

## СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 62.50 : 539.3

### УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕВЁРНУТЫМ МАЯТНИКОМ С УЧЁТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Ю. Н. Золотухин, А. А. Нестеров

*Учреждение Российской академии наук  
Институт автоматизи и электрометрии Сибирского отделения РАН,  
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1  
E-mail: zol@idisys.iae.nsk.su*

Исследовано поведение шарнирно закреплённого на оси колеса перевёрнутого маятника. Предложен алгоритм, решающий как задачу стабилизации маятника в заданном относительно вертикали положении, так и задачу управления скоростью движения платформы, несущей маятник, в условиях диссипации энергии. Приведены рекомендации по выбору параметров системы управления, даны оценки времени переходных процессов.

*Ключевые слова:* перевёрнутый маятник, подвижная точка подвеса, управление положением, управление скоростью точки подвеса, диссипация энергии.

**Введение.** В связи с разработкой нового вида транспортных средств, представляющих собой двухколёсную пассажирскую платформу (системы типа Segway) [1], возродился интерес к классической задаче стабилизации положения перевёрнутого маятника с подвижной точкой подвеса [2–6]. В работе [2] рассматриваются проблемы управления автономным такси на базе двухколёсной платформы без штатного водителя. Предложена динамическая модель системы шестого порядка при ряде допущений, таких как представление платформы с пассажирами жёстким телом, пренебрежение проскальзыванием колёс, перемещение экипажа по относительно ровной поверхности. Выполнена идентификация модели. В [3] исследованы возможности управления моделью аппарата Segway, собранной из набора LEGO Mindstorms с использованием линеаризованной вблизи точки равновесия математической модели. Авторы [4] для изучения дистанционно управляемого аппарата Segway применяют упрощённую линейную модель и PID-регулятор. В [5] предложен самонастраивающийся PID-регулятор для управления движением двухколёсного робота, основанный на использовании нейронных сетей. В работе [6] рассмотрена система «маятник на колесе» для случая, когда маятник жёстко связан с ротором приводного двигателя, причём движение собственно колеса интереса не представляет. Исследованы условия и области управляемости маятника. В [7] описан алгоритм, решающий как задачу стабилизации маятника в заданном относительно вертикали положении, так и задачу стабилизации скорости платформы, несущей маятник.

В данной работе отражены результаты, являющиеся продолжением [7] в части влияния диссипации энергии на поведение системы. Дальнейшее изложение имеет следующую структуру. В разд. 1 представлена модель рассматриваемой системы, состоящей из маятника, шарнирно закреплённого на оси колеса. В разд. 2 предложен алгоритм стабилизации произвольного положения маятника, указаны пределы рабочей области, связанные с ограниченностью момента вращения колеса. В разд. 3 приведён алгоритм управления скоростью поступательного движения системы, одновременно обеспечивающий стабилизацию маятника в вертикальном положении. В разд. 4 представлены результаты моделирования в среде MATLAB-SIMULINK.

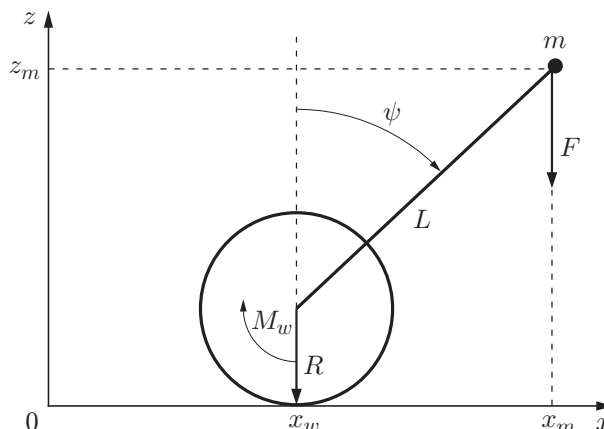


Рис. 1. Кинематическая схема:  $R$  — радиус колеса;  $L$  — расстояние от центра масс маятника до точки подвеса;  $(x_w, R)$  — координаты на плоскости  $(x, z)$  центра колеса;  $(x_m, z_m)$  — координаты центра масс маятника;  $M_w$  — момент вращения, приложенный к колесу;  $m$  — масса маятника;  $F = -mg$  — сила тяжести, приложенная к маятнику

**1. Модель.** Схема исследуемого устройства показана на рис. 1. Динамические параметры системы:  $J_w$  — момент инерции колеса,  $m_w$  — масса колеса. В качестве обобщённых координат механической системы удобно выбрать  $\psi$  — угол отклонения маятника от вертикали и  $\vartheta$  — угол поворота колеса. Будем считать, что колесо движется вдоль оси  $x$  без проскальзывания. В этом случае координаты колеса и маятника определяются через обобщённые координаты:

$$\begin{aligned} x_w &= R\vartheta; \\ x_m &= x_w + L \sin \psi = R\vartheta + L \sin \psi; \\ z_m &= R + L \cos \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Движение системы в обобщённых координатах описывается уравнениями Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} &= \frac{\delta A_\vartheta}{\delta \vartheta} - \frac{\partial R(\dot{\vartheta}, \psi)}{\partial \dot{\vartheta}}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= \frac{\delta A_\psi}{\delta \psi} - \frac{\partial R(\dot{\vartheta}, \psi)}{\partial \dot{\psi}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T(\psi, \vartheta, \dot{\psi}, \dot{\vartheta})$  — кинетическая энергия системы;  $\delta A_\psi$  и  $\delta A_\vartheta$  — элементарные работы внешних сил  $F$  и  $M_w$  по координатам  $\psi$  и  $\vartheta$  соответственно;  $R(\dot{\vartheta}, \dot{\psi})$  — диссипативная функция Рэлея, учитывающая влияние трения колеса и шарнира в точке подвеса. Здесь и далее производные по времени обозначаются точками над символами переменных. Кинетическая энергия системы является суммой энергии движения колеса  $T_w = \frac{1}{2}[J_w \dot{\vartheta}^2 + m_w \dot{x}_w^2]$  и энергии движения маятника  $T_m = \frac{1}{2}m[\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2]$ . Суммируя эти слагаемые с учётом (1), будем иметь

$$T = \frac{1}{2}[J_w \dot{\vartheta}^2 + m_w R^2 \dot{\vartheta}^2 + m R^2 \dot{\vartheta}^2 + m L^2 \dot{\psi}^2 + 2m L R \dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \psi]. \quad (3)$$

Для элементарных работ внешних сил получим

$$\begin{aligned}\delta A_{\vartheta} &= M_w \delta \vartheta; \\ \delta A_{\psi} &= -mg \delta z_m = mgL \delta \psi \sin \psi.\end{aligned}\tag{4}$$

Функцию Рэля определим в виде

$$R(\dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}(\gamma_{\vartheta} \dot{\vartheta}^2 + \gamma_{\psi} \dot{\psi}^2),\tag{5}$$

где  $\gamma_{\vartheta}$  и  $\gamma_{\psi}$  — соответствующие коэффициенты трения.

Подставляя (3)–(5) в (2) и разрешая полученные уравнения относительно вторых производных, будем иметь уравнения движения системы:

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= \frac{(J_w + (m_w + m)R^2)(mgL \sin \psi - \gamma_{\psi} \dot{\psi}) - (M_w + mL R \dot{\psi}^2 \sin \psi - \gamma_{\vartheta} \dot{\vartheta})mLR \cos \psi}{mL^2(J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi)}; \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{mL^2(M_w + mL R \dot{\psi}^2 \sin \psi - \gamma_{\vartheta} \dot{\vartheta}) - mL R \cos \psi(mgL \sin \psi - \gamma_{\psi} \dot{\psi})}{mL^2(J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi)}.\end{aligned}\tag{6}$$

Для упрощения дальнейших преобразований введём обозначения:

$$\begin{aligned}f1(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}) &= \frac{(J_w + (m_w + m)R^2)(mgL \sin \psi - \gamma_{\psi} \dot{\psi}) - mL R \cos \psi(mL R \dot{\psi}^2 \sin \psi - \gamma_{\vartheta} \dot{\vartheta})}{mL^2(J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi)}; \\ f2(\psi) &= -\frac{R \cos \psi}{L(J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi)}; \\ f3(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}) &= \frac{L(mL R \dot{\psi}^2 \sin \psi - \gamma_{\vartheta} \dot{\vartheta}) - R \cos \psi(mgL \sin \psi - \gamma_{\psi} \dot{\psi})}{L(J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi)}; \\ f4(\psi) &= \frac{1}{J_w + m_w R^2 + mR^2 \sin^2 \psi}.\end{aligned}\tag{7}$$

С учётом этих обозначений из (6) получаем компактную форму уравнений движения исследуемой системы:

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} &= f1(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}) + f2(\psi)M_w; \\ \ddot{\vartheta} &= f3(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}) + f4(\psi)M_w.\end{aligned}\tag{8}$$

**2. Управление положением маятника.** Под управлением положением маятника будем понимать перевод маятника из текущего состояния  $\psi(t)$  в заданное состояние  $\psi_{\text{ref}}$  и при необходимости удержание его в этом состоянии. Для решения поставленной задачи в нашем распоряжении единственный управляющий параметр  $M_w$  — момент вращения, приложенный к колесу.

Очевидно, можно различными способами выбрать закон изменения момента  $M_w$ , решающий нашу задачу, и, значит, различные траектории перемещения маятника в заданное положение. Выберем желаемую траекторию в соответствии с законом:

$$\dot{\psi} + K(\psi - \psi_{\text{ref}}) = 0. \quad (9)$$

Реализация движения по траектории (9) гарантирует апериодическое движение маятника в заданное положение.

Однако в некоторый момент  $t$  угол  $\psi(t)$  может не удовлетворять уравнению (9). Следовательно, необходимо с помощью изменения момента  $M_w$  вывести систему на траекторию (9) и удерживать её на этой траектории до перехода в точку  $\psi = \psi_{\text{ref}}$ .

Оценим близость системы к траектории (9) функцией

$$S(t) = \dot{\psi}(t) + K(\psi(t) - \psi_{\text{ref}}) \quad (10)$$

и потребуем выполнения условия

$$\frac{d}{dt}(S^2(t)) \leq 0, \quad (11)$$

причём знак равенства в (11) допустим только при  $S(t) = 0$ . Выполнение условия (11) гарантирует перевод системы на траекторию (9) и удержание её на этой траектории.

Условие (11) допускает некоторый произвол при определении момента  $M_w$ . Поэтому ужесточим его, потребовав выполнения равенства

$$\frac{d}{dt}(S^2(t)) = -2\alpha S^2(t), \quad \alpha > 0. \quad (12)$$

Здесь параметр  $\alpha$  определяет скорость сходимости решения уравнения (12) к нулю:

$$S^2(t) = S^2(t_0) \exp(-2\alpha(t - t_0)), \quad (13)$$

где  $t = t_0$  — некоторое начало процесса управления.

Следует заметить, что при выполнении условия (12) функция  $S^2(t)$  удовлетворяет условиям Ляпунова [8] и гарантирует экспоненциально-устойчивый переход системы на траекторию (9).

Остаётся определить момент  $M_w(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})$ , гарантирующий выполнение условия (12).

Из (12) и (10) получим

$$\ddot{\psi} = -\alpha S - K\dot{\psi}$$

и, подставив  $\ddot{\psi}$  в первое уравнение (7), определим необходимый закон изменения момента  $M_w = M_w(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})$ :

$$M_w(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}) = -\frac{\alpha S(\psi, \dot{\psi}) + K\dot{\psi} + f1(\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi})}{f2(\psi)}. \quad (14)$$

Действительно, подстановка (14) в первое уравнение (7) приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\psi} + (\alpha + K)\dot{\psi} + \alpha K\psi = \alpha K\psi_{\text{ref}} \quad (15)$$

с собственными значениями  $\lambda_1 = -\alpha$ ,  $\lambda_2 = -K$ .

Очевидно, момент  $M_w(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta})$  можно трактовать как нелинейную обратную связь, преобразующую исходную систему в устойчивую линейную систему второго порядка.

До сих пор предполагалось, что значения момента  $M_w$  ничем не ограничены. Однако из (7) и (14) видно, что  $f2(\psi) \rightarrow 0$  и  $M_w \rightarrow \pm\infty$  при  $\psi \rightarrow \pm(\pi/2)$ . Отсюда следует, что при наличии ограничений на величину момента  $M_w$  требуется ограничивать диапазон возможных значений угла  $\psi$ .

Согласно (15) система приближается к точке равновесия  $\psi = \psi_{\text{ref}}$  с нулевой скоростью. Таким образом, для удержания маятника в положении  $\psi = \psi_{\text{ref}}$  необходимо в соответствии с (14) значение момента

$$M_w = -\frac{f1(\psi_{\text{ref}}, 0, \dot{\vartheta})}{f2(\psi_{\text{ref}})} = \frac{g}{R}(J_w + m_w R^2 + mR^2) \text{tg} \psi_{\text{ref}} + \gamma \dot{\vartheta}. \quad (16)$$

Если абсолютное значение момента ограничено величиной  $M_w^0$ , т. е.  $|M_w| \leq M_w^0$ , то допустимое абсолютное значение угла  $\psi$  можно получить из (16):

$$|\psi| \leq \text{arctg} \left( \frac{R(M_w^0 - \gamma \dot{\vartheta})}{g(J_w + m_w R^2 + mR)} \right). \quad (17)$$

Для монотонного переходного процесса следует использовать биномиальное представление характеристического полинома уравнения (15) [9], т. е. положить  $\alpha = K = \gamma$ . В этом случае  $\tau_{\text{п}} = \tau_{\text{п1}}/\gamma$ , где  $\tau_{\text{п}}$  — желаемое время переходного процесса,  $\gamma$  — коэффициент сжатия времени переходного процесса,  $\tau_{\text{п1}} = 4,8$  с — время нормированного переходного процесса при  $\gamma = 1$ .

**3. Стабилизация скорости поступательного движения.** Из (16) видно, что при  $\psi_{\text{ref}} \neq 0$  момент  $M_w \neq 0$  и платформа движется ускоренно для поддержания условия  $\psi = \psi_{\text{ref}}$ .

Под задачей стабилизации скорости платформы будем понимать разгон или торможение платформы до достижения значения скорости вращения колеса  $\dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_{\text{ref}}$  и поддержание заданной скорости.

Введём линейные скорость  $v = R\dot{\vartheta}$  и ускорение  $\dot{v} = R\ddot{\vartheta}$  платформы, а также желаемое значение линейной скорости  $v_{\text{ref}} = R\dot{\vartheta}_{\text{ref}}$ . Оценим значение  $\dot{v}(\psi, \dot{\psi}, \dot{\vartheta})$  при  $\psi = \psi_{\text{ref}}$  и  $\dot{\psi} = 0$ . Для этого умножим второе уравнение (6) на  $R$ , подставим в него значения  $\psi = \psi_{\text{ref}}$ ,  $\dot{\psi} = 0$  и значение момента  $M_w$  из (16). После простых преобразований получим

$$\dot{v}(\psi_{\text{ref}}, 0, \dot{\vartheta}) = g \text{tg} \psi_{\text{ref}}. \quad (18)$$

Единственный управляющий параметр  $M_w$  уже использован для стабилизации положения маятника. Однако из (18) видно, что скоростью платформы можно управлять, изменяя значение  $\psi_{\text{ref}}$ . Отметим, что  $\text{sgn}(\dot{v}(\psi_{\text{ref}}, 0, \dot{\vartheta})) = \text{sgn}(\psi_{\text{ref}})$ , и введём обратную связь по скорости в виде

$$\psi_{\text{ref}} = \beta(v_{\text{ref}} - v). \quad (19)$$

В итоге из (15) и (19) получим систему уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{\psi} + (\alpha + K)\dot{\psi} + \alpha K\psi + \alpha\beta K v &= \alpha\beta K v_{\text{ref}}; \\ \dot{v} &= g \operatorname{tg}(\beta(v_{\text{ref}} - v)),\end{aligned}\tag{20}$$

которая имеет очевидную точку равновесия

$$v = v_{\text{ref}}; \quad \psi = \dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0.\tag{21}$$

Ясно также, что  $\operatorname{sgn}(\dot{v}) = \operatorname{sgn}(v_{\text{ref}} - v)$ , т. е. скорость  $v$  стремится к точке равновесия. Однако устойчивость всей системы (20) требует проверки.

Линеаризуем второе уравнение (20) при  $\beta(v_{\text{ref}} - v) \rightarrow 0$  и приведём (20) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \omega; \\ \dot{\omega} &= -\alpha K\psi - (\alpha + K)\omega - \alpha\beta K v + \alpha\beta K v_{\text{ref}}; \\ \dot{v} &= -g\beta v + g\beta v_{\text{ref}}.\end{aligned}\tag{22}$$

Матрица коэффициентов системы (22) имеет собственные значения  $p_1 = -g\beta$ ,  $p_2 = -\alpha$ ,  $p_3 = -K$ , т. е. система экспоненциально устойчива и её характеристический полином имеет вид

$$H(p) = p^3 + (\alpha + K + g\beta)p^2 + (\alpha K + \alpha\beta g + K\beta g)p + \alpha\beta K g.\tag{23}$$

Для получения монотонного переходного процесса коэффициенты полинома (23) следует подчинить условию

$$\alpha = K = \beta g = \gamma.$$

В этом случае  $\tau_{\text{п}} = 6,3/\gamma$ .

**4. Моделирование.** Эффективность предложенных в данной работе алгоритмов управления продемонстрирована путём моделирования системы в среде MATLAB-SIMULINK.

На рис. 2 представлен пример управления положением маятника; изображены графики переходных процессов угла наклона маятника  $\psi$  и вращающего момента колеса  $M_w$ . В исходном состоянии маятник установлен вертикально, затем он должен занять и поддерживать положение  $-0,1$  рад, на второй секунде даётся команда занять и удерживать положение  $+0,1$  рад и наконец на четвёртой секунде даётся команда занять и удерживать положение  $+0$  рад.

На рис. 3 представлен пример одновременного управления положением маятника и скоростью движения платформы; изображены графики переходных процессов угла наклона маятника  $\psi$  и угловой скорости колеса  $\dot{\varphi}$ . В исходном состоянии маятник расположен практически вертикально, аппарат из состояния покоя должен достичь скорости вращения колеса  $1,0$  рад/с, сохраняя вертикальное положение маятника, на тридцатой секунде даётся команда увеличить скорость до  $1,2$  рад/с, на шестидесятой секунде — команда снизить скорость до  $0,8$  рад/с.

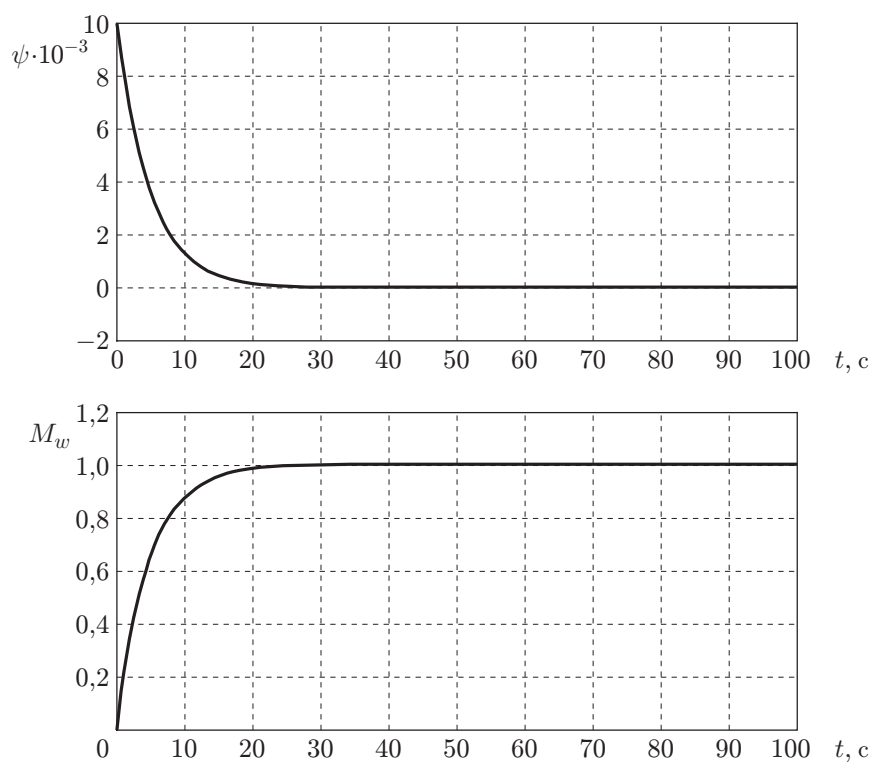


Рис. 2. Переходные процессы при управлении только положением маятника

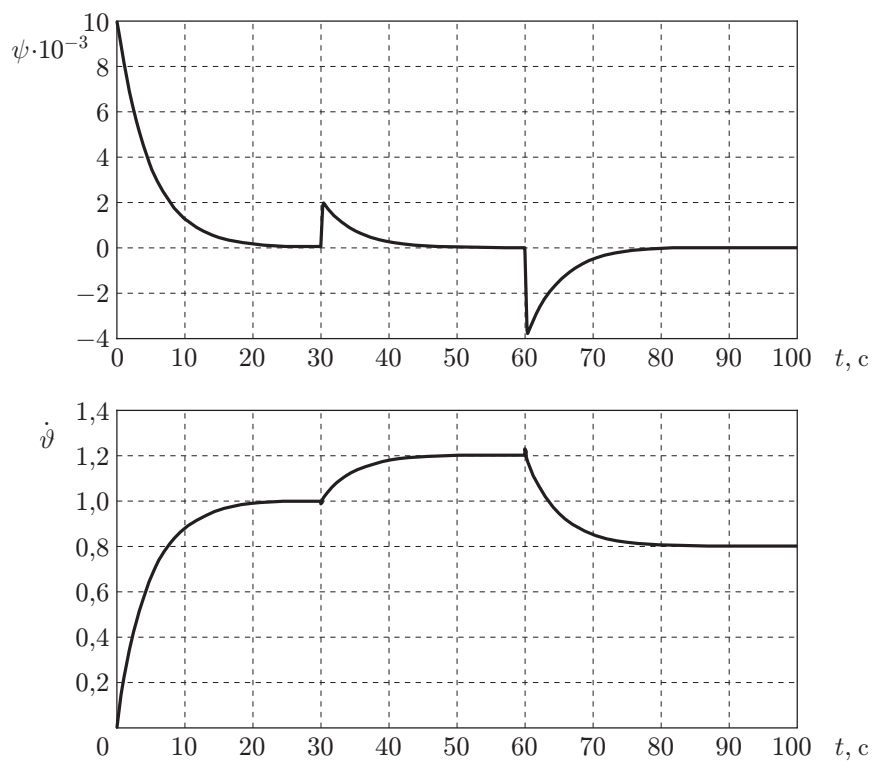


Рис. 3. Переходные процессы при одновременном управлении положением маятника и скоростью движения платформы

**Заключение.** Для системы, состоящей из перевёрнутого маятника, шарнирно закреплённого на оси колеса, методом уравнений Лагранжа построена динамическая модель.

Предложены и обоснованы алгоритмы управления положением маятника на подвижном основании и скоростью платформы с учётом диссипации энергии. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы.

Приведены рекомендации по выбору параметров системы управления и даны оценки времени переходных процессов. Моделирование системы подтвердило эффективность предложенных алгоритмов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сайт компании "Segway"**. URL: <http://www.segway.com/> (дата обращения: 31.08.2010).
2. **Baloh M., Parent M.** Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system // Proc. of the Conference on Computational Intelligence, Robotics, and Autonomous Systems. Singapore, 2003.
3. **Watanabe R.** Motion control of NXTway (LEGO Segway) // [Персональная страница]. URL: [http://web.mac.com/ryo\\_watanabe/iWeb/Ryo's\\_Holiday/NXTway-G\\_files/nxtway-g-1.pdf](http://web.mac.com/ryo_watanabe/iWeb/Ryo's_Holiday/NXTway-G_files/nxtway-g-1.pdf) (дата обращения: 31.08.2010).
4. **Cardi A., Wagner M.** Control of an RC Segway // [Сайт разработчиков]. URL: <http://www.prism.gatech.edu/~gth856d/buffalo/paper.pdf>. 19 p. (дата обращения: 31.08.2010).
5. **Ren T.-J., Chen T.-C., Chen C.-J.** Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller // Control Eng. Practice. 2008. **16**. P. 365–375.
6. **Формальский А. М.** О стабилизации перевёрнутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса // ДАН. 2006. **406**, № 2. С. 175–179.
7. **Золотухин Ю. Н., Нестеров А. А.** Управление перевёрнутым маятником с подвижной точкой подвеса // Тр. XII Междунар. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Самара: Изд-во Самарского науч. центра РАН, 2010. С. 291–297.
8. **Зубов В. И.** Устойчивость движения. (Методы Ляпунова и их применение). М.: Высш. шк., 1973. 271 с.
9. **Мирошник И. В.** Теория автоматического управления. Линейные системы. С.-Пб.: Питер, 2005. 336 с.

*Поступила в редакцию 28 июля 2010 г.*

---