

УДК 519.2

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ КЛАССОВ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. Е. Воскобойников¹, А. В. Гочаков^{1, 2}

¹Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»,
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113
E-mail: voscob@mail.ru

²Государственное учреждение «Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт»,
630099, г. Новосибирск, ул. Советская, 30

Приведены принципы работы локально-пространственных алгоритмов фильтрации и алгоритмов вейвлет-фильтрации. Выполнен большой объём вычислительного эксперимента по фильтрации этими алгоритмами двух разных изображений, искажённых шумами различной статистической природы: белым, цветным и импульсным. На основе анализа полученных результатов даны рекомендации по применению рассмотренных алгоритмов фильтрации изображений.

Ключевые слова: фильтрация изображений, локально-пространственные фильтры, вейвлет-фильтрация.

Введение. Часто используемые на практике алгоритмы фильтрации изображений, искажённых шумами, можно условно разделить на два класса: алгоритмы фильтрации в пространственной и частотной областях.

Результат фильтрации алгоритмами первого класса определяется преобразованием значений исходного изображения, попавших в апертуру (окно) фильтра [1, 2]. Такими преобразованиями могут быть вычисления среднего значения, медианы или других числовых характеристик (например, вычисление среднего только тех значений, которые принадлежат некоторому интервалу). Для обработки всего изображения апертуру фильтра перемещают по обрабатываемому изображению. Изменение размеров апертуры фильтра позволяет управлять характеристиками алгоритма сглаживания. При малых размерах апертуры сохраняются контрастные элементы изображения (рёбра, резкие грани), но шум сглаживается слабо. Увеличение размеров апертуры приводит к более сильному сглаживанию шума, но при этом возможно размытие контрастных элементов исходного изображения. Такие алгоритмы далее будем называть локально-пространственными алгоритмами фильтрации (ЛПАФ).

В алгоритмах фильтрации второго класса обработке подвергаются коэффициенты разложения зашумлённого изображения по некоторой системе базисных функций. Примером могут служить алгоритмы фурье-фильтрации, когда коэффициенты вычисляются в базисе тригонометрических функций синуса и косинуса. Обработка заключается в умножении коэффициента на фильтрующий множитель, значения которого находятся в интервале от 0 до 1. Последние два десятилетия для фильтрации зашумлённых изображений широко используют разложения в базисе вейвлет-функций [3–5]. Такой базис имеет некоторые преимущества перед базисом тригонометрических функций. В частности, для аппроксимации функций (особенно не «гладких») с одинаковой точностью требуется гораздо меньше коэффициентов вейвлет-разложения по сравнению с фурье-разложением. Это свойство широко используется при фильтрации и сжатии одномерных сигналов и изображений. Алгоритмы

фильтрации, основанные на обработке коэффициентов вейвлет-разложений, в дальнейшем будем называть алгоритмами вейвлет-фильтрации (АВФ).

Следует отметить, что алгоритмы и локально-пространственной, и вейвлет-фильтрации используются при решении одного класса обратных измерительных задач — восстановлении изображений. Здесь алгоритмы фильтрации применяются на этапе пост-обработки восстановленного (с помощью методов регуляризации) изображения. Так, в [6, 7] предложен класс частотно-пространственных регуляризирующих алгоритмов, позволяющих восстанавливать изображения со значительно меньшей ошибкой, чем в линейных регуляризирующих алгоритмах. В работе [8] для постобработки восстановленного изображения использовался АВФ.

Несмотря на столь широкое применение ЛПАФ и АВФ при решении различных задач обработки, в литературе отсутствует сравнение точности этих алгоритмов при фильтрации изображений разной структуры и «гладкости» и искажённых шумами различной статистической природы. При построении и исследовании алгоритмов фильтрации исходят из справедливости предположения о некоррелированности соседних отсчётов шума измерения (так называемого белого шума). На практике это предположение часто не выполняется. Примером может служить фильтрация восстановленного изображения. Здесь случайная ошибка восстановления (которую необходимо отфильтровать для уменьшения общей ошибки восстановления) имеет значительную корреляцию соседних значений (т. е. является цветным шумом). Очевидно, что фильтрация цветного шума рассматриваемыми алгоритмами имеет свои особенности, но это также не нашло отражения в литературе.

Целью данной работы является исследование точности ЛПАФ и АВФ по результатам фильтрации разных (по структуре и гладкости) изображений, искажённых шумами различной статистической природы: белым, цветным и импульсным.

Первоначально кратко остановимся на принципах работы ЛПАФ и АВФ.

Локально-пространственные алгоритмы фильтрации. Для пояснения принципа работы этих фильтров предположим, что даны значения некоторого зашумлённого одномерного сигнала $\tilde{f}_j = f_j + \eta_j$, $j = 1, \dots, N$, где η_j — случайный шум (погрешность) с нулевым средним и дисперсией σ^2 (для простоты такой шум будем называть однородным).

Фильтр скользящего среднего (ФСС). Выходной сигнал ФСС $f_j^{\text{ФСС}}$ определяется соотношением

$$f_j^{\text{ФСС}} = \text{aver}_K(\tilde{f}_{j-K}, \tilde{f}_{j-K+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+K}) = \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K \tilde{f}_{j+i}, \quad (1)$$

где $\text{aver}_K(\cdot)$ — функция, вычисляющая среднее значение из $2K+1$ значений, указанных в скобках. Величину K можно интерпретировать как размер апертуры ФСС. Перемещая апертуру фильтра по всем значениям \tilde{f}_j , можно вычислить $f_j^{\text{ФСС}}$ для всего исходного сигнала. Особенностью ФСС является хорошее сглаживание однородного шума измерения. Дисперсия отфильтрованного значения $f_j^{\text{ФСС}}$ (т. е. дисперсия остаточного шума) имеет вид

$$D[f_j^{\text{ФСС}}] = \frac{\sigma^2}{2K+1}.$$

Следовательно, чем больше размер апертуры, тем сильнее сглаживание. Однако при этом сильнее сглаживаются и контрастные детали исходного сигнала, которые необходимо сохранить в отфильтрованном сигнале. Это противоречие всех линейных алгоритмов фильтрации в определённой степени отсутствует в следующем фильтре.

Интервальный фильтр (ИФ) скользящего среднего. Выходной сигнал определяется выражением

$$f_j^{\text{ИФ}} = \text{aver}_K(\tilde{f}_i: j - K \leq i \leq j + K, |\tilde{f}_i - \tilde{f}_j| \leq \beta), \quad (2)$$

т. е. усредняются только те исходные значения \tilde{f}_i , которые попали в интервал $[\tilde{f}_j - \beta, \tilde{f}_j + \beta]$. Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей точного сигнала f_j . Выбор величины β играет существенную роль в работе рассматриваемого фильтра. Для определения β можно использовать правило двух сигм:

$$\beta = 2\sigma, \quad (3)$$

суть которого состоит в том, что значения нормально распределённой случайной величины с нулевым средним и дисперсией σ^2 с вероятностью, близкой к 0,95, попадут в интервал $[-\beta, \beta]$.

Медианный фильтр (МФ). Выходной сигнал медианного фильтра $f_j^{\text{МФ}}$ определяется соотношением

$$f_j^{\text{МФ}} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \tilde{f}_{j-L+1}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}), \quad (4)$$

где $\text{med}_L(\cdot)$ — функция, вычисляющая медиану из $2L + 1$ значений, указанных в скобках. Особенности МФ являются:

- хорошая фильтрация импульсных шумов;
- сохранение в отфильтрованном сигнале контрастных деталей сигнала f_j ;
- равенство выходного сигнала МФ одному из значений \tilde{f}_j , попавших в апертуру фильтра (следовательно, выходной сигнал МФ содержит остаточный шум фильтрации, который определяется погрешностями исходных данных, что обуславливает его низкую эффективность при фильтрации однородных шумов).

Комбинированный фильтр (КФ) [2]. Работу такого КФ (МФ + ИФ) можно представить шагами, выполняемыми для $j \in [1, \dots, N]$:

Шаг 1. Строится оценка

$$f_j^{\text{МФ}} = \text{med}_L(\tilde{f}_{j-L}, \dots, \tilde{f}_j, \dots, \tilde{f}_{j+L}). \quad (5)$$

Шаг 2. Строится оценка

$$f_j^{\text{КФ}} = \text{aver}_K(f_i^{\text{МФ}}: j - K \leq i \leq j + K, |f_i^{\text{МФ}} - f_j^{\text{МФ}}| \leq \beta). \quad (6)$$

Здесь L, K — размеры апертур фильтров, причём $K \geq L$. Заметим, что на шаге 2 усредняются только те значения $f_i^{\text{МФ}}$, которые попали в интервал $[f_j^{\text{МФ}} - \beta, f_j^{\text{МФ}} + \beta]$. Такое интервальное усреднение предотвращает сглаживание контрастных деталей сигнала f_j .

Определим величину β . Предположим, что значение $f_j^{\text{МФ}}$, являющееся результатом медианной фильтрации, содержит остаточную случайную ошибку с дисперсией σ^2 . Тогда величину β вычислим по правилу двух сигм (3).

Для иллюстрации работы рассмотренных фильтров приведём результаты вычислительного эксперимента. Значения f_j , $j = 1, \dots, N = 1024$, прямоугольного сигнала искажались нормально распределёнными случайными числами η_j (имитация однородного шума), имеющими нулевое среднее и дисперсию 10^4 , что соответствовало относительному уровню погрешности $\delta_f = \|\tilde{f} - f\|/\|f\| = 0,115$, где f, \tilde{f} — векторы, составленные из точных и зашумлённых значений функции соответственно. Пять процентов значений функции искажались случайными числами η'_j с дисперсией 10^6 (имитация импульсного

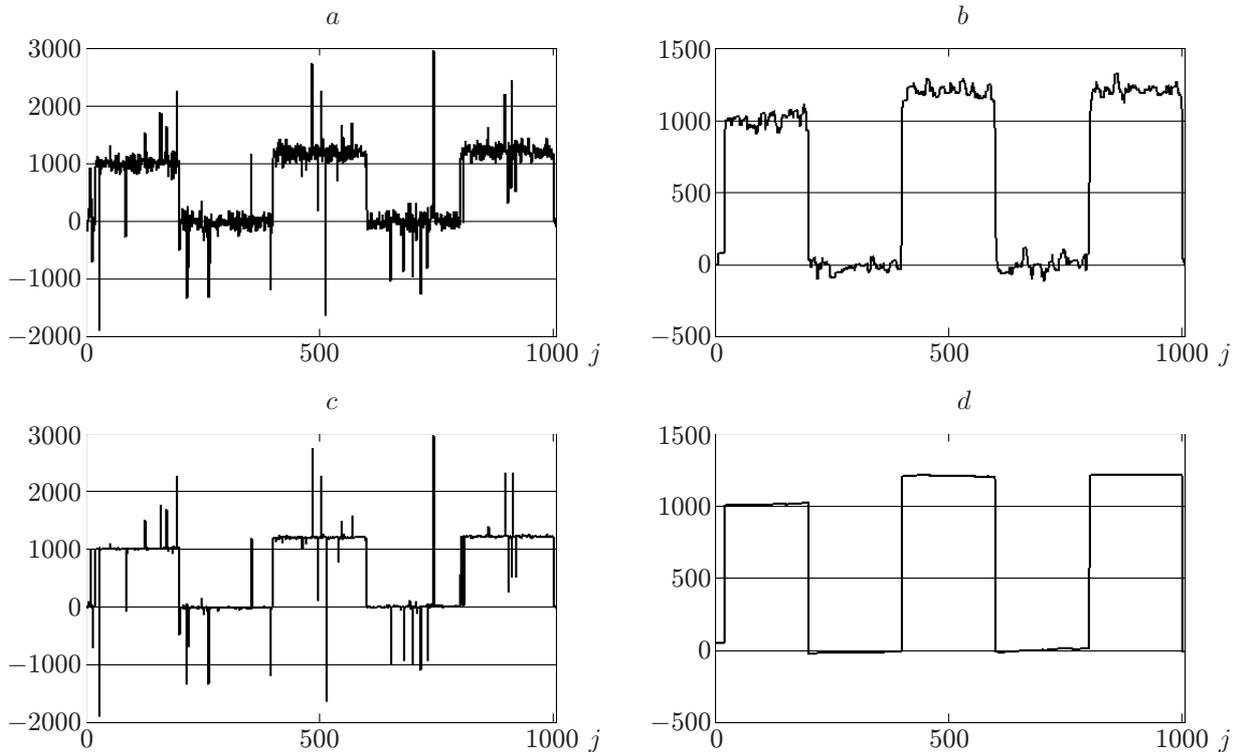


Рис. 1

шума). Искажённые значения функции, которые являлись исходными данными для алгоритмов фильтрации, приведены на рис. 1, *a*. Отчётливо видны выбросы, обусловленные импульсным шумом. Относительный уровень погрешности исходных данных с импульсным шумом $\delta_f = 0,299$.

Первоначально эти данные подверглись медианной фильтрации при $L = 5$. Результат фильтрации показан на рис. 1, *b* и имеет относительный уровень ошибки $\|f^{\text{МФ}} - f\|/\|f\| = 0,06$. Медианный фильтр хорошо удалил импульсный шум, но оставил низкоамплитудный, что является отмеченной особенностью МФ.

Затем для обработки данных использовался ИФ с параметрами $K = 100$, $\beta = 200$. Результат фильтрации изображён на рис. 1, *c*. Относительная погрешность отфильтрованного сигнала $\|f^{\text{ИФ}} - f\|/\|f\| = 0,285$. Видно, что импульсный шум не удаляется ИФ.

Результат обработки исходных данных КФ при $L = 5$, $K = 100$ представлен на рис. 1, *d*. Величина β задавалась по правилу (3) и равнялась 200. Из рисунка следует, что отсутствуют не только импульсные помехи, но и однородные шумы, которые присутствовали после медианной фильтрации (см. рис. 1, *b*). Кроме того, в отфильтрованном сигнале сохранены (не сглажены) все прямоугольные углы. Можно сделать вывод: комбинированный фильтр (5), (6) позволяет эффективно удалять импульсные и низкоамплитудные погрешности, сохраняя при этом высокочастотные информативные составляющие (в нашем случае это прямые углы). Относительная погрешность отфильтрованного сигнала $\|f^{\text{КФ}} - f\|/\|f\| = 0,029$.

Представленные алгоритмы фильтрации одномерного сигнала легко обобщаются на фильтрацию изображений (двумерный сигнал). Для этого операции вычисления медианы и интервального среднего будут выполняться над значениями \tilde{f}_{i_1, i_2} , попавшими в плоские апертуры, чаще всего прямоугольные. Например, для МФ — это апертура размером $(2L_1 + 1) \times (2L_2 + 1)$, а для интервального усреднения — апертура размером $(2K_1 + 1) \times (2K_2 + 1)$.

Качество фильтрации рассмотренных ЛПАФ зависит от размеров апертуры фильтра, т. е. размеры — это своеобразный «управляющий параметр». К сожалению, реальные изображения не являются стационарными: они содержат как монотонные области, так и области с большими градиентами (рёбра, скачки амплитуды и т. д.). Поэтому на практике очень трудно подобрать один оптимальный размер апертуры фильтра для обработки всего изображения. В подобных ситуациях желательно использовать апертуру больших размеров в монотонных областях обрабатываемого изображения и апертуру малых размеров вблизи скачков или рёбер изображений. Локальные фильтры с изменяющимися размерами апертуры называются адаптивными фильтрами, при построении которых главным является алгоритм адаптации размеров апертуры локального фильтра. В работах [9–13] предложены разные алгоритмы адаптации, основанные на локальных статистиках обрабатываемого изображения. Не останавливаясь на этих алгоритмах, отметим, что применение адаптивных фильтров может на 20–30 % уменьшить ошибку фильтрации изображений [13].

Алгоритмы вейвлет-фильтрации используют многомасштабное разложение функции $f(t)$ вида [4, 5]

$$\widehat{f}(t) = \sum_k a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (7)$$

Напомним, что функции $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ являются масштабирующими (или отцовскими), а функции $\{\psi_{j,k}(t)\}$ — вейвлет-функциями (или материнскими). Коэффициенты разложения $a_{j,k}$ называются аппроксимирующими, $d_{j,k}$ — детализирующими и определяются выражениями

$$a_{j,k} = \int_R f(t) \varphi_{j,k}(t) dt; \quad d_{j,k} = \int_R f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (8)$$

где R — интервал определения функции $f(t)$. Переменная j характеризует уровень разложения, и её часто называют коэффициентом масштаба, а переменная k — временной сдвиг той или иной базисной функции. Системы функций $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ составляют ортогональный базис пространств V_j , W_j , $-\infty < j < \infty$, и определяются соотношениями

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

где функции $\{\varphi(t - k)\}$, $\{\psi(t - k)\}$ — ортогональные базисы нулевых пространств V_0 , W_0 . При этом пространство W_j ортогонально пространству V_j и $V_{j-1} = V_j + W_j$. Чем меньше номер j , тем более мелкие структуры исходной функции $f(t)$ могут быть представлены в базисах $\{\varphi_{j,k}(t)\}$, $\{\psi_{j,k}(t)\}$ и тем ближе аппроксимирующая функция $\widehat{f}(t)$ к исходной.

На практике для вычисления коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$ вместо интегрирования (8) используется пирамидальный алгоритм Малла [5], требующий порядка N операций, что делает его эффективным инструментом в вейвлет-технологиях. В этом алгоритме последовательность вычисления коэффициентов следующая. Первоначально (точка старта алгоритма) задаются аппроксимирующие коэффициенты на некотором нулевом уровне j_0 : $a_{j_0,k}$, $k = 1, \dots, N$. Величина N удовлетворяет условию $N = 2^m$, $m > 1$. Затем по этим коэффициентам определяются аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты $a_{j_0+1,k}$, $d_{j_0+1,k}$; по коэффициентам $a_{j_0+1,k}$ находятся $a_{j_0+2,k}$, $d_{j_0+2,k}$; по $a_{j_0+2,k}$ вычисляются $a_{j_0+3,k}$, $d_{j_0+3,k}$. Таким образом, по аппроксимирующим коэффициентам $a_{j_0+j-1,k}$ определяются коэффициенты $a_{j_0+j,k}$, $d_{j_0+j,k}$, $j = 1, \dots, J$, $k = 1, 2, \dots, N/2^j$. В алгоритме Малла

для нахождения коэффициентов используются суммы небольшого числа слагаемых (число зависит от вида вейвлетов), что позволяет эффективно вычислять интегралы (8) без методических ошибок, присущих квадратурным формулам.

Для задания коэффициентов $a_{j_0, k}$, $k = 1, \dots, N$, используется несколько способов. Наиболее частым и простым является задание $a_{j_0, k} = f(t_k)$, $k = 1, \dots, N$, где $f(t_k)$ — значение функции в равноотстоящих узлах сетки. При этом N должно удовлетворять условию $N = 2^{j_0}$, из которого также определяется начальный уровень j_0 . Такое задание означает, что исходная функция $f(t)$ аппроксимируется функцией $s(t) = \sum_{k=1}^N f(t_k) \varphi_{j_0, k}(t)$. Далее будем считать, что число узлов сетки выбрано так, что ошибка данной аппроксимации пренебрежимо мала. Кроме этого для удобства обозначений примем $j_0 = 0$.

Для пояснения принципа работы алгоритмов вейвлет-фильтрации вновь обратимся к модели зашумлённого одномерного сигнала $\tilde{f}_i = f(t_i) + \eta_i$, $i = 1, \dots, N$, но предположим, что случайный шум η_j имеет не только нулевое среднее и одинаковую дисперсию σ^2 для всех η_j , но и соседние некоррелированные значения η_j, η_{j+1} (т. е. белый шум). Очевидно, что по зашумлённым значениям коэффициенты разложения (7) (обозначим их $\tilde{d}_{j, k}, \tilde{a}_{J, k}$) также вычисляются со случайными ошибками. Фильтрация сигналов с использованием вейвлет-разложения включает три этапа:

- вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения $\tilde{d}_{j, k}, \tilde{a}_{J, k}$);
- обработку зашумлённых коэффициентов $\tilde{d}_{j, k}, \tilde{a}_{J, k}$ (построение оценок $\widehat{d}_{j, k}, \widehat{a}_{J, k}$ для неизвестных точных коэффициентов $d_{j, k}, a_{J, k}$);
- вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования (нахождение с использованием оценок $\widehat{d}_{j, k}, \widehat{a}_{j, k}$ значений сглаженной функции (7) в заданных узлах).

Замечание. Можно показать [14], что для принятой модели шума и ортогональных вейвлетов (например, вейвлетов Добеши) ошибки вычисления коэффициентов $\tilde{d}_{j, k}, \tilde{a}_{j, k}$ являются случайными величинами с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Ошибка фильтрации зашумлённого сигнала определяется алгоритмами обработки второго этапа. Большинство применяемых алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае этот коэффициент сохраняется или подвергается линейному преобразованию. Пороговые алгоритмы оценивания имеют существенный недостаток: они не используют для каждого отдельного коэффициента $\tilde{a}_{J, k}, \tilde{d}_{j, k}$ отношение шум/сигнал, которое, в конечном счёте, определяет информативность соответствующих коэффициентов разложения. Очевидно, что приближение (7), использующее такие пороговые оценки коэффициентов, будет иметь ошибку сглаживания больше (иногда значительно) минимальной ошибки. Поэтому в работе [14] была построена оптимальная (минимизирующая СКО аппроксимации) оценка, но требующая задания отношения шум/сигнал. Предложен подход к её практической реализации (названной квазиоптимальной оценкой) на основе итерационного уточнения отношения шум/сигнал. Результаты вычислительных экспериментов с одномерными зашумлёнными сигналами показали, что точность фильтрации с использованием этой оценки выше (иногда значительно) точности фильтрации с применением других пороговых оценок.

Приведём только конечные выражения для алгоритмов оценивания детализирующих коэффициентов разложения, так как аппроксимирующие коэффициенты $\tilde{a}_{J, k}$ имеют относительную ошибку существенно меньшую, чем детализирующие [14].

Пороговую обработку детализирующих коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$ осуществляют с использованием «жёсткой» и «мягкой» пороговых функций соответственно:

$$\widehat{d}_{j,k} = \begin{cases} \tilde{d}_{j,k}, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda, \end{cases} \quad (9)$$

$$\widehat{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{d}_{j,k})(|\tilde{d}_{j,k}| - \lambda), & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda, \end{cases} \quad (10)$$

где λ — величина порога. Очевидно, что от выбора λ зависит ошибка фильтрации. При этом λ может быть задана одинаковой для всех уровней разложения или вычислена для каждого уровня. Выбор величины λ осуществляется различными подходами. Приведём конечные соотношения для часто используемых пороговых величин (каждого j -го уровня разложения), которые будут применяться при фильтрации изображений.

1. Универсальный порог [15]

$$\lambda_j = \sigma \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (11)$$

где N_j — количество коэффициентов на j -м уровне разложения.

2. Байесовский порог [16]

$$\lambda_j = \sigma^2 / \widehat{\sigma}_{d_j}, \quad (12)$$

где $\widehat{\sigma}_{d_j}$ — оценка для среднеквадратического отклонения точных коэффициентов $d_{j,k}$, вычисляемая по формуле

$$\widehat{\sigma}_{d_j} = \max\left(0, \sqrt{\widehat{\sigma}_{\tilde{d}_j}^2 - \sigma^2}\right), \quad \widehat{\sigma}_{\tilde{d}_j}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{d}_{j,k}^2.$$

3. SURE-порог [17]

$$\lambda_j = \sigma \mu_j, \quad (13)$$

где μ_j доставляет минимум функционалу

$$\text{SURE}(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left(\min\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \mu\right) \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} \text{If}\left(\frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu\right);$$

If(условие) — условная функция, принимающая значение 1, если указанное условие выполняется, и значение 0 в противном случае.

Во все эти соотношения входит среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Если дисперсия неизвестна, то вычисляется оценка

$$\widehat{\sigma} = \text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|) / 0,6745. \quad (14)$$

Здесь оператор $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$ определяет медиану абсолютных величин коэффициентов первого уровня $\tilde{d}_{1,k}$ (объём выборки равен $N/2$).

Квазиоптимальная оценка [14]. Для краткости записи квазиоптимальной оценки обозначим любой коэффициент $\tilde{d}_{j,k}$ как $\tilde{\theta}$. Введём следующие величины [14]: $\tilde{s} = \sigma^2/\tilde{\theta}^2$ — отношение шум/сигнал вычисленного коэффициента $\tilde{\theta}$; $s_{1,2}^* = (1 - 2\tilde{s} \pm \sqrt{1 - 4\tilde{s}})/2\tilde{s}$ — корни квадратного уравнения $(s^*)^2 + (2 - 1/\tilde{s})s^* + 1 = 0$; $\hat{s}^{(0)} = \sigma^2/(\hat{\theta}^{(0)})^2$ — начальное отношение шум/сигнал; $\hat{\theta}^{(0)}$ — начальная оценка для коэффициента θ , которая задаётся через доступные коэффициенты разложения (например, $\hat{\theta}^{(0)} = \tilde{\theta}$).

Тогда квазиоптимальная оценка определяется выражением

$$\hat{\theta}^* = \begin{cases} \frac{1}{1 + s_1^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{s} \leq \frac{1}{4}, \quad 0 < \hat{s}^{(0)} < s_2^*, \\ \frac{1}{1 + s_2^*} \tilde{\theta}, & \text{если } \tilde{s} \leq \frac{1}{4}, \quad \hat{s}^{(0)} = s_2^*, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (15)$$

Заменяя общее обозначение $\tilde{\theta}$ конкретным коэффициентом разложения $\tilde{d}_{j,k}$, получаем соответствующий квазиоптимальный коэффициент вейвлет-разложения.

Доказано [14], что алгоритм фильтрации с квазиоптимальными оценками (15) (квазиоптимальный алгоритм фильтрации) обеспечивает сходимость сглаженной функции $\hat{f}(t)$ к точной функции $f(t)$ при стремлении уровня шума к 0. Эта сходимость определяется следующим пределом:

$$\Delta(\hat{f}) = M \left[\|\hat{f} - f\|^2 \right] = M \left[\int_R (\hat{f}(t) - f(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma^2 \rightarrow 0,$$

где $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания. В этой же работе на примере фильтрации одномерного «ступенчатого» сигнала проведено сравнение точности пороговых алгоритмов фильтрации и квазиоптимального алгоритма, использующего оценки (15). У последнего алгоритма СКО $\Delta(\hat{f})$ была на 15–30 % меньше в сравнении с другими алгоритмами.

В отличие от одномерной вейвлет-фильтрации алгоритмы двумерной фильтрации значений функции $f(t_1, t_2)$ используют следующие базисные функции:

$$\{\varphi_{j,k_1}(t_1)\varphi_{j,k_2}(t_2)\}; \{\varphi_{j,k_1}(t_1)\psi_{j,k_2}(t_2)\}; \{\psi_{j,k_1}(t_1)\varphi_{j,k_2}(t_2)\}; \{\psi_{j,k_1}(t_1)\psi_{j,k_2}(t_2)\} \quad (16)$$

с коэффициентами разложения \tilde{a}_{j,k_1,k_2} , $\tilde{d}_{j,k_1,k_2}^{LH}$, $\tilde{d}_{j,k_1,k_2}^{HL}$, $\tilde{d}_{j,k_1,k_2}^{HH}$, из которых формируются матрицы соответствующих размеров. Однако алгоритмы обработки этих коэффициентов те же самые, что и в случае одномерной вейвлет-фильтрации.

В данной работе на примерах фильтрации разных по структуре изображений проводятся исследование и сравнение точности не только алгоритмов вейвлет-фильтрации между собой, но и с алгоритмами локально-пространственной фильтрации.

Вычислительный эксперимент по фильтрации изображений. В качестве тестовых были взяты два изображения Lena и Target размером 256×256 пикселей (рис. 2, а, б). По статистической природе моделируемого шума измерения, выполненные в вычислительном эксперименте, можно условно разделить на три серии:

1. Белый шум измерения. Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 для всех η_{i_1, i_2} , и соседние отсчёты шума не коррелированы друг с другом.

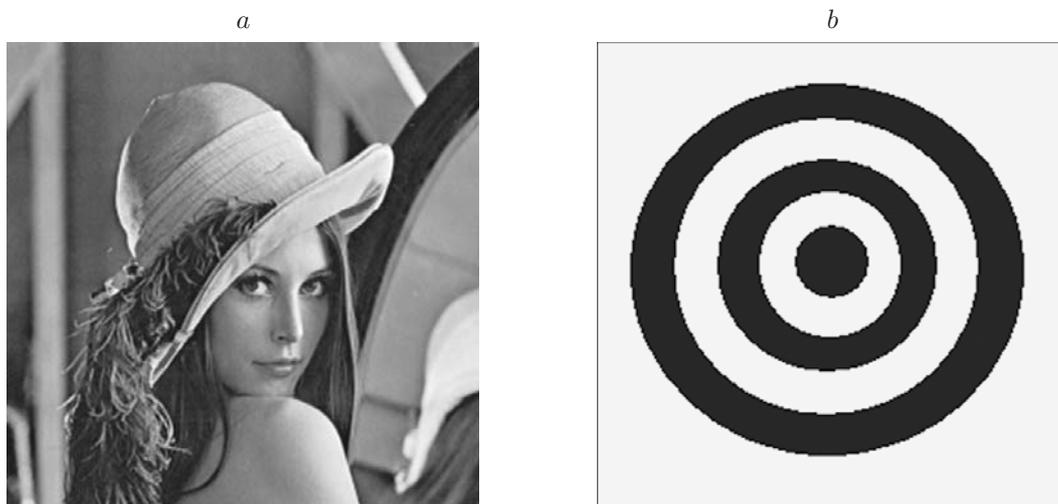


Рис. 2

2. Цветной шум измерения. Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию σ^2 , и соседние отсчёты шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0,5.

3. Белый + импульсный шум измерения. Двумерный шум измерения η_{i_1, i_2} имеет с вероятностями 0,99 и 0,95 дисперсию σ^2 и с вероятностями 0,01 и 0,05 дисперсию $400\sigma^2$. Соседние отсчёты шума не коррелированы друг с другом. Такой шум в зарубежной литературе называют «соль—перец». Это означает, что из 65536 отсчётов изображения примерно 655 (вероятность 0,01) и 3275 (вероятность 0,05) искажены импульсным шумом, амплитуда которого в 20 раз больше амплитуды шума с дисперсией σ^2 .

Дисперсия σ^2 определялась по относительному уровню шума $\delta_F = \|\tilde{F} - F\|/\|F\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма матрицы, т. е. $\|F\| = \left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} F_{i_1, i_2}^2\right)^{1/2}$. Матрицы F , \tilde{F} размера 256×256 составлены из значений точного и зашумлённого изображений соответственно. В эксперименте задавались два уровня шума: 0,05 и 0,10. В качестве критерия точности фильтрации была принята средняя относительная ошибка (СОО), определяемая выражением

$$\delta(\widehat{F}) = M\left[\|\widehat{F} - F\|/\|F\|\right],$$

где математическое ожидание берётся по распределению матрицы случайного шума η . Выборочная оценка математического ожидания находилась по 30 изображениям $\widehat{F}^{(l)}$ — результату фильтрации изображения $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$, где $\eta^{(l)}$ — l -я реализация матрицы шума.

В первых двух сериях вычислительного эксперимента в качестве минимальной была принята СОО винеровского вейвлет-фильтра $\delta(\widehat{F}_{\text{вин.}})$ (ортогональные вейвлеты Добеши (8)), в котором оптимальные коэффициенты разложения определяются с использованием точного отношения шум/сигнал, требующего задания коэффициентов разложения точного изображения (подробнее см. в [14]). Очевидно, что на практике такой фильтр нереализуем, но его СОО может служить базовым ориентиром при сравнении СОО других алгоритмов фильтрации.

Таблица 1

Фильтр	Шум не коррелирован		Шум коррелирован	
	Уровень шума (минимальная ошибка)			
	0,05 (0,029)	0,10 (0,046)	0,05 (0,038)	0,10 (0,069)
ФСС	4,103	2,609	3,158	1,826
КФ	1,345	1,457	1,132	1,087
Универсальный порог	2,207	2,000	1,395	1,348
SURE-порог	1,966	2,000	1,342	1,435
Байесовский порог	1,586	1,696	1,316	1,449
Квазиоптимальный алгоритм	1,483	1,435	1,211	1,275

В табл. 1, 2 приведены значения коэффициента эффективности $E = \delta(\widehat{F})/\delta(\widehat{F}_{\text{вин.}})$ для разных алгоритмов фильтрации. Чем больше E отклоняется от 1, тем больше проигрыш по точности соответствующего алгоритма фильтрации в сравнении с винеровским вейвлет-фильтром. В ЛПАФ задавались параметры $L = 0$ (импульсный шум отсутствует), $K = 4$ (что соответствует апертуре усредняющего фильтра 9×9). В АВФ применялась жёсткая пороговая функция (9) (для используемых изображений она давала меньшую СОО, чем (10)). Относительная ошибка винеровского фильтра $\delta(\widehat{F}_{\text{вин.}})$ в табл. 1, 2 приведена в скобках под соответствующим уровнем шума.

В табл. 1 представлены значения E при фильтрации изображения Lena, в табл. 2 — изображения Target для двух уровней шума и двух коэффициентов корреляции (0 — шум не коррелирован, 0,5 — шум коррелирован) между соседними значениями шума. Из анализа таблиц видно, что:

- при фильтрации цветного шума (винеровский вейвлет-фильтр) минимальная СОО возрастает на 30–50 %;
- при фильтрации как белого, так и цветного шума наименьшую ошибку имеет КФ (5), (6) (даже с фиксированными размерами апертуры);

Таблица 2

Фильтр	Шум не коррелирован		Шум коррелирован	
	Уровень шума (минимальная ошибка)			
	0,05 (0,021)	0,10 (0,035)	0,05 (0,030)	0,10 (0,056)
ФСС	5,450	3,143	3,667	2,071
КФ	1,200	1,371	0,967	1,036
Универсальный порог	2,250	2,200	1,467	1,571
SURE-порог	1,700	2,543	1,667	1,750
Байесовский порог	2,400	2,257	1,667	1,786
Квазиоптимальный алгоритм	1,400	1,457	1,167	1,214

Таблица 3

Фильтр	Изображение			
	Lena	Target	Lena	Target
	Вероятность 0,01		Вероятность 0,05	
ФСС	1,317	1,657	1,153	1,531
КФ	0,741	0,462	0,611	0,401
Универсальный порог	2,463	2,970	3,000	3,442
SURE-порог	2,512	3,000	3,183	3,566
Байесовский порог	2,841	3,328	3,496	4,027
Квазиоптимальный алгоритм	2,024	1,537	2,122	1,690
Винеровский фильтр $\delta(\hat{F}_{\text{вин.}})$	0,082	0,067	0,131	0,113

— среди АВФ наименьшую ошибку имеет квазиоптимальный алгоритм фильтрации с квазиоптимальными коэффициентами (15).

В табл. 3 сведены значения E для фильтрации изображений Lena и Target, искажённых импульсными шумами, вероятность появления которых равна 0,01 и 0,05. Анализ данных этой таблицы позволяет сделать выводы:

- алгоритм винеровской вейвлет-фильтрации уже не даёт наименьшую СОО;
- КФ имеет СОО, в 1,5–2 раза меньшую в сравнении с винеровским вейвлет-фильтром;
- пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации имеют СОО, в 5–6 раз превышающую СОО КФ.

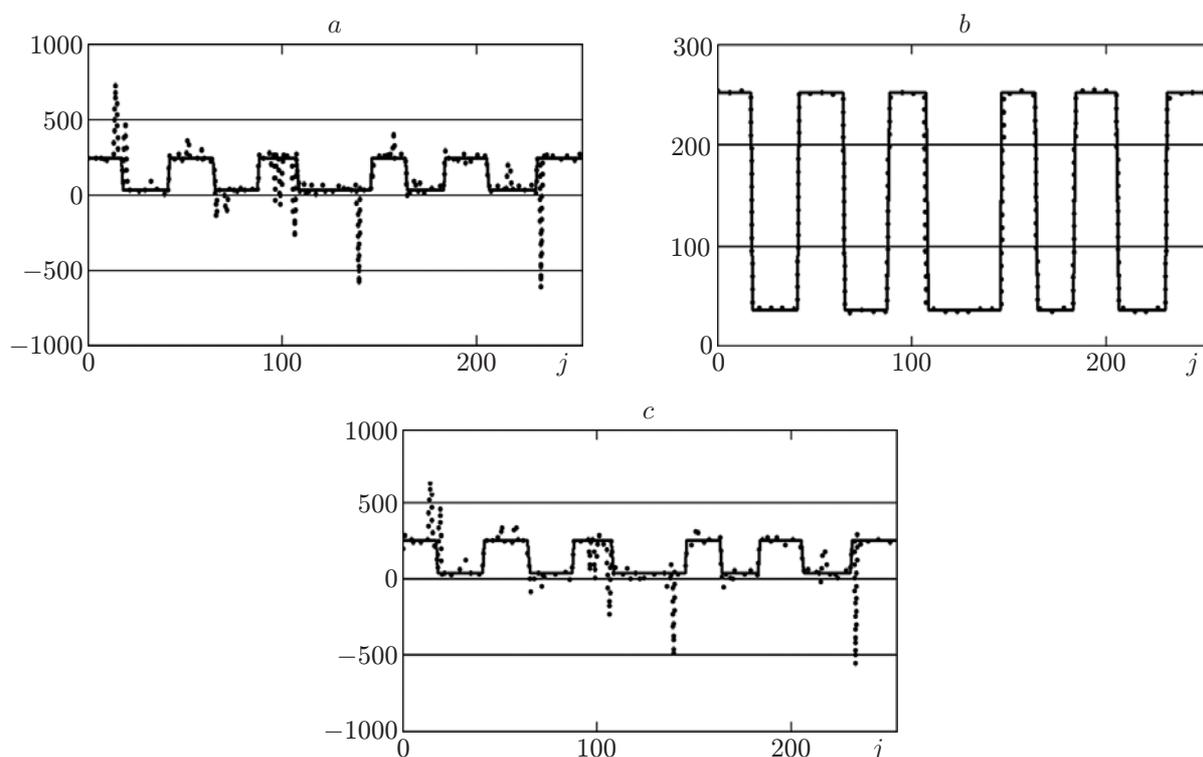


Рис. 3

Неудовлетворительную работу вейвлет-алгоритмов при фильтрации импульсного шума можно объяснить следующим образом. В силу линейности прямого вейвлет-преобразования импульсный шум существенно увеличивает значения детализирующих коэффициентов первого и второго уровней разложения, и они становятся больше (по абсолютной величине) порога λ в оценках (9), (10). Следовательно, эти коэффициенты, обусловленные в основном импульсным шумом, воспринимаются алгоритмами обработки как информативные, они участвуют в обратном вейвлет-преобразовании и вызывают в отфильтрованном сигнале импульсные ошибки фильтрации. В качестве иллюстрации этого тезиса на рис. 3, *a* приведены сечения точного (сплошная кривая) и зашумленного (точки) (вероятность импульса 0,05) изображения Target. Относительный уровень однородного шума равен 0,1, а зашумленного импульсным шумом — 0,461. На рис. 3, *b* дано сечение изображения после фильтрации КФ (обозначено точками), который достаточно хорошо удалил и импульсный и однородный шум, сохранив контрастные детали точного изображения (СОО — 0,038). На рис. 3, *c* точками показано сечение изображения, отфильтрованного квазиоптимальным вейвлет-фильтром. Хотя уровень остаточного шума стал меньше (СОО составила 0,189 в сравнении с исходной СОО, равной 0,461), в отфильтрованном изображении сохранились шумовые импульсы. В литературе предлагается несколько подходов (некоторые аналогичны процедурам робастного оценивания), но они требуют большого объема вычислений (в частности, решения вариационных задач) и будут мало эффективны при фильтрации изображений.

Заключение. При фильтрации изображений, отличающихся от рассмотренных в данной работе, количественные соотношения ошибок различных алгоритмов фильтрации, по-видимому, будут другими, но «иерархия» алгоритмов по точности фильтрации сохранится. Поэтому

— алгоритмы вейвлет-фильтрации можно использовать для фильтрации однородного шума небольшого уровня, при сжатии изображений или построении параметрического представления функции (например, в задачах распознавания образов, регрессионном анализе и т. д.);

— алгоритмы локально-пространственной фильтрации следует применять для фильтрации больших уровней шума, в особенности изображений, искаженных импульсными шумами;

— алгоритмы локально-пространственной фильтрации легко обобщаются на фильтрацию векторных изображений [18, 19], когда фильтруется не каждая проекция в отдельности, а всё изображение в целом, но такая фильтрация практически не реализуема с использованием вейвлет-разложений;

— при необходимости вейвлет-представления изображения, искаженного импульсным шумом, можно использовать двухэтапную обработку: на первом этапе осуществляется фильтрация комбинированным фильтром, а на втором — вейвлет-разложение результата фильтрации первого этапа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Быстрые** алгоритмы в цифровой обработке изображений /Под ред. Т. С. Хуанга. М.: Радио и связь, 1984. 340 с.
2. **Бронников А. В., Воскобойников Ю. Е.** Комбинированные алгоритмы нелинейной фильтрации зашумленных сигналов и изображений // Автометрия. 1990. № 1. С. 21–26.
3. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов. С.-Пб.: «Модус+», 1999. 152 с.
4. **Mallat S.** Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$ // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.

5. **Mallat S.** A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. **11**, N 7. P. 674–693.
6. **Воскобойников Ю. Е., Литасов В. А.** Частотно-пространственный устойчивый алгоритм восстановления контрастных изображений // Науч. вест. НГТУ. 2006. № 1(22). С. 3–16.
7. **Воскобойников Ю. Е.** Комбинированный нелинейный алгоритм восстановления контрастных изображений при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. 2007. **43**, № 6. С. 3–16.
8. **Neelamani R., Choi H., Baraniuk R.** ForWaRD: Fourier-wavelet regularized deconvolution for ill-conditioned systems // IEEE Trans. Signal Process. 2004. **52**, N 2. P. 418–433.
9. **Pearlman W. A., Mahesh B., Song W.-J.** Adaptive estimators for filtering noisy images // Opt. Eng. 1990. **29**, N 5. P. 488–494.
10. **Katkovnik V., Egiazarian K., Astola J.** Weighted median filter with varying bandwidth adaptive windows size // Proc. of the IASTED Intern. Conf. on Signal Processing and Communications. Spain, 2000. P. 329–333.
11. **Белявцев В. Г., Воскобойников Ю. Е.** Локальные адаптивные алгоритмы фильтрации цифровых изображений // Науч. вест. НГТУ. 1997. № 3. С. 21–32.
12. **Белявцев В. Г., Воскобойников Ю. Е.** Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры // Автометрия. 1998. № 3. С. 18–27.
13. **Воскобойников Ю. Е., Кузнецов А. М.** Новый алгоритм адаптации апертуры локальных векторных фильтров // Автометрия. 2005. **41**, № 5. С. 3–12.
14. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Квазиоптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 34–45.
15. **Donoho D. L., Johnstone J. M.** Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage // Biometrika. 1994. **81**, N 3. P. 425–455.
16. **Abramovich F., Sapatinas T., Silverman B. W.** Wavelet thresholding via a Bayesian approach // Journ. Royal Statist. Soc. B. 1998. **60**, N 4. P. 725–749.
17. **Zhang X.-P., Desai M. D.** Adaptive denoising based on SURE risk // IEEE Signal Process. Lett. 1998. **5**, N 10. P. 265–267.
18. **Воскобойников Ю. Е., Белявцев В. Г.** Нелинейные алгоритмы фильтрации векторных сигналов // Автометрия. 1999. № 5. С. 97–105.
19. **Белявцев В. Г., Воскобойников Ю. Е.** Векторные локальные фильтры с адаптацией размера апертуры // Автометрия. 2001. № 6. С. 32–45.

Поступила в редакцию 4 октября 2010 г.
