theta(R, \Delta^{(2)}) - \theta^{**}| < \varepsilon_0$  на боковой поверхности слитка [4, 8, 9].

Расчетная система уравнений альтернансного метода

$$\begin{cases} \theta(0, \Delta^{(2)}) - \theta^{**} = -\varepsilon_0, \\ \theta(x_3, \Delta^{(2)}) - \theta^{**} = +\varepsilon_0, \\ \frac{\partial \theta(x_3, \Delta^{(2)})}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

решается относительно трех неизвестных  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и  $x_3$  при заданном значении  $\varepsilon_0$ .

Если  $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(2)}$ , то следует продолжить расчеты при  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$ ,  $j > 2$ . В случае, когда  $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf}$ , исходная задача неразрешима. Учет фазовых ограничений вида (18) может быть выполнен при реализации описанного вычислительного алгоритма подобно (19).

**Заключение.** Предлагаемый в данной работе метод позволяет найти алгоритмически точные (в рамках рассматриваемых математических моделей) технически осуществимые алгоритмы оптимального программного управления объектами с распределенными параметрами в зависимости от допустимой ошибки равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины к заданному состоянию. Конструктивная вычислительная технология реализации метода может быть применена к решению широкого круга прикладных задач оптимизации СРП.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 526 с.
2. **Бутковский А. Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
3. **Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
4. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
5. **Рапопорт Э. Я.** Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
6. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 22–33.

7. **Рапопорт Э. Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
8. **Rapoport E., Pleshivtseva Yu.** Optimal Control of Induction Heating Processes. London — New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007. 349 p.
9. **Рапопорт Э. Я.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993. 278 с.
10. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2002. № 5. С. 144–155.
11. **Pleshivtseva Yu., Zaikina N., Nacke B., Nikanorov A.** Time-optimal control of energy-efficient heating of aluminum billets rotating in DC magnetic field // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review). 2008. N 11. P. 120–123.

*Поступила в редакцию 29 июня 2009 г.*

---