

УДК 519.2

КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

Ю. Е. Воскобойников¹, А. В. Гочаков²

¹Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»,
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
E-mail: voscob@mail.ru

²Сибирский научно-исследовательский гидрометеорологический институт,
630099, г. Новосибирск, ул. Советская, 30

Предлагаемый алгоритм для каждого коэффициента вейвлет-разложения зашумленного сигнала вычисляет свой фильтрующий множитель. Оптимальный фильтрующий множитель зависит от отношения шум/сигнал, для оценивания которого строится итерационная процедура. Определяются предельные точки этой процедуры. Проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность предлагаемого подхода в задачах фильтрации и сжатия зашумленных сигналов и изображений.

Ключевые слова: фильтрация, вейвлет-функции, фильтрующие множители.

Введение. В последнее десятилетие для фильтрации зашумленных сигналов и изображений широко используется аппроксимация сигнала в базисе вейвлет-функций [1–3]. Удобной формой вейвлет-разложений является многомасштабное (multiresolution) представление вида [4–5]

$$\hat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

которое можно интерпретировать как восстановление исходного сигнала $f(t)$ по его коэффициентам разложения на J -м уровне. Функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ называют масштабирующими (или отцовскими), а функции $\{\psi_{j,k}(t)\}$ — вейвлет-функциями (или материнскими). Коэффициенты разложения $a_{j,k}$ (аппроксимирующие) и $d_{j,k}$ (детализирующие) определяются выражениями

$$a_{j,k} = \int_R f(t) \varphi_{j,k}(t) dt; \quad d_{j,k} = \int_R f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (2)$$

где R — интервал задания функции $f(t)$. Переменная j характеризует уровень разложения, и ее часто называют коэффициентом масштаба, а переменная k — временной сдвиг той или иной базисной функции. Напомним, что системы функций $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ составляют ортогональный базис пространств V_j , W_j , $-\infty < j < \infty$, и определяются следующими соотношениями [1–3]:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

где функции $\{\varphi(t - k)\}$, $\{\psi(t - k)\}$ — ортогональный базис нулевых пространств V_0 , W_0 . При этом пространство W_j ортогонально пространству V_j и $V_{j-1} = V_j + W_j$. Чем меньше

номер j , тем более мелкие структуры исходной функции $f(t)$ могут быть представлены в базисах $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ и тем ближе реконструированный сигнал $\hat{f}(t)$ к исходному.

На практике значения функции $f(t)$ заданы (измерены) в N узлах t_i со случайной погрешностью η_i , имеющей нулевое среднее и ограниченную дисперсию. Это означает, что коэффициенты разложения (2) (обозначим их $\tilde{d}_{j,k}$, $\tilde{a}_{j,k}$) также вычисляются со случайными ошибками. Фильтрация сигналов с использованием вейвлет-разложения включает три этапа:

1. Вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения $\tilde{d}_{j,k}$, $\tilde{a}_{j,k}$).
2. Обработка «зашумленных» коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$, $\tilde{a}_{j,k}$ (построение оценок $\hat{d}_{j,k}$, $\hat{a}_{j,k}$ для неизвестных «точных» коэффициентов $d_{j,k}$, $a_{j,k}$).
3. Вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования (нахождение значений «сглаженной» функции (1) в заданных узлах с использованием оценок $\hat{d}_{j,k}$, $\hat{a}_{j,k}$).

Очевидно, что ошибка фильтрации зашумленного сигнала определяется алгоритмами обработки второго этапа. Большинство известных алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент сохраняется или подвергается линейному преобразованию. Пороговые алгоритмы оценивания имеют существенный недостаток: они не учитывают для каждого отдельного коэффициента $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ отношение шум/сигнал, а это отношение в конечном счете определяет информативность соответствующих коэффициентов разложения. Очевидно, что приближение (1), использующее такие пороговые оценки коэффициентов, будет иметь ошибку сглаживания больше (иногда и значительно) минимальной ошибки.

Поэтому в данной работе рассматриваются следующие задачи:

- построение оптимального алгоритма оценивания коэффициентов вейвлет-разложений, минимизирующего среднеквадратическую ошибку (СКО) сглаживания;
- конструктивная реализация оптимального алгоритма, не требующего априорной информации о значениях точных коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$.

Оптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложения.

На практике для вычисления коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$ вместо интегрирования (2) используется пирамидальный алгоритм Малла [4, 5], требующий порядка N операций, что делает его очень эффективным инструментом в вейвлет-технологиях. В этом алгоритме вычисление коэффициентов происходит следующим образом: первоначально (точка старта алгоритма) задаются аппроксимирующие коэффициенты на некотором нулевом уровне j_0 : $a_{j_0,k}$, $k = 1, \dots, N$. Величина N удовлетворяет условию $N = 2^m$, $m > 1$. Затем по этим коэффициентам вычисляются аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты $a_{j_0+1,k}$, $d_{j_0+1,k}$. По коэффициентам $a_{j_0+1,k}$ находятся $a_{j_0+2,k}$, $d_{j_0+2,k}$ и по $a_{j_0+2,k}$ вычисляются $a_{j_0+3,k}$, $d_{j_0+3,k}$. Таким образом по аппроксимирующим коэффициентам $a_{j_0+j-1,k}$ определяются коэффициенты $a_{j_0+j,k}$, $d_{j_0+j,k}$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, 2, \dots, N/2^j$. В алгоритме Малла для вычисления коэффициентов используются суммы небольшого числа слагаемых (число зависит от вида вейвлетов), что позволяет эффективно найти интегралы (2) без методических ошибок, присущих квадратурным формулам.

Для задания коэффициентов $a_{j_0,k}$, $k = 1, \dots, N$, применяют несколько способов. Наиболее частым и простым является задание $a_{j_0,k} = f(t_k)$, $k = 1, \dots, N$, где $f(t_k)$ — значение функции в равноотстоящих узлах сетки. При этом исходная функция $f(t)$ аппроксимируется функцией $s(t) = \sum_{k=1}^N f(t_k)\varphi_{j_0,k}(t)$. Далее будем считать, что выбранное число узлов сетки обеспечивает пренебрежимо малую ошибку аппроксимации.

Предположим, что значения функции заданы (измерены) в N узлах t_i со случайной аддитивной погрешностью η_i , имеющей нулевое среднее и дисперсию σ^2 . Это означает, что коэффициенты $\tilde{a}_{j_0, k}$, $k = 1, \dots, N$, задаются с такой же погрешностью и коэффициенты разложения $\tilde{d}_{j_0+j, k}$, $\tilde{a}_{j_0+j, k}$, $j = 1, \dots, J$, также вычисляются со случайными ошибками. Для упрощения записи уровней разложения далее будем полагать $j_0 = 0$. С учетом этого допущения на J -м уровне разложения имеем набор коэффициентов

$$\{\tilde{d}_{1,k}\}, \{\tilde{d}_{2,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{J,k}\}, \{\tilde{a}_{J,k}\}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2^j, \quad j = 1, \dots, J. \quad (3)$$

По этим коэффициентам вычисляются оценки $\{\hat{d}_{j,k}\}$, $\{\hat{a}_{J,k}\}$ и строится сглаженная функция $\hat{f}(t)$ вида (1). Определим СКО сглаживания выражением

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\int_R (\hat{f}(t) - f(t))^2 dt \right]. \quad (4)$$

Введем ошибку сглаживания $\varepsilon(t) = \hat{f}(t) - f(t)$, для которой (с учетом (1)) справедливо следующее представление:

$$\varepsilon(t) = \sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k}) \varphi_{J,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k}) \psi_{j,k}(t), \quad (5)$$

где $a_{J,k}$, $d_{j,k}$ — коэффициенты разложения точной функции $f(t)$. Квадрат ошибки аппроксимации можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(t) = & \sum_k \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{a}_{J,k'} - a_{J,k'}) \varphi_{J,k}(t) \varphi_{J,k'}(t) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{j'=1}^J \sum_k \sum_{k'} (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})(\hat{d}_{j',k'} - d_{j',k'}) \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) + \\ & + 2 \sum_k \sum_{j=1}^J \sum_{k'} (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})(\hat{d}_{j,k'} - d_{j,k'}) \varphi_{J,k}(t) \psi_{j,k'}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что функции $\varphi_{j,k}(t)$, $\psi_{j,k}(t)$ являются ортонормированными:

$$\int_R \varphi_{j,k}(t) \varphi_{j',k'}(t) dt = \delta_{j',j} \delta_{k',k}; \quad \int_R \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) dt = \delta_{j',j} \delta_{k',k}, \quad (7)$$

$$\int_R \varphi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) dt = 0 \quad \text{для любых } k, j. \quad (8)$$

В (7) величина $\delta_{j',j} = 1$, если $j = j'$, и равна 0 во всех остальных случаях. Вейвлеты, базисные функции которых удовлетворяют условиям (7), (8), называются ортогональными, и к ним также относятся вейвлеты Добеши, Симлета, Кайфлета [1, 4–6]. В данной работе рассматриваются только ортогональные вейвлеты. Учитывая (4), (5) и свойства ортонормированности (7), (8), СКО сглаживания (4) можно определить выражением

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\sum_k (\hat{a}_{J,k} - a_{J,k})^2 \right] + M \left[\sum_{j=1}^J \sum_k (\hat{d}_{j,k} - d_{j,k})^2 \right]. \quad (9)$$

Величины $\hat{a}_{J,k}$, $\hat{d}_{j,k}$, доставляющие минимум функционалу $\Delta(\hat{f})$, назовем оптимальными оценками коэффициентов вейвлет-разложения, которые будем искать в виде

$$\hat{a}_{J,k} = \omega_{J,k}^a \tilde{a}_{J,k}; \quad \hat{d}_{j,k} = \omega_{j,k}^d \tilde{d}_{j,k}. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения зашумленного сигнала $\tilde{a}_{J,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ можно представить как

$$\tilde{a}_{J,k} = a_{J,k} + \varepsilon_{J,k}^a; \quad \tilde{d}_{j,k} = d_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^d. \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_{J,k}^a$, $\varepsilon_{j,k}^d$ — случайные ошибки вычисления коэффициентов, обусловленные случайными погрешностями η_i задания значений функции. Так как математическое ожидание $M[\eta_i] = 0$, $i = 1, \dots, N$, выражение (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta(f) = & \sum_k [(\omega_{J,k}^a - 1)^2 a_{J,k}^2 + (\omega_{J,k}^a)^2 D[\varepsilon_{J,k}^a]] + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_k [(\omega_{j,k}^d - 1)^2 d_{j,k}^2 + (\omega_{j,k}^d)^2 D[\varepsilon_{j,k}^d]] \end{aligned} \quad (12)$$

($D[\varepsilon_{J,k}^a]$, $D[\varepsilon_{j,k}^d]$ — дисперсии соответствующих ошибок вычисления коэффициентов разложения). В силу свойств ортонормированности вейвлетов справедливо $D[\varepsilon_{J,k}^a] = \sigma^2$, $D[\varepsilon_{j,k}^d] = \sigma^2$ (σ^2 — дисперсия погрешностей η_i). Это означает, что дисперсии ошибок вычисления коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$, $\tilde{a}_{J,k}$ одинаковы для всех уровней разложения. Из необходимых и достаточных условий минимума $\Delta(\hat{f})$ получаем оптимальные множители

$$\omega_{\text{opt}J,k}^a = \frac{1}{1 + s_{J,k}^a}; \quad \omega_{\text{opt}j,k}^d = \frac{1}{1 + s_{j,k}^d} \quad (13)$$

и оптимальные оценки

$$\hat{a}_{\text{opt}J,k} = \frac{1}{1 + s_{J,k}^a} \tilde{a}_{J,k}; \quad \hat{d}_{\text{opt}j,k} = \frac{1}{1 + s_{j,k}^d} \tilde{d}_{j,k}, \quad (14)$$

где $s_{J,k}^a = \sigma^2/a_{J,k}^2$ и $s_{j,k}^d = \sigma^2/d_{j,k}^2$ можно трактовать как отношение шум/сигнал соответствующего коэффициента разложения. Покажем, что СКО $\Delta(\hat{f})$ при оптимальных множителях (13) определяется выражением

$$\Delta(\hat{f}_{\text{opt}}) = \sum_k \frac{s_{J,k}^a}{1 + s_{J,k}^a} a_{J,k}^2 + \sum_{j=1}^J \sum_k \frac{s_{j,k}^d}{1 + s_{j,k}^d} d_{j,k}^2, \quad (15)$$

из которого видно, что при достаточно малых σ^2 величина $\Delta(\hat{f}_{\text{opt}})$ имеет порядок σ^2 , т. е. $\Delta(\hat{f}_{\text{opt}}) \sim \sigma^2$.

К сожалению, построенные оптимальные оценки (14) включают в себя отношение шум/сигнал, которое неизвестно из-за незнания значений точного коэффициента разложения, стоящего в знаменателях выражений (13). Эти оценки представляют теоретический интерес, так как указывают, к чему надо стремиться при построении оценок, реализуемых на практике. Одна из них, основанная на итерационном уточнении отношения шум/сигнал, строится далее [7, 8].

Алгоритм итерационного уточнения отношения шум/сигнал. Для упрощения записи алгоритма вычисления оценок введем следующие обозначения: θ — любой точный коэффициент разложения; $\tilde{\theta}$ — коэффициент, вычисленный по зашумленным значениям функции; $s = \sigma^2/\theta^2$. Пусть задана (или вычислена) некоторая стартовая оценка $\hat{\theta}^{(0)}$ для коэффициента θ . Вычислим нулевое приближение для отношения шум/сигнал: $\hat{s}^{(0)} = \sigma^2/(\hat{\theta}^{(0)})^2$. Подставляя это отношение в (14), получаем $\hat{\theta}^{(1)} = \frac{1}{1 + \hat{s}^{(0)}} \tilde{\theta}$, а величину $\hat{\theta}^{(1)}$ в отношение шум/сигнал, имеем $\hat{s}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}$. Таким образом приходим к итерационной процедуре апостериорного уточнения отношения шум/сигнал вида

$$\hat{s}^{(n)} = \frac{\sigma^2}{(\hat{\theta}^{(n)})^2}, \quad \hat{\theta}^{(n+1)} = \frac{1}{1 + \hat{s}^{(n)}} \tilde{\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Для доказательства сходимости этой процедуры возведем обе части последнего выражения (16) в степень -2 и умножим на σ^2 :

$$\hat{s}^{(n+1)} = (1 + \hat{s}^{(n)})^2 \tilde{s}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Здесь $\tilde{s} = \sigma^2/\theta^2$ — отношение шум/сигнал вычисленного коэффициента. Предельные точки последовательности $\hat{s}^{(n)}$ определяются корнями нелинейного уравнения $s^* = (1 + s^*)^2 \tilde{s}$. После преобразования приходим к квадратному уравнению

$$(s^*)^2 + (2 - 1/\tilde{s})s^* + 1 = 0, \quad (18)$$

корни которого находятся по формуле

$$s_{1,2}^* = \frac{1 - 2\tilde{s} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{s}}}{2\tilde{s}} \quad (19)$$

и зависят от величины \tilde{s} . Первоначально рассмотрим вариант $\tilde{s} \leq 1/4$ и выделим при этом четыре случая, положив для определенности $s_1^* \leq s_2^*$. Доказательство предельных соотношений для этих случаев проводится аналогично доказательствам в работе [7], и поэтому здесь ограничимся записью конечных выражений для пределов последовательности $\hat{s}^{(n)}$.

Случай 1: $0 < \hat{s}^{(0)} \leq s_1^*$. Тогда имеет место монотонная сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^{(n)} = s_1^*.$$

Случай 2: $s_1^* < \hat{s}^{(0)} < s_2^*$. Тогда имеет место монотонная сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^{(n)} = s_1^*.$$

Случай 3: $\hat{s}^{(0)} = s_2^*$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^{(n)} = s_2^*.$$

Случай 4: $\hat{s}^{(0)} > s_2^*$. Тогда имеет место монотонная сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{s}^{(n)} = \infty.$$

Если $\tilde{s} > 1/4$, то корни (19) уравнения (18) являются комплексными величинами, что противоречит определению s . Поэтому будем полагать $\hat{s}^{(n)} \rightarrow \infty$ при $\tilde{s} > 1/4$.

Обобщая рассмотренные случаи, приходим к следующей оценке коэффициента разложения:

$$\hat{\theta}^* = \begin{cases} \frac{1}{1+s_1^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{s} \leq 1/4 \text{ и } 0 < \hat{s}^{(0)} < s_2^*, \\ \frac{1}{1+s_2^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{s} \leq 1/4 \text{ и } \hat{s}^{(0)} = s_2^*, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (20)$$

Алгоритм (20) можно назвать квазиоптимальным оцениванием коэффициента разложения, так как в нем вместо оптимальной величины отношения шум/сигнал (14) используется ее оценка — предельные точки итерационной процедуры (16). Делая в (19), (20) замену общего обозначения $\tilde{\theta}$ конкретным коэффициентом разложения $\tilde{a}_{j,k}$ или $\tilde{d}_{j,k}$, получаем соответствующий квазиоптимальный коэффициент вейвлет-разложения.

Очевидно, что «хороший» алгоритм фильтрации должен обеспечивать сходимость сглаженной функции $\hat{f}(t)$ к точной функции $f(t)$ при стремлении уровня шума к нулю. Используя выражение (4), определим сходимость следующим пределом:

$$\Delta(\hat{f}) = M[\|\hat{f} - f\|^2] = M\left[\int_R (\hat{f}(t) - f(t))^2 dt\right] \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (21)$$

Из выражения (15) видно, что оптимальные оценки (14) обеспечивают сходимость (21) и при достаточно малых σ^2 величина СКО сглаживания имеет порядок σ^2 . Покажем сходимость функции $\hat{f}^*(t)$ с квазиоптимальными коэффициентами разложения.

Утверждение. Если стартовая (для итерационной процедуры уточнения) функция $\hat{f}^{(0)}(t)$ с коэффициентами разложения $\hat{a}_{j,k}^{(0)}$, $\hat{d}_{j,k}^{(0)}$ сходится к функции $f(t)$, т. е.

$$M[\|\hat{f}^{(0)} - f\|^2] \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0, \quad (22)$$

то имеет место сходимость

$$M[\|\hat{f}^* - f\|^2] \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (23)$$

Доказательство. Вернемся к обозначениям $\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}^*$, s_1^* , s_2^* и заметим, что для сходимости (23) необходимо и достаточно выполнение предельных соотношений

$$\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} s_1^* = 0 \text{ и } \hat{s}^{(0)} < s_2^* \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0. \quad (24)$$

Если имеет место сходимость (22), то справедливы выражения

$$\hat{s}^{(0)} \geq \tilde{s} \text{ и } \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \hat{s}^{(0)} = 0 \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим предельное поведение корней s_1^* , s_2^* при $\tilde{s} \rightarrow 0$. Для достаточно малых значений \tilde{s} справедливо представление $(1 - 4\tilde{s})^{1/2} = 1 - 2\tilde{s} - 2\tilde{s}^2 - 4\tilde{s}^3 - 10\tilde{s}^4 - 28\tilde{s}^5 - \dots$. Тогда

$$\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} s_1^* = \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{s} - (1 - 4\tilde{s})^{1/2}}{2\tilde{s}} \approx \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{2\tilde{s}^2 + 4\tilde{s}^3 + 10\tilde{s}^4}{2\tilde{s}} = 0. \quad (25)$$

По аналогии можно доказать предел

$$\lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} s_2^* = \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{1 - 2\tilde{s} + (1 - 4\tilde{s})^{1/2}}{2\tilde{s}} \approx \lim_{\tilde{s} \rightarrow 0} \frac{2 - 4\tilde{s} - 2\tilde{s}^2 - 4\tilde{s}^3}{2\tilde{s}} = \infty. \quad (26)$$

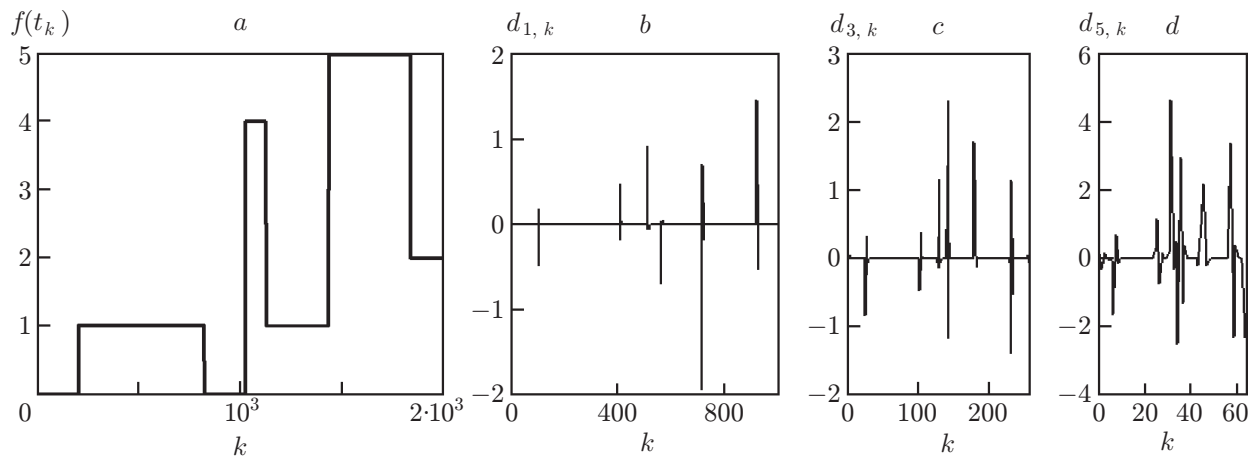


Рис. 1. Значения точной функции $f(t)$ и точных коэффициентов разложения

Из существования пределов (25), (26) и условий (24) следует сходимость (23).

Заметим, что в качестве функции $\hat{f}^{(0)}(t)$ может быть принята либо «исходная» функция $\tilde{f}(t)$, либо предварительно сглаженная функция, которые удовлетворяют условию (22).

Исследование квазиоптимальных оценок коэффициентов разложения. Первоначально рассмотрим, как погрешности задания значений функции влияют на ошибки определения коэффициентов разложения разного уровня. В качестве точной функции $f(t)$ был принят «ступенчатый» сигнал (часто используемый в зарубежной литературе при исследовании алгоритмов вейвлет-фильтрации), значения которого $f_i = f(t_i)$ вычислялись в $N = 2048$ равноотстоящих узлах $t_i \in [0, 1]$ (рис. 1, *a*). По этим значениям были найдены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши восьми уровней $j = 1, \dots, J = 7$. На рис. 1, *b – d* показаны значения точных коэффициентов $d_{j,k}$ для уровней разложения $j = 1, 3, 5$, количество которых на каждом уровне определяется выражением $N_j = N/2^j$, $j = 1, 3, 5$.

Далее вычислялись «зашумленные» значения \tilde{f}_i как $\tilde{f}_i = f_i + \eta_i$, где η_i — нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Относительный уровень погрешностей задания значений функции определялся величиной $\delta_\eta = \|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|/\|\mathbf{f}\|$, где \mathbf{f} , $\tilde{\mathbf{f}}$ — векторы, составленные из значений f_i , \tilde{f}_i ; $\|\tilde{\mathbf{f}}\|$, $\|\mathbf{f}\|$ — евклидовы нормы векторов. Значения \tilde{f}_i , соответствующие $\delta_\eta = 0,12$, показаны на рис. 2, *a*. По этим значениям были найдены коэффициенты разложения для вейвлетов Добеши восьми уровней $j = 1, \dots, J = 7$. На рис. 2, *b – d* даны значения зашумленных коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ для уровней разложения $j = 1, 3, 5$. Сравнивая эти рисунки с рисунками точных коэффициентов, видим, что погрешности η_i в основном искажают детализирующие коэффициенты уровней 1, 2, 3. Это хорошо подтверждается данными табл. 1, в которой приведены относительные ошибки вычисления коэффициентов

$$\delta_a(j) = \|\tilde{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_j\|/\|\mathbf{a}_j\|, \quad \delta_d(j) = \|\tilde{\mathbf{d}}_j - \mathbf{d}_j\|/\|\mathbf{d}_j\|,$$

где \mathbf{a}_j , $\tilde{\mathbf{a}}_j$, \mathbf{d}_j , $\tilde{\mathbf{d}}_j$ — векторы, составленные из соответствующих коэффициентов разложения j -го уровня. Из таблицы также видно, что относительная ошибка детализирующих коэффициентов $\tilde{\mathbf{d}}_j$ существенно выше (для малых значений j) по сравнению с аппроксимирующими коэффициентами. Поэтому на практике ограничиваются пороговой обработкой

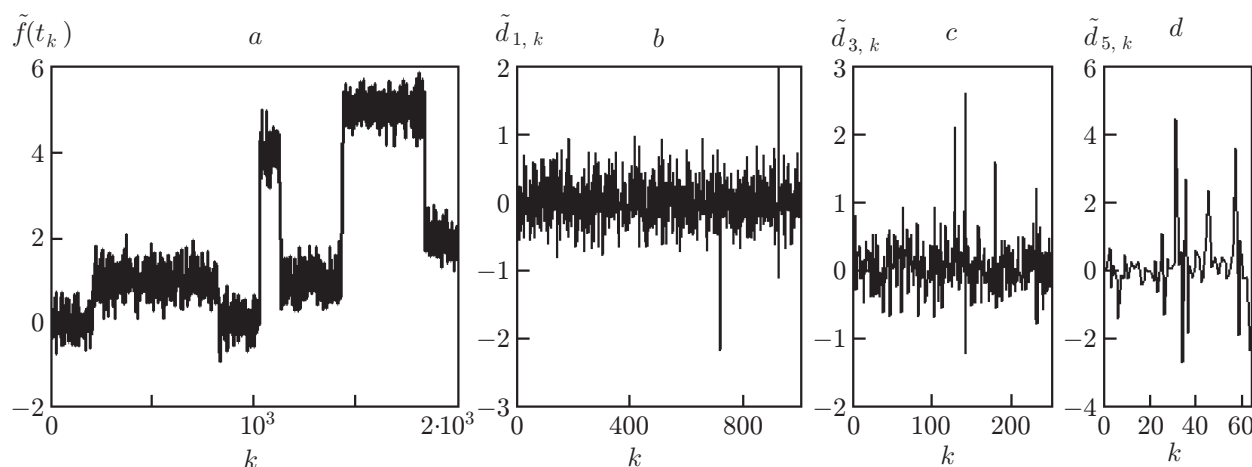


Рис. 2. Значения зашумленной функции $\tilde{f}(t)$ и зашумленных коэффициентов разложения

только детализирующих коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$, которую осуществляют с использованием двух пороговых функций [9, 10]:

1) «жесткой»

$$\hat{d}_{j,k} = \begin{cases} \tilde{d}_{j,k}, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda; \end{cases} \quad (27)$$

2) «мягкой»

$$\hat{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{d}_{j,k})(|\tilde{d}_{j,k}| - \lambda), & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (28)$$

(λ — величина порога). Заметим, что при использовании функции (27) возможно появление в реконструируемом сигнале (в местах скачкообразного изменения амплитуды $f(t)$) артефактов, подобных эффекту Гиббсона. Поэтому на практике отдают предпочтение пороговой функции (28).

Очевидно, что от выбора величины порога λ зависит ошибка фильтрации. При этом λ может быть определена одинаковой для всех уровней разложения или вычислена для каждого уровня. Выбрать величину λ можно различными подходами. Приведем конечные

Таблица 1

Уровень разложения j	Относительные ошибки	
	$\delta_a(j)$	$\delta_d(j)$
1	0,082	2,674
2	0,059	0,983
3	0,044	0,637
4	0,033	0,185
5	0,024	0,102
6	0,017	0,051
7	0,012	0,028

соотношения часто используемых пороговых величин (для каждого j -го уровня разложения).

1. Универсальный порог [10, 11]

$$\lambda_j = \sigma \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (29)$$

где N_j — количество коэффициентов на j -м уровне разложения.

2. Байесовский порог [12]

$$\lambda_j = \sigma^2 / \hat{\sigma}_d. \quad (30)$$

Здесь $\hat{\sigma}_d$ — оценка среднеквадратического отклонения точных коэффициентов $d_{j,k}$, вычисляемая по формуле

$$\hat{\sigma}_d = \max\left(0, \sqrt{\hat{\sigma}_d^2 - \sigma^2}\right), \quad \hat{\sigma}_d^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} d_{j,k}^2.$$

3. SURE-порог [10, 11]

$$\lambda_j = \sigma \mu_j, \quad (31)$$

где μ_j доставляет минимум функционалу

$$\text{SURE}(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \min\left(\frac{\|\tilde{d}_{j,k}\|}{\sigma}, \mu\right) - 2 \sum_{k=1}^{N_j} \text{If}\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu\right);$$

If(условие) — условная функция, принимающая значение 1, если указанное условие выполняется, и значение 0 — в противном случае. В ряде публикаций (например, [13, 14]) отдается предпочтение пороговым величинам (30), (31), имеющим меньшую ошибку сглаживания по сравнению с другими порогами. Поэтому далее при исследовании ошибок фильтрации будут использоваться именно эти пороговые величины.

Во все эти соотношения входит среднеквадратическое отклонение погрешностей $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Если дисперсия неизвестна, то вычисляется оценка

$$\hat{\sigma}^2 = \left[\frac{\text{median}(|d_{1,k}|)}{0,6745} \right]^2, \quad (32)$$

где оператор $\text{median}(|d_{1,k}|)$ вычисляет медиану абсолютных величин коэффициентов первого уровня (объем выборки равен $N/2$). Данная оценка получена из устойчивой оценки среднеквадратического отклонения, используемой в робастных алгоритмах регрессионного анализа [15]. Приведем результаты некоторых вычислительных экспериментов по исследованию точности оценки (32). В первом эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0,91 \cdot 10^{-3}$ (что соответствовало относительному уровню $\delta_\eta = 0,012$). Далее по 30 различным реализациям $\tilde{d}_{1,k}$ ($N/2 = 1024$) вычислялась оценка (32) и все значения этой оценки находились в интервале $[0,87 \cdot 10^{-3}, 1,01 \cdot 10^{-3}]$. Во втором эксперименте дисперсия погрешностей η_i задавалась $\sigma^2 = 0,91 \cdot 10^{-1}$ (что соответствовало $\delta_\eta = 0,12$) и вычисленные значения оценки (32) находились в интервале $[0,88 \cdot 10^{-3}, 0,97 \cdot 10^{-3}]$. Эти результаты свидетельствуют о приемлемой точности оценки (32).

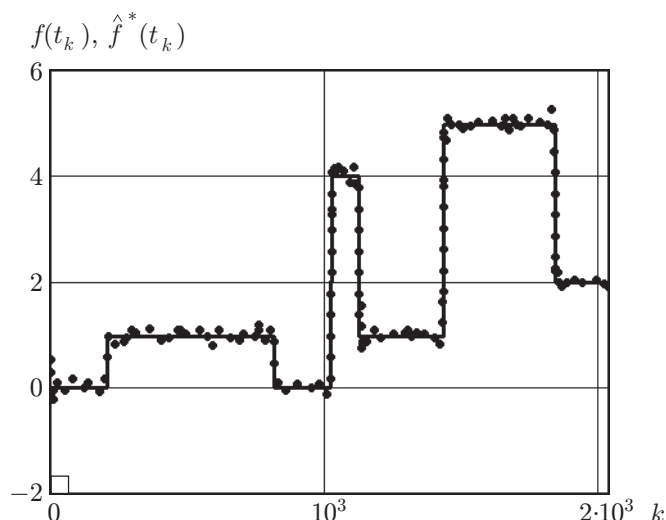


Рис. 3. Точные и сглаженные значения функции

Перейдем к исследованию предлагаемых квазиоптимальных оценок коэффициентов разложения. Очевидно, что замена точных отношений шум/сигнал $s_{j,k}^d$ их оценками приведет к увеличению СКО сглаживания. Поэтому во втором эксперименте строилось (по формуле (1) при $J = 7$) четыре приближения, отличающиеся только оценками детализирующих коэффициентов:

- 1) оптимальное приближение $\hat{f}_{\text{opt}}(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{\text{opt},j,k}$;
- 2) квазиоптимальное приближение $\hat{f}^*(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{j,k}^*$;
- 3) приближение $\hat{f}_B(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{j,k}$, которые определялись с использованием байесовской пороговой функции (30);
- 4) приближение $\hat{f}_S(t)$ с коэффициентами $\hat{d}_{j,k}$, которые определялись с использованием SURE-пороговой функции (31).

Во всех случаях предполагалось, что дисперсия σ^2 неизвестна и вычислялась оценка (32). Значения функции $\hat{f}^*(t)$, в которой сохранилась прямоугольная форма исходного сигнала, показаны на рис. 3. Однако здесь присутствует «остаточный» шум, хотя амплитуда этого шума существенно меньше амплитуды η_i (для данных, приведенных на рисунке, СКО после сглаживания уменьшилась в 2,8 раза).

В табл. 2 приведены средние значения величин $P_{\text{opt}} = \frac{\|\hat{f}^* - f\|}{\|\hat{f}_{\text{opt}} - f\|}$, $P_B = \frac{\|\hat{f}_B - f\|}{\|\hat{f}^* - f\|}$ и $P_S = \frac{\|\hat{f}_S - f\|}{\|\hat{f}^* - f\|}$, вычисленные по выборке объемом 50. Первая величина характеризует

Таблица 2

δ_η	P_{opt}	P_B	P_S
0,001	1,041	1,223	1,176
0,005	1,052	1,245	1,224
0,010	1,087	1,309	1,221
0,050	1,149	1,293	1,236
0,100	1,231	1,348	1,251

Таблица 3

Величины	Предложенный алгоритм	Количество ненулевых коэффициентов			
		50	100	150	200
$K_{сж}$	0,934	0,976	0,951	0,927	0,902
Относительная ошибка фильтрации	0,041	0,064	0,055	0,066	0,073

относительное увеличение ошибки сглаживания за счет замены оптимальной оценки квазиоптимальной, а вторая и третья отражают относительное увеличение ошибки сглаживания при использовании коэффициентов (28) с порогами (30), (31) по сравнению с ошибкой сглаживания при использовании квазиоптимальных оценок (20). Значения $P_B, P_S > 1$ свидетельствуют о меньшей ошибке сглаживания с применением квазиоптимальных оценок (20):

— использование квазиоптимальных оценок позволяет на 20–30 % уменьшить ошибку сглаживания по сравнению с известными пороговыми оценками; аналогичные результаты получены и при обработке других сигналов (в том числе и гладких);

— применение квазиоптимальных оценок вместо оптимальных незначительно увеличивает ошибку сглаживания, особенно при малом уровне шума исходного сигнала.

Возникает вопрос: можно ли предложенный алгоритм оценивания коэффициентов разложения применить для сжатия сигналов? Для ответа на этот вопрос введем в рассмотрение коэффициент сжатия $K_{сж} = (N - N_{\text{ненул}})/N$, где $N_{\text{ненул}}$ — общее количество ненулевых (максимальных) коэффициентов вейвлет-разложения, используемых при реконструкции сигнала (обратное вейвлет-преобразование), и обратимся к табл. 3. В этой таблице приведены: разные значения $N_{\text{ненул}}$, соответствующие коэффициенты сжатия и относительные ошибки фильтрации (относительная погрешность исходных данных $\delta_\eta = 0,12$). Таким образом, алгоритм обеспечивает компромисс между величинами ошибки сглаживания и коэффициента сжатия.

Заключение. Предложенные в данной работе квазиоптимальные оценки коэффициентов вейвлет-разложений не требуют задания точных коэффициентов разложения или их характеристик и позволяют построить приближения с меньшей ошибкой сглаживания по сравнению с пороговыми оценками коэффициентов. Алгоритм вычисления оценок можно использовать при сжатии сигналов. Он допускает простое обобщение для решения задач фильтрации изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи К.** Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2001. 464 с.
3. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов. С.-Пб.: Изд-во ООО «Модус+», 1999. 262 с.
4. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
5. **Mallat S.** A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1989. **11**, N 7. P. 674–693.
6. **Daubechies I.** Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure Appl. Math. 1988. **41**, N 3. P. 909–996.

7. **Воскобойников Ю. Е., Мухина И. Н.** Регуляризирующий алгоритм восстановления сигналов и изображений с уточнением локальных отношений шум/сигнал // *Автометрия*. 1999. № 4. С. 71–83.
8. **Воскобойников Ю. Е., Кузнецов А. М.** Квазиоптимальный алгоритм фурье-фильтрации изображений // *Доклады АН ВШ РФ*. 2006. № 2(7). С. 53–63.
9. **Donoho D. L.** De-noising by soft thresholding // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1995. **41**, N 3. P. 613–627.
10. **Donoho D. L., Johnstone I. M.** Ideal spation adaptation via wavelet shrinkage // *Biometrika*. 1994. **81**, N 3. P. 425–455.
11. **Donoho D. L., Johnstone I. M.** Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // *Journ. Amer. Statist. Assoc.* 1995. **90**, N 432. P. 1200–1224.
12. **Chang S. G., Yu B., Vetterli M.** Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression // *IEEE Trans. Image Process.* 2000. **9**, N 9. P. 1532–1546.
13. **Fodor I. K., Kamath C.** On denoising images using wavelet-based statistical techniques // <http://www.llnl.gov/casc/sapphire>
14. **Fodor I. K., Kamath C.** Denoising through wavelet shrinkage: An empirical study // *SPIE Journ. Electron. Imaging*. 2003. **12**, N 1. P. 151–160.
15. **Хьюбер П.** Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.

Поступила в редакцию 12 августа 2009 г.
