

УДК 621.321

## ОПТИМИЗАЦИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РЕГУЛЯТОРОМ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

А. А. Воевода, А. В. Чехонадских

*Новосибирский государственный технический университет,  
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: ucit@ucit.ru  
alchek@ngs.ru*

Предлагается оптимизационный подход к нахождению параметров регуляторов неполного порядка. Показано, что численная оценка расположения характеристических корней системы на комплексной плоскости позволяет разбить их множество на части, в каждой из которых для корней вводятся действительные координаты. Возникающая конструкция корневого симплекса аналогична геометрическому комплексу. С использованием неориентированных и ориентированных графов представляется структура областей и границ симплекса. С помощью минимизации той же оценки как целевой функции, зависящей от параметров регулятора, осуществляется перемещение корней в желаемую область. Критические области отражаются сокращенными графами.

*Ключевые слова:* система автоматического управления с регулятором пониженного порядка, ПИД-регулятор, полюс, корневой симплекс, симплектические неорграфы и орграфы, минимизация недифференцируемой целевой функции.

**Введение.** В последнее время одним из актуальных направлений теории автоматического управления является использование регуляторов пониженного порядка [1]. В работах [2–5] предлагаются новые подходы к созданию систем такого типа, значительно отличающиеся от способов постановки и решения задачи синтеза систем автоматического управления (САУ) полного порядка. В последнем случае полюса системы просто задаются конструктором, после чего параметры регулятора, входящие в его передаточную функцию  $D_c^{-1}N_c(s)$ , определяются из соответствующего диофантова уравнения (равенства Безу)

$$D_c(s)D_o(s) + N_c(s)N_o(s) = D_s(s),$$

где матрицы  $D_o(s), N_o(s)$  — знаменатель и числитель передаточной функции объекта;  $D_s(s)$  — знаменатель системы в целом.

При использовании регулятора пониженного порядка число его параметров и то, как они входят в уравнение, не позволяет задавать полюса произвольно. Так, для пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора с передаточной функцией  $(K_{\text{int}} + K_{\text{pr}}s + K_{\text{dif}}s^2)/s$  в одноканальном случае таких параметров всего три; в двухканальном — двенадцать, но характер их вхождения в уравнение  $sD_o(s) + (K_{\text{int}} + K_{\text{pr}}s + K_{\text{dif}}s^2)N_o(s) = D_s(s)$  не всегда позволяет рассчитывать на его разрешимость. Модальный синтез подобных систем осуществляется с помощью нахождения значений параметров, обеспечивающих расположение ее характеристических корней в нужной области: в самом распространенном случае это левая полуплоскость  $\text{Re}z_k \leq -\alpha \leq 0$  или ее трапециевидный сектор  $|\text{Im}z_k/\text{Re}z_k| \leq \beta$ . В последнее время рассматриваются более сложные и практически целесообразные возможности [5, 6].

Если «качество» корней или их расположение в плоскости  $S$  допускает некоторую

численную характеристику<sup>1)</sup>, то ее можно использовать как целевую функцию, минимизация которой приведет к оптимальному результату. Однако одно из принципиальных затруднений при синтезе системы пониженного порядка предопределяется тем фактом, что параметры регулятора действительны, а полюса системы, как правило, комплексны. При этом значение целевой функции задается набором характеристических корней как действительных, так и комплексных, не имеющих никакой естественной упорядоченности и не являющихся даже векторами пространства  $C^n$ . Вместе с другими особенностями этих задач: невыпуклостью, многоэкстремальностью, недифференцируемостью, неограниченным субдифференциалом [7, 8] — такая конструкция целевой функции представляет значительную теоретическую и практическую сложность с точки зрения анализа и оптимизации.

Цель данной работы — предложить методику, которая опирается на введение действительных координат характеристических корней, согласованную с критическими (потенциально экстремальными для целевых функций) подмножествами в пространстве параметров, и позволяет в рамках действительного анализа определять особые многообразия в пространстве параметров и возможную локализацию экстремумов, что используется при нахождении оптимизирующих значений параметров ПИД-регулятора.

**Корневые симплексы и симплектические графы.** В работах [7, 9–13] предлагается действительная координатизация корней многочленов с действительными коэффициентами. Суть идеи такова. Корни многочлена выстраиваются в некотором порядке: от самых «удобных» до самых «неудобных», скажем, по убыванию устойчивости  $\operatorname{Re}z_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re}z_n$  или с учетом колебательности  $\operatorname{Re}z_1 + |\operatorname{Im}z_1| \leq \dots \leq \operatorname{Re}z_n + |\operatorname{Im}z_n|$ <sup>2)</sup>. Таким образом, каждый корень или комплексная пара сопоставляется с некоторым целевым значением:  $\operatorname{Re}z_k$  или  $\operatorname{Re}z_k + |\operatorname{Im}z_k|$ . Выбор параметров регулятора будет осуществляться из соображений минимизации наибольшего целевого значения, которое и принимается как значение целевой функции данного корневого множества.

Если все действительные корни и комплексно-сопряженные пары разделяются строгим неравенством (например, для набора корней  $x_1; x_2 \pm iy_3; \dots; x_{n-1} \pm iy_n$  верно  $x_1 < x_2 + |y_3| < \dots < x_{n-1} + |y_n|$ ), то в окрестности вектора коэффициентов, где выполняется это неравенство, можно использовать  $n$ -мерный действительный вектор  $(x_1; x_2; y_3; \dots; x_{n-1}; y_n)$  в качестве координат корневого множества ( $y_k \geq 0$ ). Более того, при этом многочлен  $f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$  заведомо сепарабелен и задает диффеоморфизм вектора своих коэффициентов в вектор корней:

$$(a_0; a_1; \dots; a_{n-1}) \rightarrow (x_1; x_2; y_3; \dots; x_{n-1}; y_n).$$

Таких возможностей конечное число, поэтому для корневых множеств есть конечный набор  $n$ -мерных сегментов, задающихся, во-первых, разделением всех корней на действительные и комплексно-сопряженные, во-вторых, соотношениями между этими корнями. Допуская нестрогие неравенства и тем самым рассматривая каждый такой сегмент вместе с границей, можно обозначить их как  $A_{ij}$ . Здесь  $i$  — число комплексных пар, которое может меняться от 0 до  $[n/2]$ , а  $j$  — номер конкретного сегмента среди других с тем же самым  $i$ . В каждом из них существует взаимно однозначное соответствие корней многочлена и координатного вектора типа  $(x_1; x_2; y_3; \dots; x_{n-1}; y_n)$ <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup>Если требуется обычная устойчивость системы с запасом  $\alpha$ , то полюса должны располагаться в полуплоскости  $\operatorname{Re}z_k \leq -\alpha$  и расположение корней можно характеризовать функцией  $F(z_1, \dots, z_n) = \max \operatorname{Re}z_k$ . Если при этом требуется ограничение колебательности, то полюса должны находиться также внутри конуса  $|\operatorname{Im}z_k / \operatorname{Re}z_k| \leq \beta$  и для числовой характеристики можно использовать функцию  $G(z_1, \dots, z_n) = \max(\operatorname{Re}z_k + |\operatorname{Im}z_k| / \beta)$ .

<sup>2)</sup>Этот способ упорядочения корней в дальнейшем будет основным примером.

<sup>3)</sup>Важное замечание об  $i!$ -листности сегментов  $A_{ij}$ , что существенно при  $i \geq 2$ , подробно рассматривается в [12].

Однако на границе сегментов при переходе одного из неравенств в равенство возникает возможность отнести корневой набор к двум (или более, если равенств несколько) сегментам. На самом деле существуют «граничные» наборы с кратными действительными корнями  $\dots < x_k = x_{k+1} < \dots$ , которые за счет малого изменения коэффициентов могут превратиться как в различные действительные корни  $\dots < x_k < x_{k+1} < \dots$ , так и в комплексно-сопряженные пары  $x_k \pm iy_{k+1}$ , такие что  $\dots < x_k + |y_{k+1}| < \dots$ . Этот тип границы может описываться  $(n - 1)$ -мерным действительным вектором типа  $(x_1; \dots; x_k, y_{k+1}; \dots; x_{n-1}; y_n)$ , где для кратной пары корней предусмотрена только одна координата. Большое значение при этом имеет тот факт, что переход на такую «кратную» границу сопровождается разрывом 2-го рода производного отображения  $\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(a_0, \dots, a_{n-1})}$  [12]. Очевидно, таких  $(n - 1)$ -мерных сегментов также конечное число, и они обозначаются  $B_{2ij}$ , где  $i$  — по-прежнему число комплексных пар,  $j$  — номер граничного сегмента при фиксированном  $i$ .

Далее, на границу сегмента выводит и переход строгого неравенства в равенство типа  $\dots < x_{k-1} = x_k + |y_{k+1}| < \dots$ . Здесь малое изменение коэффициентов многочлена может привести как в сегмент, где действительный корень  $x_{k-1}$  «младше» комплексной пары  $\dots < x_{k-1} < x_k + |y_{k+1}| < \dots$ , так и в сегмент, где они меняются местами (и номерами!):  $\dots < x_{k-1} + |y_k| < x_{k+1} < \dots$ . Таких границ также конечное число, и каждую из них можно описывать  $(n - 1)$ -мерным действительным вектором типа  $(x_1; \dots; x_{k-1}; y_{k+1}; \dots; x_{n-1}; y_n)$ , полагая, что  $x_{k-1} - y_{k+1} = x_k$ . Если такое равенство выполняется для самых «правых» корней, т. е.  $k + 1 = n$ , то переход на границу обычно сопровождается изломом целевой функции  $F(z_1, \dots, z_n)$  или  $G(z_1, \dots, z_n)$  (см. примеч. 1) — разрывом 1-го рода ее производной. Такое цельное равенство правых корней будем называть слабой несепарабельностью. Вообще же граничные сегменты, на которых совпадают целевые значения действительного корня и комплексной пары или двух комплексных пар, обозначаются  $B_{2i+1j}$ <sup>4)</sup>.

Сегментарно-граничные отношения между этими множествами описываются неориентированным графом

$$H_n = \langle \{A_{ij} \mid i, j\}; \{B_{lm} \mid l, m\} \rangle,$$

вершинами которого являются как раз  $n$ -мерные сегменты  $A_{ij}$ , а ребрами —  $(n - 1)$ -мерные границы  $B_{kl}$  между ними (рис. 1).

Когда еще одно неравенство переходит в равенство, что соответствует пересечению сегментов  $B_{kl}$ , образуются  $(n - 2)$ -мерные границы  $C_{pq}$ ; далее —  $(n - 3)$ -мерные вплоть до одномерной прямой  $L$ , соответствующей  $n$ -кратным корням  $x_1 = \dots = x_n$ .

Так возникает сегментарно-граничная структура, образующая корневой симплекс, каждый сегмент которого описывается определенными неравенствами между компонентами  $k$ -мерных действительных векторов, соответствующими действительным или комплексным координатам корней многочлена. Эта конструкция во многом аналогична симплицальному комплексу, классическому понятию комбинаторной топологии<sup>5)</sup>. Более полно строение корневого симплекса описывается ориентированным графом

$$G_n = \langle \{A_{ij}; B_{lm}; \dots; L \mid i, j, l, m, \dots\}; R \rangle,$$

вершинами которого являются сегменты корневого симплекса, а дуги идут от сегмента к границе (см. рис. 1).

<sup>4)</sup>Без обсуждения оставляется возможность равенства  $\dots < x_{k-1} + |y_k| = x_{k+1} + |y_{k+2}| < \dots$ . Как указывается в [12], такая граница в обычном смысле ничего не ограничивает и является линией «склейки» двух листов многолистных сегментов  $A_{ij}$  при  $i \geq 2$ .

<sup>5)</sup>Очевидных отличий два:  $i!$ -листность сегментов  $A_{ij}$  (см. примеч. 3) и неограниченность всех сегментов, тогда как в симплицальном комплексе они предполагаются ограниченными.

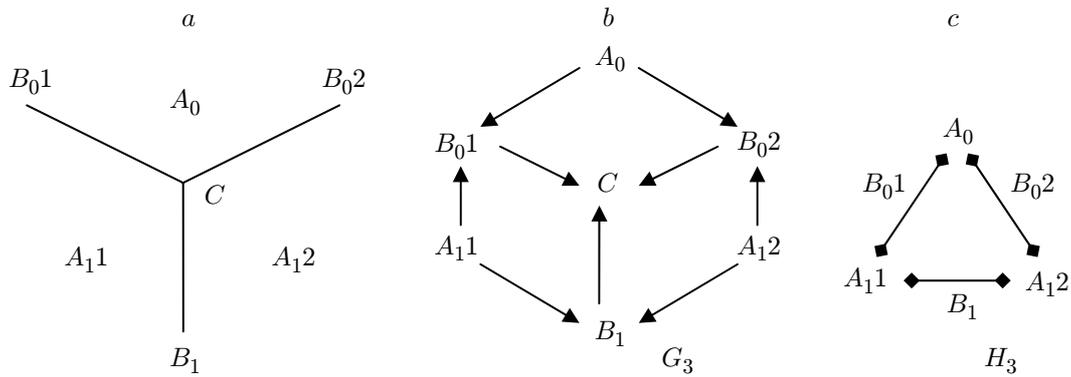


Рис. 1. Графы корневого симплекса многочлена 3-й степени: схема корневого симплекса (а) (сегмент  $A_0$  включает действительные корни, сегменты  $A_{11}, 2$  — оба варианта расположения действительного корня и комплексной пары, границы  $B_{01}, 2$  включают пару кратных корней,  $B_1$  — действительный корень и комплексную пару с равными целевыми значениями,  $C$  — линия корней кратности 3); сегментарно-граничные соответствия представлены оргграфом  $G_3$  (b) и неоргграфом  $H_3$  (c)

Каждому допустимому вектору значений параметров регулятора (т. е. точке в пространстве параметров) соответствует некоторый характеристический многочлен САУ. Соотношения между его корнями позволяют отнести этот набор корней к определенному сегменту корневого симплекса, а точку в пространстве параметров — к соответствующей корневой зоне этого пространства. Рассматривая прообразы сегментов  $A_{ij}, B_{lm}$  и т. д. в пространстве параметров, получаем в нем корневые зоны  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{lm}, \dots$  соответственно. Отношения зон и границ в пространстве параметров также описываются симплектическими графами с той важной оговоркой, что корневые зоны нередко оказываются двухсвязными и, по-видимому, могут быть многосвязными.

**Сокращение симплектической структуры в корневых зонах: редуцированные графы и кодирование вершин.** С ростом степени характеристического многочлена структура корневого симплекса растет экспоненциально. Как показано в [11], мощности симплектических графов асимптотически растут как  $|H_n| \sim 1,618^n$  и  $|G_n| \sim 2,481^n$ , что оказывает влияние на практическое осуществление синтеза системы. Введенная в [12] концепция  $R$ -градуировки позволяет ограничиваться сокращенной структурой корневого симплекса (рис. 2). Это достигается за счет нескольких факторов:

- 1) число параметров регулятора уступает степени характеристического многочлена;
- 2) не все возможности взаимного расположения корней реализуются при конкретной зависимости коэффициентов многочлена от параметров;
- 3) значение целевой функции задают только самые правые корни.

Первую особенность легко учесть непосредственно в симплектическом оргграфе  $G_n$ . Число параметров  $k$  сказывается на реализуемости графа «по глубине»:  $n$ -мерные сегменты в пространстве параметров переходят в  $k$ -мерные корневые зоны, спуск к сегментам меньших размерностей приводит к нульмерным корневым зонам на  $n - k$ -м уровне графа. Так, для случая трех параметров ПИД-регулятора сегменты  $A_{ij}$  реализуются как трехмерные корневые зоны  $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{lm}$  оказываются двумерными поверхностями,  $\tilde{C}_{pq}$  — линиями и, наконец, каждому сегменту  $D_{uv}$  соответствует одна или несколько точек  $\tilde{D}_{uv}$ . Этим реализация оргграфа исчерпывается.

Неполное представление корневых сегментов среди корневых зон (вторая особенность)

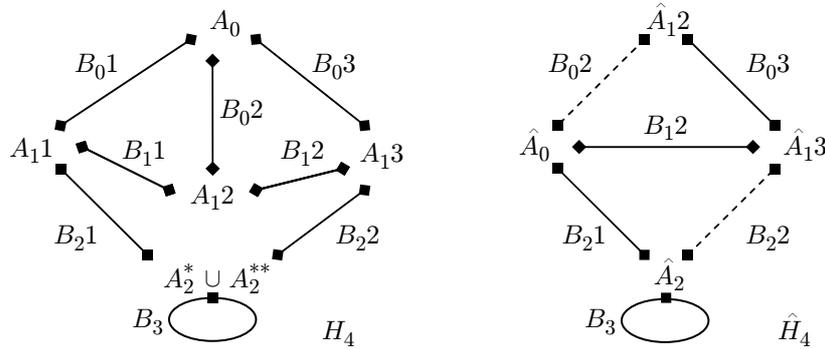


Рис. 2. Полный симплектический неорграф  $H_4$  и редуцированный граф  $\hat{H}_4$ , отражающий структуру объединенных корневых зон и особых многообразий целевой функции для многочлена степени  $\geq 4$

может быть непосредственно учтено в неориентированном графе  $H_n$ : достаточно исключить отсутствующие вершины, отвечающие наибольшей размерности, и их границы.

В орграфе это приводит к тому, что из него удаляются вершины  $A_{ij}$  и  $B_{lm}$ , отсутствующие в неорграфе, а далее по индукции удаляются те вершины размерности  $k$ , которые не являются границами между двумя и более сохранившимися вершинами размерности  $k + 1$ .

В третьем случае сокращение обусловлено тем, что полная картина особых границ дается тремя правыми корнями или двумя комплексными парами, а численность меньших корней (и тем самым степень многочлена) в этом отношении себя не проявляет. Нарушения дифференцируемости и критические точки возникают тогда, когда правые корни оказываются:

- а) кратной действительной парой  $x_{n-1} = x_n$ ;
- б) действительным корнем и комплексной парой с равными целевыми значениями, например  $x_{n-2} = x_{n-1} + |y_n|$ ;
- в) двумя комплексными парами с равными целевыми значениями, например  $x_{n-3} + |y_{n-2}| = x_{n-1} + |y_n|$ .

Рассматривая только соответствующие сегменты и корневые зоны, можно сократить структуру неориентированного симплектического графа до редуцированного графа  $\hat{H}_4$  (см. рис. 2).

Границы типа *a* в последнем обозначены как  $B_{12}$  и  $B_{21}$ , они разграничивают корневую зону  $A_0$  ( $\dots \leq x_{n-1} \leq x_n$ ) и зоны  $\hat{A}_{13}$  ( $\dots \leq x_{n-2} \leq x_{n-1} + |y_n|$ ) или  $\hat{A}_2$  ( $\dots \leq x_{n-3} + |y_{n-2}| \leq x_{n-1} + |y_n|$ ). Граница типа *б* обозначена как  $B_{03}$ , она разграничивает корневые зоны  $\hat{A}_{12}$  ( $\dots \leq x_{n-2} + |y_{n-1}| \leq x_n$ ) и  $\hat{A}_{13}$  ( $\dots \leq x_{n-2} \leq x_{n-1} + |y_n|$ ). Граница типа *в* оказывается петлей  $B_3$  (см. примеч. 4) — это «линия склейки» двух листов сегмента  $\hat{A}_2 = A'_2 \cup A''_2$  ( $\dots \leq x_{n-3} + |y_{n-2}| = x_{n-1} + |y_n|$ ).

При добавлении двух границ, где дифференцируемость целевой функции не нарушается:  $B_{02}$  ( $\dots \leq x_{n-2} = x_{n-1} \leq x_n$  или  $\dots \leq x_{n-3} + |y_{n-2}| = x_{n-1} \leq x_n$ ) и  $B_{22}$  ( $\dots \leq x_{n-3} = x_{n-2} \leq x_{n-1} + |y_n|$ ), получается граф  $\hat{H}_4$ , который формально возникает из неорграфа  $H_4$  стягиванием ребра  $B_{01}$  и объединением  $\hat{A}_0 = A_0 \cup A_{11}$ .

Структура редуцированного орграфа  $\hat{G}_n$  возникает из всевозможных экстремальных границ в корневом симплексе, задаваемых различными кратностями правых корней от 1 до  $n$ , равно как и совпадениями их целевых значений. Граф  $\hat{G}_5$  для многочлена 5-й степени приведен на рис. 3. Однако предварительно необходимо изложить способ кодирования вершин графа  $G_n$ . В работе [12] указана кодировка, позволяющая определять важнейшие

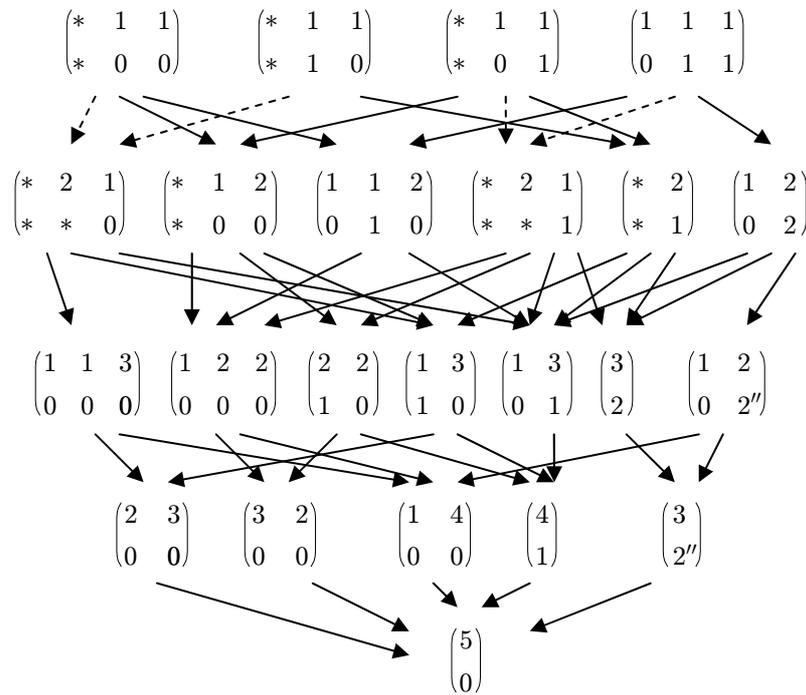


Рис. 3. Редуцированный оргграф  $\hat{G}_5$ , отражающий структуру корневых зон и критических границ для многочлена 5-й степени. Пунктирные стрелки, приведенные для полноты структуры, обозначают переходы на неэкстремальные границы

характеристики каждой вершины (например, число комплексных пар и размерность соответствующего сегмента), а также их смежность.

Вершины графа кодируются по неравенствам, задающим соответствующий сегмент. Кодами служат матрицы

$$K_{2 \times m} = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & \dots & k_{2m} \end{pmatrix},$$

где  $m \leq n$ ,  $k_{1j} \geq 1$ ,  $0 \leq k_{2j} \leq k_{1j}$ ,  $\sum k_{ij} = n$ .

Число столбцов  $m$  на единицу больше числа значков « $\leq$ » в системе неравенств, задающей данный сегмент и вершину графа. Например, для задающих неравенств  $x_1 + |y_2| = x_3 \leq x_4 = x_5 = x_6 \leq x_7 + |y_8| = x_9 + |y_{10}| = x_{11}$  число столбцов  $m = 3$ .

Строка  $(k_{11} \dots k_{1m})$  составляется из чисел равных между собой членов задающей системы неравенств, причем комплексно-сопряженная пара здесь считается как один корень. Для этого примера получится строка  $(2 \ 3 \ 3)$ . Элементы второй строки указывают, сколько из этих равных между собой элементов соответствует комплексным парам, а сумма второй строки  $\sum k_{2j} = l$  — это число комплексных пар набора. В указанном случае второй строкой будет  $(1 \ 0 \ 2)$ , а ее сумма равна 3 — это число комплексных пар. Сумма всех элементов матрицы равна 11 — степени многочлена и общему числу корней.

**Пример.** Мощность полного оргграфа  $G_5$  для многочлена 5-й степени равна 44 [11]. Сокращение производится за счет объединения корневых сегментов, которые разделяются некритическими границами (не нарушающими дифференцируемости целевой функции). Он наследует от неорграфа  $\hat{H}_4$  вершины  $\hat{A}_{ij}$  и ребра  $B_{km}$ , которые здесь также становятся вершинами, но на рис. 3 граф  $\hat{G}_5$  изображен с помощью матричных кодов, чтобы избежать

литеральных обозначений вершин и привлечения задающих сегменты неравенств. Кроме того,  $\hat{G}_5$  включает в себя вершины, отвечающие критическим корневым зонам меньшей размерности. Знаком «\*» отметим клетки, содержащие любые допустимые элементы (в том числе пустые), например,

$$\begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} * & 2 \\ * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем глобальные экстремумы достигаются при возникновении кратной комплексной пары, поэтому в граф на рис. 3 включены также вершины с кодами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2'' \end{pmatrix} : x_1 \leq x_2 + |y_3| = x_4 + |y_5|; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2'' \end{pmatrix} : x_1 = x_2 + |y_3| = x_4 + |y_5|.$$

Здесь «''» — кратная комплексная пара. В общем случае они не рассматривались, поскольку в сегментарно-границной структуре корневого симплекса им ничто не соответствует.

**Стабилизация двухмассовой САУ.** Чтобы проиллюстрировать представленные выше конструкции, рассмотрена механическая САУ, в которой в качестве объекта взята упрощенная модель двухзвенного манипулятора: два грузика с массами  $m_1$  и  $m_2$ , последовательно присоединенные пружинами с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  к точке подвеса (рис. 4). Координаты грузиков  $x_1$  и  $x_2$  отсчитываются от положения равновесия. Демпфирование связано со скоростью движения каждого из грузиков коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ . Если предусматривать обе возможности приложения управляющего воздействия  $u_1$  и  $u_2$ , описание САУ в операционной форме принимает вид

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 + a_1 s + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & m_2 s^2 + a_2 s + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Стабилизация формально означает минимизацию числовых оценок расположения полюсов, а содержательно — эффективное гашение колебаний, возникающих как внешние возмущения системы, с помощью ПИД-регулятора.

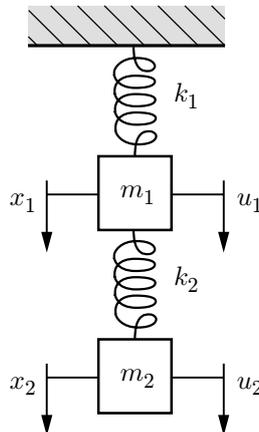


Рис. 4. Двухмассовая система автоматического управления

Знаменатель объекта имеет вид

$$\Delta_4 = m_1 m_2 s^4 + (a_1 m_2 + a_2 m_1) s^3 + \\ + (a_1 a_2 + m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)) s^2 + (a_1 k_2 + a_2 (k_1 + k_2)) s + k_1 k_2.$$

Если управляющее воздействие приложено к первому грузу (т. е.  $u_2 = 0$ ), то по правилу Крамера

$$x_1 = (m_2 s^2 + a_2 s + k_2) / \Delta_4 u_1, \quad x_2 = k_2 / \Delta_4 u_1.$$

Отсюда видно, что ПИД-регулятор с передаточной функцией  $u_2 \simeq (b_0 + b_1 s + b_2 s^2) / s$  позволяет эффективно влиять на характеристический многочлен, если контролируемой величиной является координата  $x_1$ :

$$f_5(s) = s \Delta_4 + (m_1 s^2 + a_1 s + k_1 + k_2)(b_0 + b_1 s + b_2 s^2).$$

Аналогичное выражение для координаты  $x_2$  не позволяет параметрам регулятора влиять на коэффициенты с 3-й по 5-ю степени, тем самым центр корневого набора задается исключительно параметрами объекта.

Полагая, что  $a_2 \sim 0^6$ ,  $m_1 = 1$  и  $k_1 = 1$  ( $m_2$  и  $k_2$  измеряются в относительных единицах), получим после деления на  $m_2$  следующий характеристический многочлен:

$$f_5(s) = s^5 + (a_1 + x_2) s^4 + (1 + k_2 + k_2 / m_2 + x_1) s^3 + \\ + ((a_1 + x_2) k_2 / m_2 + x_0) s^2 + (1 + x_1) k_2 / m_2 s + k_2 / m_2 x_0.$$

Для численной оценки расположения его корней применялись три функции (две указаны в примеч. 1 и их комбинация):

1) оценка по самому правому корню  $F(z_k) = \max_k \operatorname{Re} z_k$ ;

2) оценка по самому правому сектору  $G(z_k) = \max_k (\operatorname{Re} z_k + |\operatorname{Im} z_k|)$ ;

3) оценка  $H_l(z_k) = \max_k (F(z_k), G(z_k) - l)$ , показывающая, что при  $H_l(z_k) = \alpha$  все корни

попадают в трапециевидную зону  $B_\alpha = \{s \mid \operatorname{Re} s \leq \alpha, \operatorname{Re} s + |\operatorname{Im} s| \leq \alpha + l\}$  на комплексной плоскости (сектор с отсеченной на  $l$  вершиной).

Значения параметров объекта были приняты  $m_2 = 0,3$ ,  $k_2 = 1,0$ ,  $a_1 = 0,2$ .

Минимизация целевых функций  $F, G, H$  в [11] осуществлялась методом конечного градиента, что приводило к характерным трудностям, упомянутым во введении. Однако дифференциальный параметр  $b_2$  регулятора фиксировался, и двумерная задача численно решалась с помощью варьирования шага и создания в пространстве параметров «карты» линий уровня целевой функции.

Главной трудностью при трехмерной минимизации функции  $G$  оказывалась стабилизация процесса при достижении точек несепарабельности как для кратного действительного корня, так и для кратной комплексной пары. В этом случае разрыв 2-го рода производного отображения создает в рельефе функции «ущелье» — «овраг с тесно сомкнутыми стенками». Если какое-то значение параметров оказывается рядом с его «дном», то их

<sup>6)</sup> Демпфирование происходит преимущественно в первом звене, которое обеспечивает затухание возмущения для координаты  $x_1$ . Это допущение оправдано еще и тем, что с параметрами регулятора величина  $a_2$  не перемножается.

приращения более удалены от дна и задают бóльшие значения функции. Тем самым возникает эффект ложного экстремума, поскольку скат по дну оврага возможен, но численно труднонаходим.

В качестве начальных точек брались вершины, середины ребер и граней куба  $[-10; 10]^3$  в пространстве параметров. Градиентным методом для функции  $G$  было получено свыше десяти различных точек стабилизации. В тех из них, где соотношение между корнями отвечало вершинам второго и даже третьего ряда орграфа  $\hat{G}_5$  (см. рис. 3), продолжалось сеточное сканирование окрестности точки с целью обнаружения «выхода из оврага», так как эти вершины соответствуют дву- или одномерным множествам, в которых сохраняются возможности дальнейшей оптимизации. Так удавалось практически распознавать ложные экстремумы и «выбираться из ущелий».

Результаты численных исследований следующие:

Для целевой функции  $F(\bar{b})$  задача оказалась одноэкстремальной. Так, минимум функции  $F(\bar{b}^*) \approx -0,486$  достигается в точке  $\bar{b}^* \approx (1,408; 2,763; 2,235)$ , где совпадают единственный действительный корень и действительные части кратной комплексной пары, т. е. спуск приводит в вершину  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2'' \end{pmatrix}$  орграфа  $\hat{G}_5$ , соответствующую нульмерному множеству — точке в пространстве параметров.

Множество точек стабилизации градиентного спуска для функции  $G(\bar{b})$  при тщательном исследовании сокращается до трех вариантов:

1. Глобальный экстремум  $G(\bar{b}^{**}) \approx 1,191$  в точке  $\bar{b}^{**} \approx (2,553; 3,127; 2,619)$ . При этом справа оказывается кратная комплексная пара корней  $-0,45 \pm 1,64i$ , что соответствует вершине  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2'' \end{pmatrix}$  на рис. 3 — одномерной линии в пространстве параметров. Очевидно, что экстремум находится в зоне устойчивости.

2. Локальный экстремум  $G(\bar{b}^{***}) \approx 1,827$  в точке  $\bar{b}^{***} \approx (-5,306; 8,140; -5,714)$ . При этом совпадают целевые значения трехкратного действительного корня 1,82 и комплексной пары корней  $-0,07 \pm 1,75i$ , что соответствует вершине  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  на рис. 3 — точке в пространстве параметров. Этот экстремум уже не находится в зоне устойчивости.

3. Спуск из начальных точек  $\bar{b}_0 = (10; -10 \dots 0; -10)$  приводит к постепенному снижению значения целевой функции и растущему удалению от начала координат в пространстве параметров, например, к точке  $G(17,73; -16,36; 0,80) \approx 1,89$ . При этом все точки траектории относятся к вершине  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , в которой комплексная пара имеет такое же целевое значение, что и двукратный действительный корень. Это соответствует одномерной линии в пространстве параметров. Экстремум на ней достигается, возможно, в несобственном смысле, за пределами области устойчивости.

Стоит отметить, что траектория данного снижения проходит рядом с серединой ребра  $\bar{b}_0 = (10; -10; 0)$ , спуск из которой приводит в глобальный экстремум, что иллюстрирует зависимость траектории минимизации от выбора начальной точки.

Наконец, функция  $H_1(\bar{b}) = \max(F(z_k), G(z_k) - 1)$  наследует глобальные экстремумы  $H(\bar{b}^*) \approx 0,207$  и  $H_1(\bar{b}^{**}) \approx 0,191$  предыдущих с той важной оговоркой, что они находятся в одном «овраге», обусловленном наличием справа кратной комплексной пары. Следовательно, здесь экстремум только один — в точке  $\bar{b}^{**} \approx (2,553; 3,127; 2,619)$ .

Локальный экстремум функции  $H_1(\bar{b}) \approx 0,991$  достигается в точке  $\bar{b}^\bullet \approx (-1,900; 3,161; -3,583)$ , где совпадают целевые значения двух комплексных пар и единственного действительного корня, т. е. критическая точка принадлежит одномерному множеству простран-

ства параметров, соответствующему вершине  $\binom{3}{2}$  оргграфа  $\hat{G}_5$ .

**Заключение.** В предлагаемой работе отмечено, что даже простая структура САУ дает возможность в полной мере проявиться характерным трудностям оптимизационного процесса: многоэкстремальности, недифференцируемости с неограниченным субдифференциалом, овражному рельефу. Если рассмотрение двумерных задач этого типа позволяло преодолевать вычислительные трудности за счет варьирования шага, то уже для трехмерной минимизации преодоление этих препятствий требует особых приемов.

Существенно, что траектории спуска согласуются с каркасом экстремальных границ корневого симплекса. Особенно важно, что минимумы достигаются в точках, коды которых располагаются в нижних рядах вершин сокращенного графа  $\hat{G}_5$ , достижимых при трех свободных параметрах. Эти ряды соответствуют одномерным линиям и точкам в пространстве параметров, что служит важным признаком отличия минимумов от множества «ложных экстремумов» (точек стабилизации численной минимизации).

Последнее замечание дает практический ориентир для распознавания экстремумов среди точек стабилизации численного спуска. Дать теоретический критерий не представляется возможным, поскольку минимум может достигаться и на гладком U-образном дне оврага с Y-образным или V-образным поперечным сечением. Однако сделанное выше замечание указывает на необходимость продолжения попыток обнаружения дна оврага и спуска по нему из более высоких вершин редуцированного графа к более низким.

Это может оказаться весьма существенным при увеличении вычислительных трудностей и числа локальных экстремумов с ростом порядка задачи, которого потребует синтез реальных САУ. И пока не будет найдено эффективных приемов преодоления оптимизационных проблем, рассмотренный подход предполагает постоянный контроль инженера-конструктора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Datta A., Ho M.-T., Bhattacharyya S. P.** Structure and Synthesis of PID Controllers. N. Y.: Springer, 2000.
2. **Söylemez M. T., Munro N., Baki H.** Fast calculation of stabilizing PID controllers // Automatica. 2003. **39**, N 1. P. 121–126.
3. **Ackermann J., Kaesbauer D.** Stable polyhedra in parameter space // Automatica. 2003. **39**, N 5. P. 937–943.
4. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к их решению // АиТ. 2005. № 5. С. 7–46.
5. **Гайворонский С. А.** Параметрический синтез линейных регуляторов робастных систем с гарантированными корневыми показателями качества // Четвертая междунар. конф. по проблемам управления: Пленарные доклады и избранные труды. М.: Институт проблем управления, 2009. С. 576–582.
6. **Rubió-Massegú J., Díaz-Barrero J. L.** Zero and coefficient inequalities for stable polynomials // Appl. Anal. and Discrete Math. 2009. **3**, N 1. P. 69–77.
7. **Чехонадских А. В.** Метрика, градуировка и оптимизация расположения характеристических корней системы автоматического управления // Науч. вест. НГТУ. 2009. № 1(34). С. 165–182.
8. **Чехонадских А. В.** О корректности постановки оптимизационных задач на множестве характеристических корней // Науч. вест. НГТУ. 2009. № 2(35). С. 139–147.
9. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Корневые симплексы многочленов с действительными коэффициентами // ДАН ВШ РФ. 2007. № 1(8). С. 69–81.

- 
10. **Чехонадских А. В.** Свойства корневых симплексов многочленов с действительными коэффициентами // Науч. вест. НГТУ. 2007. № 1(26). С. 101–108.
  11. **Чехонадских А. В.** О скорости роста орграфов корневого симплекса многочленов с действительными коэффициентами // Сб. науч. тр. НГТУ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. № 4(50). С. 163–168.
  12. **Чехонадских А. В.** Корневые симплексы и симплектические графы действительных многочленов // Науч. вест. НГТУ. 2009. № 1(34). С. 143–163.
  13. **Воевода А. А., Чехонадских А. В.** Орграфы граничных сегментов корневых симплексов вещественных многочленов // Науч. вест. НГТУ. 2007. № 1(26). С. 191–196.

*Поступила в редакцию 19 июня 2009 г.*

---