

УДК 004.932

## ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ\*

В. С. Плешанов, А. А. Напрюшкин, В. В. Кибиткин

*Учреждение Российской академии наук  
Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН,  
634021, г. Томск, пр. Академический, 2/4  
E-mail: vsp@ispms.tsc.ru*

Приводится подробный обзор наиболее известных методов оценки фрактальной размерности (ФР), а также демонстрируются результаты исследования их эффективности с точки зрения точности и вычислительной сложности на примере оценки ФР модельных изображений с высокой степенью самоподобия. Предлагается новый алгоритм оценки ФР путем линейных преобразований, позволяющий существенно снизить погрешность без заметного увеличения вычислительной сложности.

*Ключевые слова:* фрактал, фрактальная размерность, изображение, алгоритм, генерация, погрешность.

**Введение.** Графическая информация является одной из наиболее распространенных форм представления знаний и может выступать как в виде объекта, так и в качестве результата исследований. С ростом сложности и количества научно-технических задач все большую актуальность приобретает проблема поиска новых методов и подходов для обработки и анализа графической информации [1].

Один из таких подходов — теория фракталов. Понятия «фрактал» и «фрактальная геометрия» с середины 80-х годов прошлого века прочно вошли в обиход математиков и программистов [2]: «Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа — Безиковича которого строго больше его топологической размерности». Размерность Хаусдорфа — Безиковича называется «фрактальной» и является одной из основных характеристик фракталов. Понятие фрактальной размерности (ФР) выведено из результатов эмпирических исследований Ричардсона, показавшего, что отношение между геометрической длиной  $L$  и масштабом измерения  $\delta$  (детальностью объекта) может быть описано степенным законом  $L(\delta) = K\delta^{(1-D)}$ , где  $K$  — константа,  $D$  — фрактальная размерность. В исследованиях по изучению влияния детальности изображения на оценку длины морской береговой линии Ричардсон показал, что измеряемая длина береговой линии  $L$  увеличивается с ростом масштабного фактора  $\delta$  и соотношение данных характеристик определяется постоянным параметром [2], названным затем фрактальной размерностью. Зависимость  $L(\delta)$  получила название кривой Ричардсона и широко применяется в современной теории фракталов.

Фракталы представляют собой геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия. Самоподобие — это ключевое свойство фракталов, вытекающее из требования постоянства величины ФР (линейности кривой Ричардсона) на всех масштабах и во всех направлениях для действительно фрактальных поверхностей. Однако было показано [3], что вычисленные значения ФР в большинстве природных явлений не постоянны относительно масштаба, местоположения и/или ориентации. Кривые Ричардсона, построенные всеми

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-08-00060).

известными способами вычисления ФР для оптических изображений рельефа, не линейны и не строго самоподобны. В лучшем случае они могут быть статистически самоподобны в пределах ограниченного масштабного ряда. По мнению других исследователей [3], нехватка самоподобия не является ограничением к применению фрактальной теории для анализа оптических изображений, так как на линейных участках кривой Ричардсона возможно получение адекватных результатов оценки ФР.

Фракталы с большой точностью описывают многие физические объекты и явления реального мира: горы, облака, турбулентные течения, ветви и листья деревьев, кровеносные сосуды и т. д. В последние годы фракталы находят применение в различных областях науки и при решении прикладных задач: контроле за состоянием окружающей среды [3], исследовании механизмов разрушения материалов [4], анализе изображений поверхности Земли [5], распознавании геометрических образов [6], геофизике, медицине, экономике, компьютерной графике и т. д.

При решении большинства практических задач анализа и интерпретации оптических изображений основным оцениваемым параметром выступает ФР, позволяющая получать количественные характеристики объекта исследования. Например, анализ фрактальной размерности участков изображения рельефа позволяет выявлять наиболее опасные области деформируемого материала, на изображениях поверхности Земли — выделять поля текстурной однородности с последующей классификацией типов землепользования и т. д.

В настоящее время предложено множество методов оценки ФР оптических изображений, использующих два базовых подхода к вычислению ФР. Первый основывается на анализе изображения, а второй — на выделении контурных линий (т. е. части изображения) и оценке ФР для выделенных примитивов с последующим обобщением результата в рамках всего изображения.

Целью предлагаемой работы является исследование эффективности рассматриваемых методов на модельных изображениях с высокой степенью самоподобия и создание на основе полученных результатов оригинального алгоритма повышения точности оценки ФР без заметного увеличения вычислительной сложности. Для моделирования фрактальных поверхностей в работе используются наиболее известные генераторы изображений [7] и даются рекомендации по выбору наиболее эффективного алгоритма генерации.

**Алгоритмы генерации фрактальных изображений.** Для определения эффективности методов оценки ФР необходимо использовать модельные изображения с заранее заданными значениями фрактальной размерности  $D_g$ . Сравнение значений вычисленной ( $D$ ) и сгенерированной ФР позволяет выбрать наиболее точный метод оценки.

Фрактальное броуновское движение [2] является одним из самых популярных методов генерации фрактальных изображений с заданным значением ФР. На его основе создано несколько алгоритмов генерации фрактальных поверхностей. В данной работе исследованы три из них: алгоритмы фурье-фильтрации, смещений средней точки и угловых смещений.

*Алгоритм фурье-фильтрации* предложен в [8]. Спектральная функция  $P(f)$  для двумерной модели обобщенного броуновского движения  $Z$  связана с частотой  $f$  соотношением

$$P(f) \sim f^{-2(H+1)},$$

где  $H$  — параметр Херста,  $f = \sqrt{u^2 + v^2}$  ( $u$  и  $v$  — координаты точки изображения). Так как мы имеем дело с выборкой из дискретных точек (двумерный массив пикселей изображения), то выражение можно записать в виде

$$P(u, v) \sim (u^2 + v^2)^{-(H+1)}. \quad (1)$$

Спектральная функция  $P(f)$  связана с двумерным преобразованием Фурье следующим выражением:

$$P(u, v) = \frac{|X(u, v)|^2}{N}, \quad (2)$$

где  $X$  — дискретное преобразование Фурье для  $Z$ ;  $N$  — количество точек в  $X$ . Это преобразование должно удовлетворять (1) и (2):

$$|X(u, v)| \sim (u^2 + v^2)^{-(H+1)/2}. \quad (3)$$

Алгоритм фурье-фильтрации использует соотношение (3) и выражает комплексные коэффициенты Фурье через фильтрацию шума с равномерным распределением, определяемым функцией  $\text{gand}(\cdot) \in [0, 1]$ , как  $X(u, v) = r e^{i\theta}$ , где  $r = (u^2 + v^2)^{-(H+1)/2} \text{gand}(\cdot)$  и  $\theta = 2\pi \text{gand}(\cdot)$ . Здесь каждый элемент в  $X$  является комплексным числом с вектором, задаваемым функцией  $\text{gand}(\cdot)$ .

Алгоритм фурье-фильтрации учитывает симметрию преобразования Фурье, сокращая, таким образом, количество генерированных коэффициентов вдвое. После получения  $X$  через обратное дискретное преобразование Фурье генерируется  $Z$ .

*Алгоритм смещений средней точки* был предложен в работе [9]. Он стартует с генерации поверхности  $Z$  (изображения) со значениями яркости четырех угловых пикселей, генерируемых в соответствии с законом Гаусса  $N(\mu, \sigma^2)$ . Далее вычисляется значение среднего (центрального) пикселя поверхности путем усреднения угловых значений и случайное значение из гауссового распределения  $N(\mu, \sigma^2/2^H)$ . Этот процесс повторяется для каждой четверки полученных пикселей до тех пор, пока не достигается желаемое количество точек, формирующих искомое фрактальное изображение. Фрактальная размерность поверхности связана с параметром  $H$  соотношением

$$D = 3 - H. \quad (4)$$

*Алгоритм угловых смещений* впервые предложен в [6] и начинает работать с генерации поверхности  $Z$  с нулевыми значениями яркости пикселей. Затем случайным образом на поверхности рисуется последовательность прямых линий, концы которых вертикально смещаются, образуя форму «изломов». Направление и расположение линий определяется двумя независимыми случайными функциями. Амплитуда яркости в точке пересечения линий задается по закону распределения Пуассона, а значения углов пересечения естественным образом следуют равномерному закону распределения и лежат в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Количество вертикальных смещений зависит от параметра  $H$ , который находится из соотношения

$$E[Z_i - Z_{i+d}]^2 = |d|^{2H}, \quad (5)$$

где  $E[\cdot]$  — математическое ожидание изменения яркости между двумя точками поверхности  $Z_i$  и  $Z_{i+d}$ , лежащими на расстоянии  $d$  друг от друга, зависит от  $H$ . Фрактальная размерность генерированной поверхности вычисляется из (4).

**Методы оценки значений фрактальной размерности.** К настоящему времени разработан ряд различных методов измерения значений ФР, однако в литературе нет достаточных данных, чтобы обосновать выбор того или иного метода, поскольку погрешности известных алгоритмов измерения ФР при этом достоверно не изучены. При выборе метода расчета ФР можно создать поверхности с заранее заданными значениями ФР, но

проблема состоит в том, что эти поверхности генерируются с некоторым разбросом значений ФР, зависящим от применяемого алгоритма генерации. С другой стороны, амплитуды значений реальных массивов ограничены некоторыми предельными значениями.

В представленной работе созданы компьютерные программы расчета ФР методами треугольных призм, box-counting, вариаций, вариограмм, изаритм, итерационных покрытий, Пентланда и вероятностным методом, а также искусственные поверхности с помощью алгоритмов фурье-фильтрации, смещений средней точки и угловых смещений [7]. Для заданных значений ФР создавалось десять модельных изображений. Каждым из вышеперечисленных методов оценивались ФР этих изображений и находились средние значения, что позволило повысить точность измерения (расчета).

Модельное изображение можно рассматривать как двумерный объект, в каждой точке которого задана амплитуда сигнала, равная значению яркости реальных оптических изображений.

*Метод вариограмм.* Вариограммы представляют собой функции, описывающие перепады яркости изображения (высот поверхности в трехмерном случае) в зависимости от расстояния между двумя точками  $d_{pq}$ . Вариограммы широко используются в геостатистике как методика интерполяции пространственных данных [5]. Для любой непрерывной поверхности с фрактальной размерностью  $2 \leq D < 3$  математическое ожидание квадрата перепада высот (вариация) между двумя точками может быть вычислено из (5).

Параметр Херста  $0 \leq H < 1$  характеризует фрактальные свойства поверхности [10]: при больших значениях  $H$  она имеет более плавное распределение высот. Если вариация известна для множества пар точек, то ФР  $D$  может быть определена путем вычисления тангенса угла наклона  $B$  регрессионной кривой (вариации от расстояния), построенной в двойных логарифмических координатах, как  $D = 3 - H = 3 - B/2$ .

Пример метода вариограмм наглядно иллюстрирует связь между параметрами  $H$ ,  $D$  и степенью изрезанности поверхности, что видно из рис. 1. Так, для броуновского процесса  $H = 0,5$  ( $D = 2,5$ ) математическое ожидание вариации между двумя точками поверхности возрастает линейно в зависимости от расстояния между ними.

При  $H > 0,5$  вариация между соседними точками поверхности меньше, чем при броуновском процессе, но увеличивается экспоненциально и превышает значения вариации при броуновском процессе, когда  $d_{pq} > 1$ . С другой стороны, при  $H < 0,5$  вариация увеличивается для близких точек и остается почти постоянной для удаленных. Следовательно, при  $H > 0,5$  ( $D < 2,5$ ) поверхность выглядит более гладкой, в то время как при  $H < 0,5$  ( $D > 2,5$ ) она становится более неравномерной. При значениях  $H$ , близких к 0 ( $D \approx 3,0$ ),

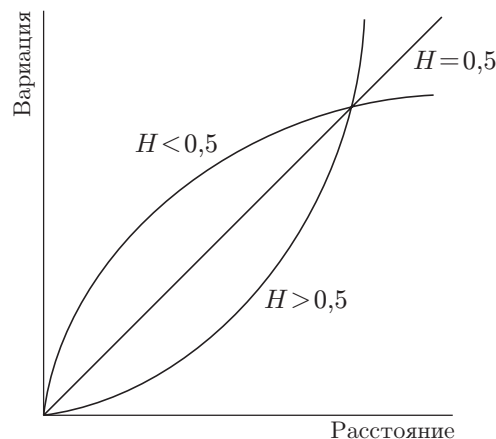


Рис. 1. Взаимосвязь между вариацией и расстоянием для разных значений  $H$

поверхность вырождается в белый шум, т. е. значения высот такой поверхности равномерно распределены по всему диапазону частот гистограммы.

*Метод треугольных призм* предложен в [11] и основывается на зависимости суммарной площади поверхности треугольных призм, каждая из которых определяется значениями высот четырех точек поверхности, отстоящих на расстоянии фиксированного целочисленного шага, от размера шага сетки, покрывающей поверхность.

В каждой ячейке сетки, состоящей из четырех точек, проводятся две диагонали. Из точки пересечения диагоналей восстанавливается перпендикуляр, высота которого вычисляется как среднее арифметическое значение высот точек основания. Строго говоря, плоскости треугольников в верхней части не параллельны плоскостям треугольников, лежащих в основании, поэтому такая фигура будет многогранником, а не призмой. Для всех треугольников в верхней части многогранника рассчитываем суммарную площадь, приблизительно равную площади поверхности. Последовательное повторение этой процедуры для других значений шага сетки позволяет построить регрессионную кривую (кривую Ричардсона) и вычислить значение ФР. Регрессионная кривая представляет собой зависимость логарифма оцененной площади поверхности от логарифма шага сетки.

Количество этапов метода зависит от изменения шага  $\delta_t$ , которое в различных модификациях может варьироваться. В работе [11] предложен диапазон изменений  $1 \leq \delta_t \leq M$ , где  $M \times M$  — размер изображения, следовательно, общее количество шагов равно  $M$ . Далее ФР вычисляется как  $D = 2 - B$ , где  $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой.

*Метод box-counting* предложен в работе [12]. В рамках этого метода изображение размером  $M \times M$ , как и в ряде других методов, рассматривается в трехмерном пространстве, где  $(x, y)$  — координаты пикселей изображения, а  $Z$ -координата определяется уровнем яркости соответствующего пикселя. Основание изображения разбивается на равномерную целочисленную сетку с размером квадрата  $s \times s$ , при этом выполняется соотношение  $M/2 \geq s > 1$ . На основании каждого такого квадрата строится столбец ячеек, имеющих форму параллелепипеда размером  $s \times s \times s'$ . Общее количество ячеек, содержащих не менее одного пикселя изображения поверхности, обозначим  $N_s$ . Если  $G$  — количество градаций яркости изображения, то  $s'$  можно вычислить из уравнения  $G/s' = M/s$ . Пусть минимальные и максимальные значения яркости в  $(i, j)$ -м узле сетки равны  $Z_{\min}$  и  $Z_{\max}$  соответственно. Тогда для каждой ячейки определим параметр  $n_s(i, j) = Z_{\max} - Z_{\min} + 1$ , обозначающий ее долю в общем объеме  $N_s$ . Суммируя параметры  $n_s(i, j)$  по всем узлам сетки, можно найти одно значение на регрессионной кривой при заданном значении размера ячейки:

$$N_s = \sum_{i,j} n_s(i, j). \quad (6)$$

Здесь  $N_s$  вычисляется для различных значений  $s$ , а  $s$  выбираются из условия  $s = 2^\gamma$ , где  $\gamma = 1, 2, \dots, \log(M) - 1$ . Отсюда ФР поверхности определяется как  $D = -B$  ( $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой  $\log(N_s)$  от  $\log(s)$ ).

*Вариационный метод* описан в [13]. Его идея заключается в поэтапной статистической оценке вариации  $V(\varepsilon)$  изображения размером  $M \times M$  с использованием метода «скользящего окна» радиуса  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, \log(M) - 1$ . На каждом этапе изображение сканируется в направлении слева направо и сверху вниз скользящим окном с нечетным размером стороны  $L_v$ , где  $L_v = 2\varepsilon + 1$ , и в каждой точке изображения в окрестности скользящего окна вычисляется вариация  $V_{i,j}$ , определяемая как разница между максимальным и минимальным значениями пикселя в окрестности окна. Статистическая оценка вариации всего

изображения определяется как

$$V(\varepsilon) = \sum_{i,j}^M \frac{V_{i,j}}{M \times M}.$$

Фрактальная размерность изображения вычисляется из  $D = 3 - B$ , где  $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой зависимости  $\log V(\varepsilon)$  от  $\log(\varepsilon)$ .

*Метод изаритм* [3] основан на предположении, что численную оценку ФР поверхности изображения можно получить исходя из фрактальных оценок его контурных изолиний (линий равных значений яркости) — изаритм. Реализация метода оценки ФР поверхности начинается с построения серии изаритм, расположенных друг от друга на расстоянии заданного интервала. Далее для каждой изаритмы оценивается ее ФР  $D$  — параметр, вычисляемый через уравнение регрессионной прямой

$$\log(L_i) = C + B \log(F),$$

где  $L_i$  — длина изаритмы при текущем шаге  $F$  (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...);  $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой;  $C$  — константа. Длина каждой изаритмы оценивается последовательно с разным шагом  $F$ , измеряемым в пикселях. Количество шагов подбирается эмпирически и напрямую влияет на точность оценки параметра  $D$ , который вычисляется как

$$D = 1 - B. \quad (7)$$

Чем больше размер шага, используемого для вычисления длины изаритмы, тем меньше ее длина. Это, в свою очередь, приводит к получению отрицательного тангенса угла наклона  $B$  регрессионной кривой. Так, для прямолинейной линии угол  $B$  всегда будет нулевым. Для бесконечно сложной кривой значение  $B$  будет отрицательным и равным  $-1$ . Уравнение (7) ограничивает диапазон значений ФР  $D$  произвольной кривой в диапазоне от 1 до 2. Используя подобную логику, можно показать, что фрактальная размерность  $D$  произвольной поверхности лежит в диапазоне от 2 до 3.

Параметр  $D$  поверхности вычисляется как параметр кривой  $+1$ , т. е.

$$D = 2 - B. \quad (8)$$

Таким образом, в ходе реализации метода для каждой изаритмы оценивается свое значение ФР по уравнению (8). Фрактальная размерность всей поверхности изображения вычисляется путем усреднения значений ФР всех изаритм.

*Метод Пентланда.* В работе [14] был предложен сравнительно простой метод оценки ФР  $D$  изображения (поверхности) размером  $M \times M$  с использованием следующего выражения:

$$E(\Delta^2 z) = c[\Delta^H d]^2, \quad (9)$$

где  $E$  — математическое ожидание;  $\Delta z$  — значение перепада яркости;  $\Delta d$  — пространственное расстояние между пикселями;  $c$  — масштабный коэффициент. Пусть  $k = E(|\Delta z|)_{\Delta d=1}$ , тогда с учетом  $H = 3 - D$  выражение (9) преобразуется к следующему виду:

$$E(|\Delta z|) = k(\Delta d)^H. \quad (10)$$

Прологарифмируем обе части выражения (10):

$$\log E(|\Delta z|) = \log k + H \log(\Delta d).$$

Параметр  $H$  можно найти из оценки угла наклона регрессионной кривой для зависимости  $GD(k)$ , где  $1 \leq k \leq N$  и значения функции  $GD(k)$  согласно Пентланду [13] вычисляются по формуле

$$GD(k) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-k-1} |I(i, j) - I(i, j+k)| + \sum_{i=1}^{N-k-1} \sum_{j=1}^N |I(i, j) - I(i+k, j)|}{2N(N-k-1)},$$

где  $I(i, j)$  — функция яркости пикселя изображения с координатами  $i$  и  $j$ . После оценки  $H$  фрактальная размерность вычисляется по (4).

*Метод итерационных покрытий* предложен в [15]. В его основе лежит процедура итерационного построения верхних  $U_\varepsilon(i, j)$  и нижних  $B_\varepsilon(i, j)$  покрытий поверхности изображения с оценкой ее площади  $S$  на каждом итерационном шаге  $\varepsilon$  и последующей оценкой ФР  $D$  как угла регрессионной кривой зависимости  $S(\varepsilon)$ .

Пусть  $I(i, j)$  — функция яркости пикселя с координатами  $i$  и  $j$  изображения размером  $M \times M$ . Исходные значения покрытий на шаге  $\varepsilon = 0$  задаются как  $U_\varepsilon(i, j) = B_\varepsilon(i, j) = I(i, j)$ , а для  $\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, \log(M) - 1$  определяются выражениями

$$U_\varepsilon(i, j) = \max \left\{ U_{\varepsilon-1}(i, j) + 1, \max_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} U_{\varepsilon-1}(m, n) \right\},$$

$$B_\varepsilon(i, j) = \min \left\{ B_{\varepsilon-1}(i, j) - 1, \min_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} B_{\varepsilon-1}(m, n) \right\}.$$

Площадь  $S(\varepsilon)$  поверхности изображения находится на каждом итерационном шаге  $\varepsilon$  на основе вычисленных верхнего и нижнего покрытий:

$$S(\varepsilon) = \frac{V_\varepsilon - V_{\varepsilon-1}}{2},$$

где  $V_\varepsilon$  определяется из выражения

$$V_\varepsilon = \sum_{i,j} (U_\varepsilon(i, j) - B_\varepsilon(i, j)).$$

Фрактальная размерность находится как  $D = 2 - B$ , где  $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой зависимости  $S(\varepsilon)$ .

*Вероятностный метод* вычисления фрактальной размерности представлен в работе [8]. Определим  $p(m_p, L_p)$  как вероятность того, что в куб размером  $L_p \times L_p \times L_p$ , центр которого находится в некоторой точке изображения, попадает  $m_p$  точек. Пусть  $N = L_p^2$  — максимально возможное количество точек, попадающих в куб, а  $N(L_p)$  — количество кубов, необходимых для заполнения всего изображения размером  $M \times M$ , вычисляемое как

$$N(L_p) = M^2 \sum_{m_p=1}^N 1/m_p p(m_p, L_p).$$

Для оценки  $p(m_p, L_p)$  используется процедура сканирования всего изображения «скользящим кубом» с нечетным размером стороны  $L_p$ , где  $L_p = 2\varepsilon + 1$ ,  $\varepsilon$  — радиус куба:  $\varepsilon = 1, 2, 3, \dots, \log(M) - 1$ . Для каждой точки изображения со значением пикселя  $z_0$  в окрестности скользящего куба подсчитывается количество попавших в куб точек  $m_p$ , удовлетворяющих условию  $z - (\varepsilon - 1)/2 \leq z_0 \leq z + (\varepsilon - 1)/2$ .

В процессе сканирования изображения скользящим кубом определяется количество кубов, содержащих  $m_p = 1, 2, 3, \dots$  точек. Вероятность  $p(m_p, L_p)$  вычисляется как отношение количества кубов, содержащих  $m_p$  точек, к общему количеству кубов. Процедура сканирования выполняется для всех  $L_p$ , и на каждом этапе оцениваются значения  $p(m_p, L_p)$  с последующим вычислением  $N(L_p)$ .

После оценки  $N(L_p)$  для всех  $L_p$  фрактальная размерность изображения определяется как  $D = -B$ , где  $B$  — тангенс угла наклона регрессионной кривой зависимости  $\log(N(L_p))$  от  $\log(L_p)$ .

**Результаты исследования методов оценки фрактальной размерности.** Каждый из рассмотренных выше методов оценки ФР имеет свои характеристики точности и вычислительной сложности. Их соотношение является важным критерием выбора соответствующего метода для практического применения. Для решения различных прикладных задач в данной работе проведено исследование основных характеристик предложенных методов, реализованных в среде математического пакета Mathcad™.

Для исследования рассмотренных методов было создано 270 модельных изображений с заранее заданными значениями ФР. Размер изображений составлял  $512 \times 512$  пикселей при 256 градациях серого. Значения ФР  $D_g$  задавались в диапазоне  $2,1 \leq D_g \leq 2,9$  с шагом  $\Delta D_g = 0,1$ . При создании изображений использовались три алгоритма генерации фрактальных поверхностей: алгоритмы угловых смещений, фурье-фильтрации и смещений средней точки. Для каждого заданного значения ФР создавалось 10 модельных изображений, а результаты оценки ФР полученных изображений усреднялись.

Экспериментальные результаты оценки вычислительной сложности представлены в виде графиков зависимости времени ( $t$ ), затраченного на оценку ФР, от размера модельного изображения ( $M$ ) в пикселях (рис. 2,  $a, b$ ). Видно, что наиболее затратными являются вероятностный и вариационный методы, а наиболее быстрыми — методы треугольных призм, Пентланда и box-counting.

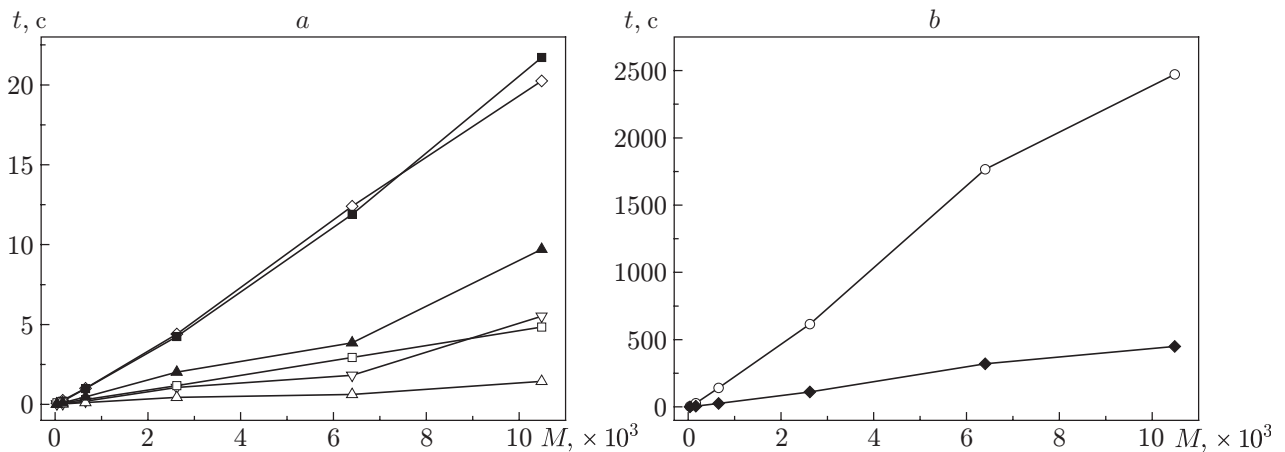


Рис. 2. Вычислительная сложность методов оценки ФР:  $a$  — итерационных покрытий ( $\diamond$ ), box-counting ( $\nabla$ ), изаритм ( $\blacksquare$ ), Пентланда ( $\square$ ), треугольных призм ( $\triangle$ ), вариограмм ( $\blacktriangle$ );  $b$  — вероятностного ( $\circ$ ), вариационного ( $\blacklozenge$ )



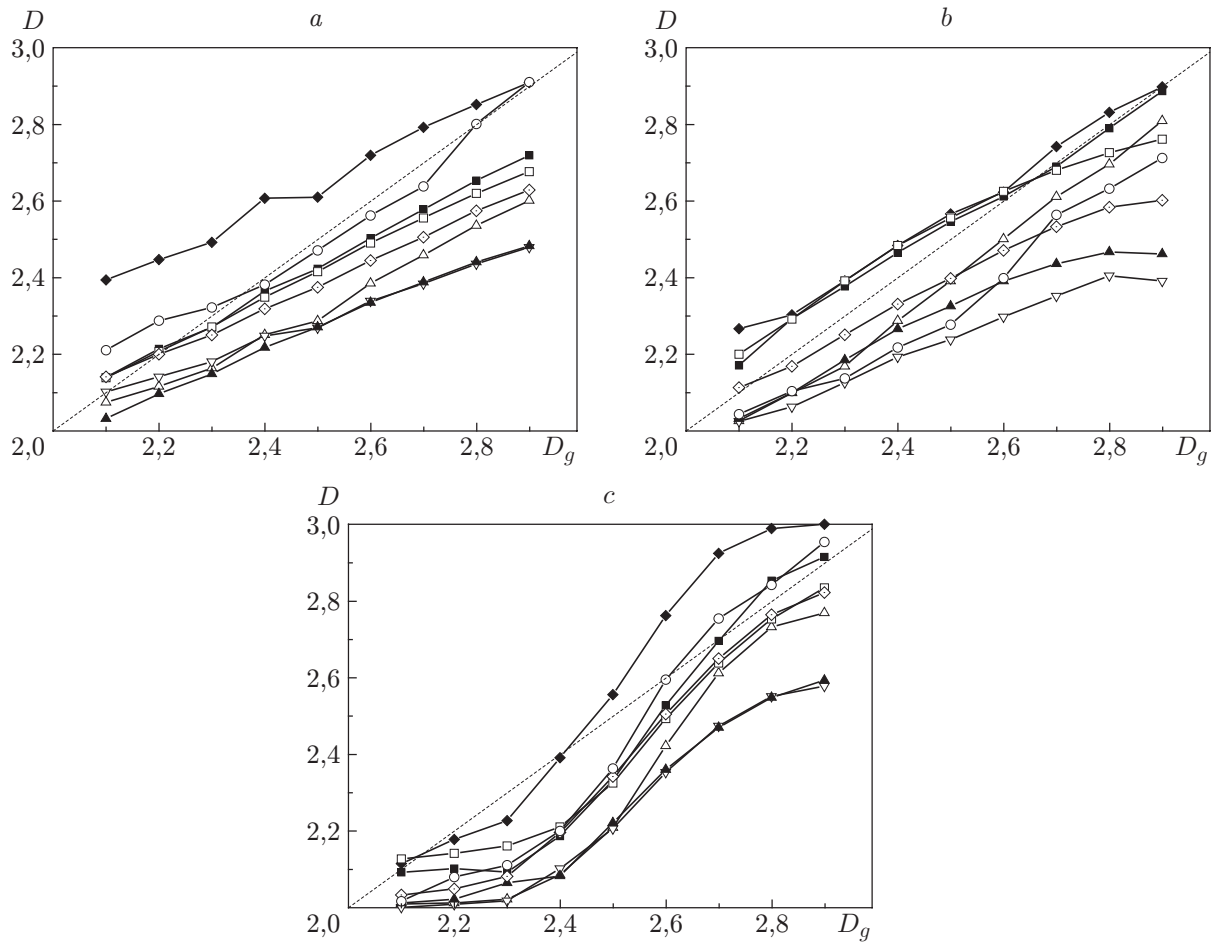


Рис. 3. Зависимости средних значений ФР  $D$  от заданных значений  $D_g$  для изображений, полученных методами: фурье-фильтрации (а), смещений средней точки (б) и угловых смещений (с) (обозначения кривых, как на рис. 2)

Результаты исследования точности методов оценки ФР показаны на рис. 3, а – с в виде зависимостей средних значений ФР  $D$ , рассчитанных методами box-counting, треугольных призм, вариаций, вариограмм, изаритм, вероятностного, Пентланда и итерационных покрытий, от заранее заданных значений ФР  $D_g$  модельных изображений. Кривые на рисунке, в сущности, представляют собой градуировочные зависимости. С точки зрения времени расчета все три метода генерации являются приблизительно эквивалентными. Затруднения в выборе генератора фрактальной поверхности и метода измерения ФР связаны с тем, что, несмотря на предпринимаемые попытки, до сих пор не существует идеальных генераторов и методов оценки.

Выбор генератора определяется его наибольшей точностью и удобством в работе. Видно, что градуировочные зависимости для метода угловых смещений имеют нелинейный S-образный вид и это ограничивает его использование. Для метода смещений средней точки ряд зависимостей  $D(D_g)$  также имеет нелинейный и даже неоднозначный характер. Наиболее подходящим для создания фрактальных изображений является алгоритм фурье-фильтрации, поскольку все кривые  $D(D_g)$  могут быть хорошо аппроксимированы линейными зависимостями.

Критерием качества как метода измерения ФР, так и алгоритма генерации фракталь-

ных поверхностей является условие

$$D = D_g. \quad (11)$$

Максимальной точностью обладают те методы оценки ФР, кривые  $D(D_g)$  которых проходят наиболее близко к линии  $D = D_g$  или совпадают с ней. Видно, что метод вариограмм переоценивает значения  $D_g$ , в то время как методы вариаций, треугольных призм, box-counting, изаритм и Пентланда, напротив, недооценивают значения ФР практически во всем диапазоне ее изменения. Высокой точностью обладает вероятностный метод, однако его практическая применимость ограничена значительным временем расчета (см. рис. 2). Он может быть выбран только при высоких требованиях к погрешности измерения (расчета) ФР, но и в этом случае абсолютная погрешность может достигать уровня 0,05–0,10.

Результаты исследований показывают, что наиболее эффективными методами оценки ФР по критерию соотношения точности и вычислительной сложности являются методы изаритм и Пентланда. Однако при высоких требованиях к точности оценки ФР их пределы применимости ограничены областью небольших значений ФР ( $D_g \leq (2,4 - 2,5)$ ).

**Увеличение точности оценки фрактальной размерности.** Для повышения точности оценки ФР в данной работе предложен оригинальный алгоритм. Идея заключается в аппроксимации некоторой градуировочной кривой (см. рис. 3, *a*) линейной зависимостью (например, методом наименьших квадратов) и ее последующем линейном преобразовании к идеальной прямой  $D = D_g$ . Пусть  $i$ -я аппроксимирующая прямая  $D_i(D_g)$  описывается формулой  $D_i = A_i D_g + B_i$ , где  $A_i, B_i$  — некоторые коэффициенты, соответствующие  $i$ -му номеру метода оценки ФР;  $D_i$  — значения ФР, рассчитанные  $i$ -м методом. Обозначим близкое к истинному значение ФР изображения, оцененное  $i$ -м методом, как  $d_i$ . Для нахождения  $d_i$  над этой кривой выполним линейное преобразование:  $d_i = D_i/A_i - B_i/A_i$ . Вычисленное значение  $d_i$  будем называть скорректированным значением ФР для  $i$ -го метода оценки.

Влияние линейного преобразования на точность оценки ФР изображения для каждого из рассмотренных выше методов показано на рис. 4. Видно, что данный подход наилучшим образом работает для методов, исходные кривые оценки ФР которых имеют более линейный характер.

Результаты возрастания точности оценки ФР методами изаритм и Пентланда после линейных преобразований отражены на рис. 5, *a, b*.

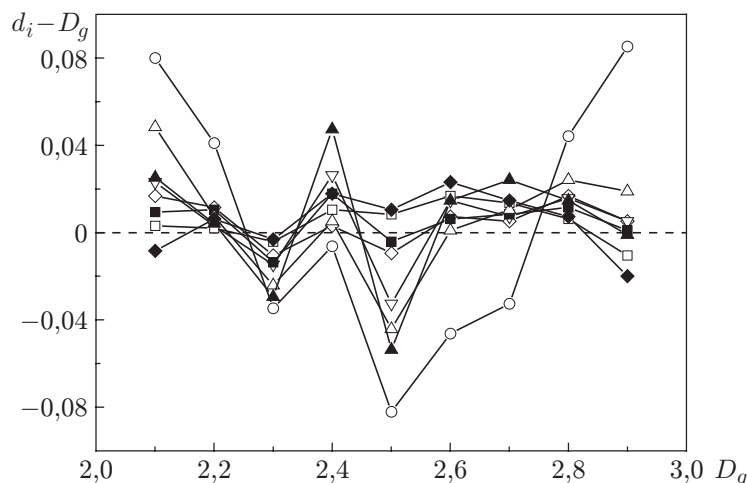


Рис. 4. Зависимости ошибки расчета от заданного значения ФР после линейного преобразования (обозначения кривых, как на рис. 2)

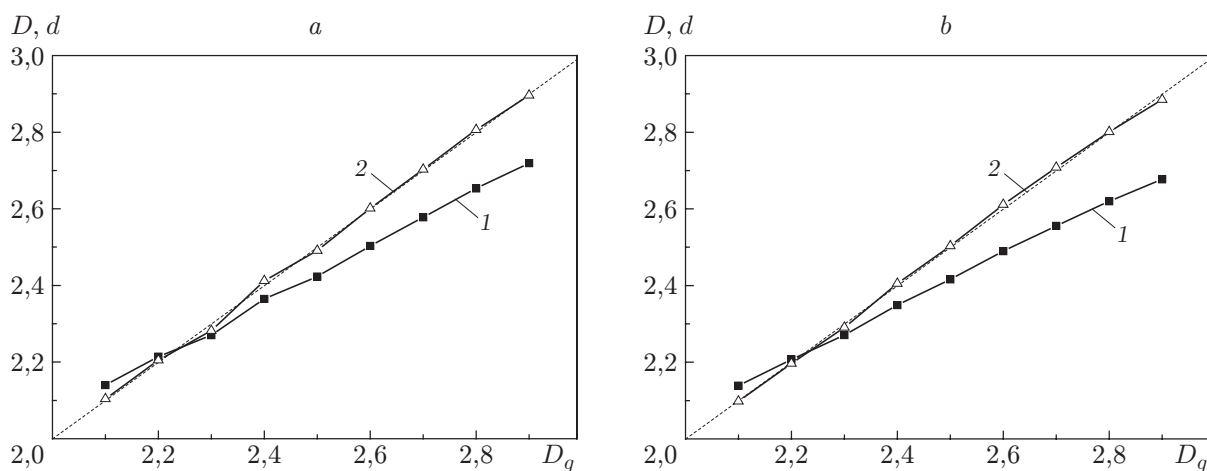


Рис. 5. Зависимости измеренных значений ФР от заданных значений до (кривая 1 ( $D$ )) и после (кривая 2 ( $d$ )) линейного преобразования: с использованием методов изаритм ( $a$ ) и Пентланда ( $b$ )

**Заключение.** В данной работе проведен анализ наиболее известных методов оценки фрактальной размерности. На примере модельных изображений с высокой степенью самоподобия, созданных с помощью известных генераторов на основе алгоритмов фурье-фильтрации, угловых смещений и смещений средней точки, исследованы точность и вычислительная сложность рассмотренных методов оценки ФР. Показано, что наиболее эффективным по точности является вероятностный метод, а по критерию соотношения точности и вычислительной сложности — методы изаритм и Пентланда. Предложен оригинальный алгоритм согласования результатов, полученных различными методами, и, как следствие, увеличения точности оценки фрактальной размерности изображений путем линейного преобразования.

Данные результаты могут найти широкое практическое применение при решении задач измерения фрактальной размерности оптических изображений в различных научно-прикладных областях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сидорова В. С.** Оценка качества классификации многоспектральных изображений гистограммным методом // Автометрия. 2007. **43**, № 1. С. 37–43.
2. **Mandelbrot B. B.** The Fractal Geometry of Nature. N. Y.: W. H. Freeman and Company, 1982. 480 p.
3. **Sun W., Hu G., Gong P., Liang S.** Fractal analysis of remotely sensed images: A review of methods and applications // Intern. Journ. Remote Sensing. 2006. **27**, N 22. P. 4963–4990.
4. **Шанявский А. А.** Безопасное усталостное разрушение элементов авиаконструкций. Синергетика в инженерных приложениях. Уфа: Монография, 2003. 803 с.
5. **De Jong S. M., Burrough P. A.** A fractal approach to the classification of Mediterranean vegetation types in remotely sensed images // Photogrammetric Eng. and Remote Sensing. 1995. **61**, N 8. P. 1041–1053.
6. **Mandelbrot B. B.** Fractals: Form, Chance and Dimension. San-Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977. 365 p.
7. **Zhou G., Lam N. S.-N.** A comparison of fractal dimension estimators based on multiple surface generation algorithms // Comput. and Geosci. 2005. **31**, N 10. P. 1260–1269.

8. **Voss R. F.** Fractals in nature: from characterization to simulation // The Science of Fractal Images. N. Y.: Springer-Verlag, 1988. P. 21–70.
9. **Saupe D.** Algorithms for random fractals // Ibid. P. 71–113.
10. **Shelberg M. C., Lam N. S.-N., Moellering H.** Measuring the fractal dimension of surface // Proc. of the 6th Intern. Symp. on Computer-assisted Cartography (Auto-Carto'6). Ottawa, Canada, 1983. Vol. 2. P. 319–328.
11. **Clarke K. C.** Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method // Comput. and Geosci. 1986. **12**, N 5. P. 713–722.
12. **Chaudhuri B. B., Sarkar N., Kundu P.** Improved fractal geometry based texture segmentation technique // Proc. IEE Pt. E. 1993. **140**, N 5. P. 233–241.
13. **Dubuc B., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S. W.** The variation method: a technique to estimate the fractal dimension of surfaces // Proc. SPIE. Visual Commun. and Image Process. 1987. **845**. P. 241–248.
14. **Pentland A. P.** Fractal-based description of natural scenes // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1984. **6**, N 6. P. 661–674.
15. **Peleg S., Naor J., Hartley R., Avnir D.** Multiple resolution texture analysis and classification // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1984. **6**, N 4. P. 518–523.

*Поступила в редакцию 24 августа 2009 г.*

---