

УДК 621.39.1 : 519.27; 621.382.5

**ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ  
ПАРАМЕТРОВ СЛАБЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ  
ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ  
ПУТЁМ ФИКСАЦИИ МОМЕНТОВ ЭМИССИИ  
ФОТОЭЛЕКТРОНОВ**

**В. С. Соболев, С. В. Хабаров**

*Учреждение Российской академии наук  
Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
E-mail: sobolev@iae.nsk.su*

Получена функция правдоподобия для оценки параметров слабых оптических сигналов при детектировании путём фиксации моментов эмиссии каждого фотоэлектрона. На примере оптимальных оценок параметров гауссова импульса найдены и решены уравнения правдоподобия. Получены выражения для совместных и несовместных оценок всех трёх неизвестных параметров импульса. Найдены также аналитические выражения для границ Рао — Крамера, определяющих качество получаемых оценок. Показано, что дисперсии совместных оценок амплитуды сигнала в 3 раза больше, чем несовместных, а дисперсии оценок всех параметров обратно пропорциональны произведению амплитуды сигнала на его длительность.

*Ключевые слова:* оптические сигналы, максимально правдоподобные оценки, границы Рао — Крамера.

**Введение.** Получение оптимальных по точности оценок параметров оптических сигналов является основой эффективной работы систем световолоконной связи, лазерной локации, CD- и DVD-памяти, лазерной доплеровской анемометрии и достоверности результатов научного эксперимента. Стандартным решением этой проблемы является фотодетектирование и последующая электронная или компьютерная обработка получаемых электрических сигналов. Главное препятствие на этом пути — присутствие помех, основными из которых являются неизбежные, по крайней мере в настоящее время, дробовые шумы. Потенциальные возможности «сжатого» света пока далеки от реализации. Задача получения точных оценок параметров оптических сигналов очень сильно отличается от ситуации в радиосвязи и радиолокации, где сопровождающие сигнал шумы независимы. Разница состоит в том, что статистические характеристики дробового шума тесно связаны с самим оптическим сигналом: дисперсия шума пропорциональна самому сигналу. Это означает, что весь богатый арсенал готовых решений, полученный ранее, не может быть использован напрямую.

Проблема оптимального приёма оптических сигналов остро встала в конце прошлого века в связи с бурным развитием лазерной техники, с одной стороны, и успехами оптоэлектроники — с другой, когда характеристики фотодетекторов настолько улучшились, что основной помехой стал дробовой шум. Оптимальным оценкам посвящён ряд работ [1–6]. В монографиях [1–3] рассматриваются общие вопросы квантово-механического описания оптических полей и проблема оптимального приёма решается как обратная задача математической физики, связанная «с выяснением причин явлений по их наблюдаемым следствиям» [3]. В этом плане их можно считать теоретической основой для решения конкретных задач оптимального приёма оптических сигналов. Публикации [4, 5] посвящены

в основном вопросам борьбы с влиянием турбулентной атмосферы на качество оптической связи. Наиболее близкой к предлагаемой работе является [6], где также оцениваются параметры гауссова оптического импульса, но в случае независимого нормального шума.

Цель представленной работы — найти алгоритмы получения оптимальных по точности оценок параметров слабых оптических сигналов при их адекватном фотодетектировании путём фиксации моментов эмиссии каждого фотоэлектрона и вывести выражения для определения границ Рао — Крамера, характеризующих минимальные погрешности этих оценок. Задача решается на примере фотодетектирования оптического видеоимпульса гауссовой формы с амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau$  и положением на оси времени  $t_0$ . Гауссова форма выбрана из соображений, что такие импульсы широко применяются на практике и, кроме того, их форма позволила получить явные аналитические выражения для оценок и границ Рао — Крамера. Содержание данной работы дополняет [7], где те же задачи решаются для случая фотодетектирования с помощью счётчика фотоэлектронов.

В большинстве практических случаев априорное распределение плотностей вероятности значений перечисленных выше оцениваемых параметров неизвестно, поэтому критерием оптимальности оценок принято достижение максимума совместной плотности вероятности, получаемого на выходе фотодетектора электрического сигнала, — функции правдоподобия.

#### Совместная плотность вероятности значений фотоэлектрических сигналов.

Как указывалось выше, задача получения оптимальных оценок решается на примере приёма слабых оптических сигналов, когда адекватным способом фотодетектирования является фиксация моментов эмиссии каждого фотоэлектрона.

Полезная информация о параметрах оптического сигнала в этом случае заключена в значениях промежутков времени между «одноэлектронными» импульсами. В соответствии с теорией фотодетектирования вероятностные характеристики потока одноэлектронных импульсов в данной ситуации подчиняются статистике Пуассона и плотность вероятности промежутков между импульсами  $\Delta t$  определяется [8] как

$$P(\Delta t, t_i) = \lambda(t_i) \exp \left[ - \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \lambda(t) dt \right], \quad (1)$$

где  $\lambda(t) = \frac{\kappa I(t)}{h\nu}$  — скорость эмиссии фотоэлектронов (детерминированная функция, пропорциональная интенсивности излучения  $I(t)$ ),  $\kappa$  — квантовая эффективность детектора,  $h\nu$  — энергия кванта света;  $t_i$  — момент эмиссии фотоэлектрона.

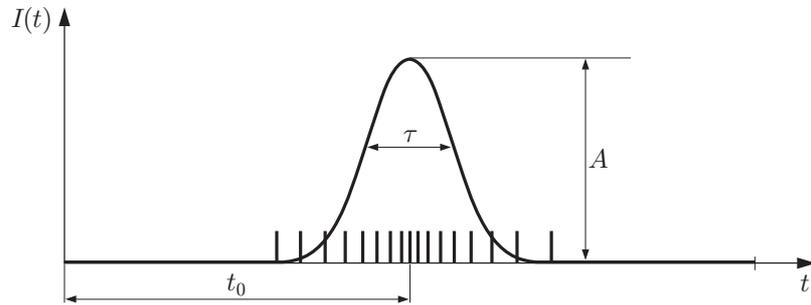
Функция совместной плотности вероятности моментов эмиссии фотоэлектронов (функция правдоподобия) в силу статистической независимости актов эмиссии будет определяться следующим произведением:

$$P(t_1, t_2, \dots, t_N) = \prod_{i=2}^N \lambda(t_{i-1}) \exp \left[ - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t) dt \right], \quad (2)$$

где  $N$  — общее число эмитированных фотоэлектронов.

**Оптимальные оценки на примере гауссова импульса.** Как отмечалось выше, задача оптимальных оценок в данной работе решается для оптического импульса гауссовой формы с интенсивностью

$$I(t_i) = A_0 \exp \left( - \frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^2} \right). \quad (3)$$



С учётом этого функция  $\lambda(t)$  примет вид

$$\lambda(t_i) = A \exp\left(-\frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^2}\right), \quad A = \frac{A_0 \kappa}{h\nu}. \quad (4)$$

График функции и соответствующий поток фотоэлектронов представлены на рисунке.

Для того чтобы получить систему уравнений правдоподобия, необходимо найти логарифм функции правдоподобия, затем вычислить производную этой функции по каждому из неизвестных параметров и приравнять её к нулю.

В соответствии с выражением (2) логарифм функции правдоподобия примет вид

$$\ln P(t_1, t_2, \dots, t_N) = \sum_{i=2}^N \left( \ln \lambda(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t) dt \right). \quad (5)$$

Отметим при этом, что

$$\sum_{i=2}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t) dt = \int_{t_1}^{t_N} \lambda(t) dt \cong \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) dt. \quad (6)$$

В случае гауссова импульса интеграл (6) будет равен  $\sqrt{\pi} A \tau$ . Здесь учтено, что время измерения выбрано существенно бóльшим, чем длительность импульса.

Производная логарифма функции правдоподобия по неизвестному параметру  $x$  выражается как

$$\frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial x} = \sum_{i=2}^N \frac{\partial \ln \lambda(t_{i-1})}{\partial x} - \frac{\partial(\sqrt{\pi} A \tau)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\lambda'(t_i)}{\lambda(t_i)} - \frac{\partial(\sqrt{\pi} A \tau)}{\partial x}. \quad (7)$$

Производная по амплитуде  $A$  и соответствующее уравнение правдоподобия примут вид

$$\frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial A} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{A} - \sqrt{\pi} \tau \cong \frac{N}{A} - \sqrt{\pi} \tau, \quad (8)$$

$$\frac{N}{A} - \sqrt{\pi} \tau = 0. \quad (9)$$

Производная по длительности импульса  $\tau$  и соответствующее уравнение запишутся как

$$\frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{N-1} \left( 2 \frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^3} \right) - \sqrt{\pi} A, \quad (10)$$

$$\frac{2 \sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_0)^2}{\tau^3} - \sqrt{\pi} A = 0. \quad (11)$$

Производная по  $t_0$  и соответствующее уравнение примут вид

$$\frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial t_0} = \sum_{i=1}^{N-1} \left( 2 \frac{(t_i - t_0)}{\tau^2} \right), \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_0) = 0. \quad (13)$$

Теперь, решая уравнения (9), (11), (13) отдельно для каждого неизвестного параметра при условии, что остальные известны, получим выражения для оптимальных по точности несовместных оценок всех трёх неизвестных параметров гауссова оптического импульса:

$$A = \frac{N}{\sqrt{\pi} \tau}, \quad (14)$$

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{2 \sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_0)^2}{\sqrt{\pi} A}}, \quad (15)$$

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}. \quad (16)$$

Отметим, что оценка амплитуды пропорциональна общему числу принятых одноэлектронных импульсов и выражается в числе фотоэлектронов в секунду (по существу, это максимальная скорость эмиссии фотоэлектронов). Если необходимо выразить её в единицах интенсивности оптического сигнала (ваттах), то выражение (14) следует умножить на величину  $\frac{h\nu}{\kappa}$ .

Решая систему вышеперечисленных уравнений в предположении, что все три параметра сигнала неизвестны, получаем совместные оценки:

$$A = \frac{N\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi \sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_0)^2}}, \quad (17)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^{N-1} (t_i - t_0)^2}{N}}, \quad (18)$$

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}. \quad (19)$$

**Определение границ Рао — Крамера.** В соответствии с теорией оценивания [9] границы Рао — Крамера определяются диагональными элементами корреляционной матрицы ошибок, которая обратна информационной матрице Фишера. Элементы матрицы Фишера задаются формулой

$$F_{\lambda\mu} = \left\langle \frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial L(\mu)}{\partial \mu} \right\rangle, \quad (20)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — неизвестные параметры. Принимая во внимание (8), найдём первую компоненту матрицы Фишера:

$$\begin{aligned} F(AA) &= \left\langle \left( \frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial A} \right)^2 \right\rangle \cong \left\langle \left( \frac{N}{A} - \sqrt{\pi}\tau \right)^2 \right\rangle = \frac{\langle N^2 \rangle}{A^2} - 2 \frac{\langle N \rangle}{A} \sqrt{\pi}\tau + \pi\tau^2 = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}A\tau + (\sqrt{\pi}A\tau)^2}{A^2} - \frac{2\sqrt{\pi}A\tau}{A} \sqrt{\pi}\tau + \pi\tau^2 = \frac{\sqrt{\pi}\tau}{A}. \end{aligned} \quad (21)$$

Это выражение получено исходя из известного соотношения для пуассоновских процессов

$$\langle N^2 \rangle = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \quad (22)$$

с учётом того, что

$$\langle N \rangle = \sqrt{\pi}A\tau, \quad (23)$$

$$\langle N^2 \rangle = \sqrt{\pi}A\tau + (\sqrt{\pi}A\tau)^2. \quad (24)$$

Для нахождения остальных элементов матрицы Фишера необходимо знать моменты величины  $\sum_{i=1}^N (t_i - t_0)$ . Легко показать, что

$$\left\langle \sum_{i=1}^N (t_i - t_0) \right\rangle = 0; \quad \left\langle \left[ \sum_{i=1}^N (t_i - t_0) \right]^3 \right\rangle = 0, \quad (25)$$

$$\left\langle \left[ \sum_{i=1}^N (t_i - t_0) \right]^2 \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi}A\tau^3}{2}, \quad (26)$$

$$\left\langle \left[ \sum_{i=1}^N (t_i - t_0) \right]^4 \right\rangle = 3 \frac{\sqrt{\pi} A \tau^5}{4} + \frac{\pi A^2 \tau^6}{4}. \quad (27)$$

Используя выражения (20), (8), (10), (12) и полученные равенства (25)–(27), находим все элементы матрицы Фишера:

$$\left\langle \left( \frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle = \frac{3\sqrt{\pi} A}{\tau}, \quad (28)$$

$$\left\langle \left( \frac{\partial \ln P(t_1, t_2, \dots, t_N)}{\partial t_0} \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^N \left( 2 \frac{(t_i - t_0)}{\tau^2} \right)^2 = \frac{2\sqrt{\pi} A}{\tau}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial A} \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial \tau} \right\rangle &= \left\langle \left( \frac{N}{A} - \sqrt{\pi} \tau \right) \left( \sum_{i=1}^N \left( 2 \frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^3} \right) - \sqrt{\pi} A \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \left( \frac{N}{A} - \sqrt{\pi} \tau \right) \sum_{i=1}^N \left( 2 \frac{(t_i - t_0)^2}{\tau^3} \right) \right\rangle = \frac{2 \left\langle N \sum_{i=1}^N (t_i - t_0)^2 \right\rangle}{A \tau^3} - \frac{\sqrt{\pi} \tau \sqrt{\pi} A \tau^3}{\tau^3} = \\ &= \pi A \tau + \sqrt{\pi} - \pi A \tau = \sqrt{\pi}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left\langle \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial A} \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial t_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial \tau} \frac{\partial \ln P(t_1, \dots, t_N)}{\partial t_0} \right\rangle = 0. \quad (31)$$

Тогда матрица Фишера и обратная ей примут следующий вид:

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} A & \tau & t_0 \\ \frac{\sqrt{\pi} \tau}{A} & \sqrt{\pi} & 0 \\ \sqrt{\pi} & \frac{3\sqrt{\pi} A}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{\pi} A}{\tau} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ \tau, \\ t_0 \end{matrix} \\ F^{-1} &= \begin{bmatrix} A & \tau & t_0 \\ \frac{3A}{2\sqrt{\pi} \tau} & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & \frac{\tau}{2\sqrt{\pi} A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{2\sqrt{\pi} A} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ \tau. \\ t_0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Анализируя корреляционную матрицу, находим выражения для минимальных относительных среднеквадратичных ошибок несовместных оценок всех трёх параметров гауссова импульса:

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}A\tau}}, \quad (32)$$

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{3\sqrt{\pi}A\tau}}, \quad (33)$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}A\tau}}. \quad (34)$$

Для совместных оценок эти же величины будут иметь вид

$$\frac{\sigma_A}{A} = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{\pi}A\tau}}, \quad (35)$$

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}A\tau}}, \quad (36)$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}A\tau}}. \quad (37)$$

Из выражений (32)–(37) видно, что, во-первых, относительная ошибка в оценке амплитуды для совместных оценок в  $\sqrt{3/2}$  раз больше, чем для несовместных (это естественно, так как в последнем случае оценке подлежат все три неизвестных параметра); во-вторых, относительные ошибки всех трёх неизвестных параметров тем меньше, чем больше произведение амплитуды и длительности сигнала.

**Заключение.** В данной работе на примере оптимального приёма оптического гауссова импульса с пуассоновским распределением эмитированных фотоэлектронов выведены уравнения правдоподобия, найдены их аналитические решения для совместных и несовместных оценок всех трёх неизвестных параметров импульса и получены выражения для границ Рао — Крамера, определяющих качество получаемых оценок.

Результаты работы позволяют рассчитать наилучшие в смысле точности оценки параметров сверхслабых оптических сигналов и определить их качество. Выведенные уравнения правдоподобия открывают путь к оптимальным оценкам оптических сигналов любой формы. Учитывая то, что вопрос об оптимальном приёме слабых оптических сигналов остро стоит в современной науке и технике, начиная с таких областей, как световолоконная связь, оптическая локация, оптическая память, интерферометрия, лазерная доплеровская анемометрия и биомедицинская диагностика, можно надеяться, что полученные результаты попадут в резонанс с запросами специалистов указанных выше областей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шереметьев А. Г.** Статистическая теория лазерной связи. М.: Связь, 1971. 264 с.
2. **Курикша А. А.** Квантовая оптика и оптическая локация. М.: Сов. радио, 1973. 181 с.
3. **Теребиж В. Ю.** Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. 371 с.
4. **Saleh В. Е. А.** Estimation of the location of the optical object with photodetectors limited by quantum noise // Appl. Opt. 1974. **13**, N 8. P. 1824–1827.
5. **Xiaoming Z., Kahn J. M.** Free-space optical communication through atmospheric turbulence channels // IEEE Trans. Commun. 2002. **50**, N 8. P. 1293–1300.
6. **Hagen N., Kupinski M., Dereniak E. L.** Gaussian profile estimation in one dimension // Appl. Opt. 2007. **46**, N 22. P. 5374–5383.
7. **Соболев В. С., Полецук Ю. А.** Максимально правдоподобные оценки параметров оптических сигналов с учетом дробовых и фоновых шумов // Компьютерная оптика. 2006. № 30. С. 98–108.
8. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 365 с.
9. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1968. 499 с.

*Поступила в редакцию 18 февраля 2010 г.*

---