

УДК 519.68

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ
ОБЪЕДИНЁННЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
И РАЗЛОЖЕНИЯ РЭЛЕЯ***

Д. В. Нестеренко

*Учреждение Российской академии наук
Институт систем обработки изображений РАН,
443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151
E-mail: nesterenko@smr.ru*

Обсуждается реализация объединённого численного метода моделирования дифракции электромагнитных волн на периодических неоднородностях на подложках и в свободном пространстве. Область, содержащая периодическое распределение диэлектрической и магнитной проницаемостей, покрывается сетью конечных элементов. В узлах сети строится функциональное соотношение между значениями поля, минимизируемое в соответствии с методом конечных элементов. В однородных полупространствах, окружающих область расчёта с неоднородностью, к значениям поля применяется разложение Рэлея. Проводились численные эксперименты по исследованию скорости сходимости в зависимости от размера элементов.

Ключевые слова: дифракционная решётка, метод конечных элементов, разложение Рэлея, дифракция.

Введение. Теория рассеяния на периодических неоднородностях имеет ряд применений в микрооптике, например: расчёт электромагнитных и оптических средств связи, средств визуализации, электронных и оптических компонент, фотонных кристаллов, дифракционных решёток; определение свойств объектов и поверхностей. Для моделирования дифракции света на дифракционных решётках были разработаны численные методы: основанные на распространении рэлеевских и собственных мод [1–3], дифференциальные [4, 5], интегральные [6, 7], конечно-разностные [6, 8, 9] и вариационные [10–13].

Вариационные методы, к которым относится метод конечных элементов, наиболее эффективны для неоднородных задач со сложными геометриями. Структура разделяется на простые элементы, и поле в них аппроксимируется кусочно-линейными полиномами, удовлетворяющими условиям непрерывности вдоль границ элементов. Этот метод требует решения системы линейных уравнений с разреженными матрицами. Вне области рассеяния поле включает в себя конечное число плоских волн (или мод). Направление этих мод напрямую связано с периодом решётки [14], но вычисление соответствующих комплексных амплитуд требует решения уравнений Максвелла. Известны подходы к их описанию посредством неотражающих граничных условий [13, 15–17] (получаемых интегральными методами) анизотропных слоёв [18]. Подход, основанный на быстром преобразовании Фурье и рэлеевском разложении поля и его нормальных производных на границе, может быть эффективен на однородных сетках [19].

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-02-90726-моб.ст) и Совета по грантам Президента РФ (№ НШ-7414.2010.9).

В предлагаемой работе использовано разложение Рэлея в задаче дифракции электромагнитных волн на периодических структурах для описания граничных условий, удовлетворяющих условиям излучения Зоммерфельда, только к значениям поля на границе. В качестве частного случая вариационных методов был рассмотрен метод Галёркина, применённый к эллиптическому уравнению Гельмгольца в области расчёта. Формулируются схемы дискретизации, построение функционального соотношения с последующей его минимизацией. Полученное соотношение преобразуется в систему линейных уравнений, являющуюся неполной без использования граничных условий. Поле сшивается на границах с удовлетворением условий непрерывности. Результатом выполнения разложения Рэлея для определения поля на границе является решение задачи дифракции, не зависящее от угла падения поля на границу.

Постановка задачи. Рассмотрим дифракцию плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = k(\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$, $k = k_0\sqrt{\varepsilon_1}$, на диэлектрической структуре, периодичной по оси x с периодом d , где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — волновое число в свободном пространстве, λ_0 — длина волны в свободном пространстве, ε_1 — диэлектрическая проницаемость среды, θ — угол падения волны к нормали границы.

Свет, дифрагируя на структуре, создаёт рассеянное поле. Кроме некоторой затухающей части дифрагированный свет расщепляется на конечное число отражённых и прошедших поляризованных плоских волн, направление распространения которых не зависит от геометрии и материала периодической структуры, а обусловлено только периодом решётки. Полное поле вычисляется как сумма рассеянного и падающего полей. Задача состоит в нахождении полного поля дифракции в области Ω , определяемого функцией $u_\Omega(x, y)$, и расчёте амплитуды и фазы отражённых, прошедших и затухающих порядков дифракции.

Геометрия задачи приведена на рис. 1, где R_n и T_n — коэффициенты отражения и пропускания дифракционных порядков. Для данной геометрии задачи можно выделить три зоны с различной диэлектрической проницаемостью: область Ψ_1 над структурой при $y > a$ (a — максимальная высота структуры) с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1$, собственно область структуры $0 < y < a$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ и область Ψ_3 при $y < 0$ с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_3$.

Задача дифракции плоской волны на одномерной периодической структуре сводится к рассмотрению двух независимых задач: дифракции плоской волны с ТЕ- ($E_z \neq 0, H_z = 0$) и с ТМ-поляризацией ($H_z \neq 0, E_z = 0$) [20].

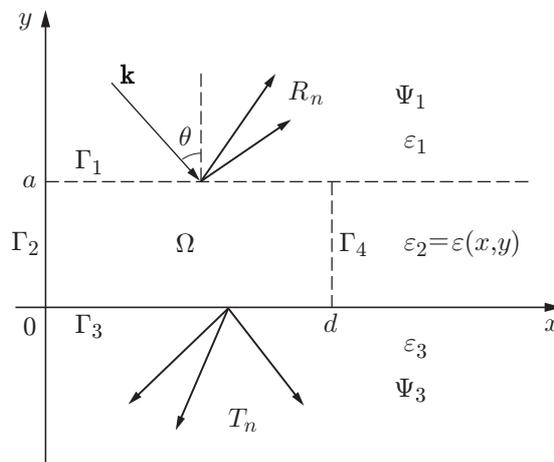


Рис. 1

Полное поле $u_\Omega(x, y)$ в области Ω ($0 < x < d$, $0 < y < a$) должно удовлетворять уравнению [21]

$$\nabla \left[\frac{1}{p(x, y)} \nabla u_\Omega(x, y) \right] + k_0^2 q(x, y) u_\Omega(x, y) = f_\Omega, \quad (1)$$

где $f_\Omega = jk_0 Z_0 J_z$; $p(x, y) = \mu_r$; $q(x, y) = \varepsilon_r$ для ТЕ-поляризации и

$$f_\Omega = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} J_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} J_x \right);$$

$p(x, y) = \varepsilon_r$; $q(x, y) = \mu_r$ для ТМ-поляризации. Константы μ_r и ε_r представляют собой отношение магнитной и диэлектрической проницаемостей среды к аналогичным показателям свободного пространства, т. е. $\mu_r = \mu/\mu_0$ и $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — импеданс свободного пространства, (J_x, J_y, J_z) — вектор плотности электрического тока источника в области Ω . Для ТЕ-поляризации комплексная амплитуда $u_\Omega(x, y)$ обозначает полное электрическое поле $E_z(x, y)$, направленное вдоль оси z (вдоль образующей цилиндрического оптического элемента), координаты (x, y) лежат в плоскости нормального сечения. Для ТМ-поляризации комплексная амплитуда $u_\Omega(x, y)$ обозначает полное магнитное поле $H_z(x, y)$.

При решении уравнения (1) область расчёта Ω должна быть ограничена введением искусственной границы $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, где Γ_1 и Γ_3 — фиктивные границы, бесконечно простирающиеся параллельно оси x по координатам $y = a$ и $y = 0$ (см. рис. 1). Соответственно для единственного решения задачи на данной искусственной границе необходимо определить граничные условия.

Так как пространство в зонах Ψ_1 и Ψ_3 однородное, то поле $u_\Psi(x, y)$ в них должно удовлетворять уравнению

$$\nabla \left[\frac{1}{p} \nabla u_\Psi(\xi) \right] + k_0^2 q u_\Psi(\xi) = f_\Psi, \quad \xi \in \Psi, \quad (2)$$

где $f_\Psi = jk_0 Z_0 J_z^\Psi$; $p = \mu_\Psi$; $q = \varepsilon_\Psi$ для ТЕ-поляризации и

$$f_\Psi = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} J_y^\Psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} J_x^\Psi \right);$$

$p = \varepsilon_\Psi$; $q = \mu_\Psi$ для ТМ-поляризации. Величина J^Ψ — вектор плотности электрического тока источника в области $\Psi = \Psi_1, \Psi_3$.

Описание метода расчёта. Метод Галёркина для решения уравнения (1) основан на расчёте соотношений вида [17]

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{1}{p} \Delta u_\Omega \gamma - q k^2 u_\Omega \gamma - f_\Omega \gamma \right) d\Omega = 0, \quad (3)$$

где γ — произвольная функция из области определения уравнения (2).

Используя первую формулу Грина

$$\iint_{\Omega} P \Delta Q d\Omega = \int_{\Gamma} P \frac{dQ}{d\mathbf{n}} dl - \iint_{\Omega} \nabla P \nabla Q d\Omega$$

для функций P и Q (Ω — область плоскости xy , Γ — её граница, обходимая против часовой стрелки, $dQ/d\mathbf{n}$ — производная в направлении внешней нормали к кривой Γ), получим

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{1}{p} \nabla u_{\Omega}(x, y) \nabla \gamma - qk^2 u_{\Omega}(x, y) \gamma \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\gamma}{p} \frac{du_{\Omega}(x, y)}{d\mathbf{n}} d\Gamma = \iint_{\Omega} f_{\Omega} \gamma d\Omega. \quad (4)$$

Систему базисных функций для Ω обозначим $\{\omega_{k,l}^{\Omega}(x, y)\}_{k,l=0}^{N_x, N_y}$ и систему базисных функций для Γ — $\{\omega_m^{\Gamma}(x, y)\}_{m=1}^M$, где N_x, N_y — число узлов сеточного покрытия прямоугольной области Ω по осям x и y соответственно, M — число узлов сеточного покрытия границы Γ .

Подставляя в соотношение (4) вместо произвольной функции γ систему базисных функций для метода Галёркина, можно записать систему линейных уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{f}. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N_x N_y})^T$ — вектор, который составлен из коэффициентов $\{u_{N_y(k)+l} = u_{k,l}\}_{k,l=0}^{N_x, N_y}$ разложения

$$u_{\Omega}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N_x, N_y} u_{k,l} \omega_{k,l}^{\Omega}(x, y), \quad (6)$$

а $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{N_x N_y})^T$ — вектор, составленный из коэффициентов разложения

$$f_{\Omega}(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N_x, N_y} f_{k,l} \omega_{k,l}^{\Omega}(x, y). \quad (7)$$

Хотя равенства (6) и (7) действительны для всех точек (x, y) в области Ω , необходимо записать аналогичное разложение для поля и его частных производных на границе Γ :

$$u_{\Gamma}(x, y) = \sum_{m=1}^M u_m \omega_m^{\Gamma}(x, y), \quad (8)$$

$$v_{\Gamma}(x, y) = \sum_{m=1}^M v_m \omega_m^{\Gamma}(x, y), \quad (9)$$

$$f_{\Gamma}(x, y) = \sum_{m=1}^M f_m \omega_m^{\Gamma}(x, y), \quad (10)$$

где $(x, y) \in \Gamma$; $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_M)^T$ — вектор, составленный из коэффициентов разложения v_k .

Элементы матрицы **A** вычисляются по формуле

$$a_{N_y(k)+l, N_y(i)+j} = \iint_{\Omega_{k,l}} \left(\frac{1}{p(x,y)} \left[\frac{\partial \omega_{k,l}^\Omega(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \omega_{i,j}^\Omega(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{k,l}^\Omega(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \omega_{i,j}^\Omega(x,y)}{\partial y} \right] - \right. \\ \left. - k_0^2 q(x,y) \omega_{k,l}^\Omega(x,y) \omega_{i,j}^\Omega(x,y) \right) d\Omega, \quad k, i = 1, \dots, N_x, \quad l, j = 1, \dots, N_y \quad (11)$$

(здесь $\Omega_{k,l}$ — область разбиения области Ω , включающая узлы сети k и l).

Элементы матрицы **B** определяются по формуле

$$b_{m,s} = - \int_{\Gamma_{m,s}} \omega_m^\Gamma \omega_s^\Gamma dl, \quad m, s = 1, \dots, M \quad (12)$$

($\Gamma_{m,s}$ — линейная область границы Γ , включающая узлы m и s).

Элементы матрицы **C** находятся по формуле

$$c_{N_y(k)+l, N_y(i)+j} = \iint_{\Omega_{k,l}} \omega_{k,l}^\Omega(x,y) \omega_{i,j}^\Omega(x,y) d\Omega, \quad k, i = 1, \dots, N_x, \quad l, j = 1, \dots, N_y \quad (13)$$

($\Omega_{k,l}$ — область разбиения области Ω , включающая узлы сети k и l).

В качестве кусочно-линейного базиса определена функция вида

$$\omega_{k,l}^\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 - (x_k - x)/h - (y_l - y)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,1}^h, \\ 1 - (x_k - x)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,2}^h, \\ 1 + (y_l - y)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,3}^h, \\ 1 + (x_k - x)/h + (y_l - y)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,4}^h, \\ 1 + (x_k - x)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,5}^h, \\ 1 - (y_l - y)/h, & \text{если } x, y \in \Omega_{k,l,6}^h, \end{cases} \quad (14)$$

где h — длина сегмента сети покрытия.

Элементы $a_{k,l}^{i,j}$ матрицы **A**, $b_{m,s}$ матрицы **B** и $c_{k,l}^{i,j}$ матрицы **C** вычисляются из уравнений (11)–(13) соответственно. Тогда систему уравнений (5) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\Omega, \Omega}] & [\mathbf{A}_{\Gamma, \Omega}] & 0 \\ [\mathbf{A}_{\Omega, \Gamma}] & [\mathbf{A}_{\Gamma, \Gamma}] & [\mathbf{B}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Omega} \\ \mathbf{u}_{\Gamma} \\ \mathbf{v}_{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{\Omega, \Omega}] & [\mathbf{C}_{\Gamma, \Omega}] \\ [\mathbf{C}_{\Omega, \Gamma}] & [\mathbf{C}_{\Gamma, \Gamma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Omega} \\ \mathbf{f}_{\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система уравнений (15) не имеет единственного решения, так как она состоит из N равенств с $N+M$ неизвестными: $N = N_x N_y$ — общее число узловых величин поля $u_{k,l}(x,y)$ в области Ω и M производных по нормали на граничных узлах $v_{k,l}(x,y)$.

Определим граничные условия для поля и его производных на границах Γ_1 и Γ_3 , удовлетворяющие уравнению (1).

Поле в областях Ψ_1 и Ψ_3 может быть представлено в виде разложений Рэлея (суперпозиций плоских волн). В зоне Ψ_1 z -компоненты поля имеют вид [19, 20]

$$u(x, y) = \exp(ik_0(\alpha_0 x - \beta_0 y)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(ik_0(\alpha_n x + \beta_n y)), \quad (16)$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{\varepsilon_1} \sin(\theta) + n(\lambda_0/d); \quad \beta_n = \sqrt{\varepsilon_1 - \alpha_n^2}. \quad (17)$$

Функция $u(x, y)$ представляет компоненту $E_z(x, y)$ электрического поля для случая ТЕ-поляризации и компоненту $H_z(x, y)$ магнитного поля для случая ТМ-поляризации.

В зоне Ψ_3 z -компоненты имеют вид

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp(ik_0(\alpha_n x + \tilde{\beta}_n y)), \quad (18)$$

где

$$\tilde{\beta}_n = \sqrt{\varepsilon_3 - \alpha_n^2}. \quad (19)$$

Разложения Рэлея (16) и (18) являются решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (20)$$

при $k^2 = k_0^2 \varepsilon_1$ и $k^2 = k_0^2 \varepsilon_3$ соответственно.

Коэффициенты T_n и R_n находятся как фурье-коэффициенты разложения поля по периоду d :

$$R_n = \frac{1}{d} \int_0^d u(x, a) e^{-ik_0 \alpha_n x} dx, \quad T_n = \frac{1}{d} \int_0^d u(x, 0) e^{-ik_0 \alpha_n x} dx.$$

Для определения коэффициентов отражения R_n и пропускания T_n воспользуемся дискретным преобразованием Фурье:

$$R_n = \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} (u(x_k, a) - u^{in}(x_k, a)) \exp(-ik_0 \alpha_n x_k), \quad (21)$$

$$T_n = \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_x} u(x_k, 0) \exp(-ik_0 \alpha_n x_k). \quad (22)$$

Эти коэффициенты описывают амплитуду и фазовый сдвиг распространяющихся плоских волн. Более точно модули $|R_n|$ и $|T_n|$ — это амплитуды n -го отражённого и прошедшего порядков, а $\arg[R_n/|R_n|]$ и $\arg[T_n/|T_n|]$ — фазовые сдвиги.

Подставляя (21) в разложение (16), получим выражение для поля в области Ψ_1 :

$$u(x, y) = \exp(ik_0(\alpha_0 x - \beta_0 y)) + \frac{1}{N_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_x} u(x_k, a) \exp(ik_0(\alpha_n(x - x_k) + \beta_n y)). \quad (23)$$

Аналогично, подставляя (22) в разложение (18), получим выражение для поля в области Ψ_3 :

$$u(x, y) = \frac{1}{N_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_x} u(x_k, 0) \exp(ik_0(\alpha_n(x - x_k) + \tilde{\beta}_n y)). \quad (24)$$

Соотношения (23), (24) могут быть представлены в матричном виде для поля $u(x, y)$ на границах Γ_1 и Γ_3 :

$$[\mathbf{D}]\mathbf{u}_\Gamma + [\mathbf{G}]\mathbf{v}_\Gamma = [\mathbf{E}], \quad (25)$$

с элементами матриц \mathbf{D} и \mathbf{E} вида

$$d_{\Gamma_1, \Gamma_2}^{s, m} = \delta_{s, m} - \frac{1}{N_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(ik_0\alpha_n(x_s - x_m)), \quad (26)$$

$$e_{\Gamma_1}^s = 0; \quad e_{\Gamma_3}^s = \exp(ik_0\alpha_0 x_s), \quad m, s = 1, \dots, N_x. \quad (27)$$

Граничные условия для поля и его производные на границах Γ_2 и Γ_4 являются квазипериодическими вида [19, 20]

$$u_{\Gamma_4} = u_{\Gamma_2} e^{ik_0\alpha_0 d}; \quad v_{\Gamma_4} = v_{\Gamma_2} e^{ik_0\alpha_0 d}. \quad (28)$$

Разложения (8) и (9) и граничные условия (28) позволяют записать для коэффициентов поля и его производных на границах Γ_2 и Γ_4 выражения

$$u(x_{N_x}, y_s) = u(x_1, y_s) e^{ik_0\alpha_0 d}; \quad v(x_{N_x}, y_s) = v(x_1, y_s) e^{ik_0\alpha_0 d}, \quad s = 1, \dots, N_y. \quad (29)$$

Элементы матриц \mathbf{D} и \mathbf{G} , соответствующие выражениям (29), имеют вид

$$d_{\Gamma_2}^s = 1; \quad d_{\Gamma_4}^s = e^{ik_0\alpha_0 d}; \quad g_{\Gamma_2}^s = 1; \quad g_{\Gamma_4}^s = e^{ik_0\alpha_0 d};$$

$$e_{\Gamma_2}^s = 0; \quad e_{\Gamma_4}^s = 0, \quad s = 1, \dots, N_y. \quad (30)$$

Объединяя системы уравнений (15) и (30), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для решения задачи дифракции плоской волны на периодическом двумерном микрообъекте:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\Omega, \Omega}] & [\mathbf{A}_{\Gamma, \Omega}] & 0 \\ [\mathbf{A}_{\Omega, \Gamma}] & [\mathbf{A}_{\Gamma, \Gamma}] & [\mathbf{B}] \\ 0 & [\mathbf{D}] & [\mathbf{G}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\Omega \\ \mathbf{u}_\Gamma \\ \mathbf{v}_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{C}_{\Omega, \Omega}] & [\mathbf{C}_{\Gamma, \Omega}] & 0 \\ [\mathbf{C}_{\Omega, \Gamma}] & [\mathbf{C}_{\Gamma, \Gamma}] & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{E}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\Omega \\ \mathbf{f}_\Gamma \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

После определения значений поля в области Ω производится расчёт коэффициентов отражения R_n и пропускания T_n с использованием формул (21) и (22). Нормированные интенсивности отражённых I^R и прошедших I^T порядков рассчитываются следующим образом [6, 10, 11]:

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}; \quad I_n^T = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} |T_n|^2 \frac{\tilde{\beta}_n}{\beta_0} \quad \left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_3} I_n^T = 1 \right), \quad (32)$$

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}; \quad I_n^T = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} |T_n|^2 \frac{\tilde{\beta}_n}{\beta_0} \quad \left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_3} I_n^T = 1 \right) \quad (33)$$

для ТЕ- и ТМ-поляризованных волн соответственно. Выражения (32), (33) определяют часть энергии падающей волны, которая перейдёт к n -му порядку дифракции. Заметим, что интенсивности порядков распространения существуют для непоглощающих материалов, т. е. для $\text{Im}\sqrt{\varepsilon_i} = 0$. Множества U_1 и U_2 в (32) и (33) являются множествами индексов, соответствующих отражённым и прошедшим порядкам дифракции:

$$U_1 = \begin{cases} n \mid \frac{\alpha_n^2}{\varepsilon_1} < 1, & \text{Im}\sqrt{\varepsilon_1} = 0, \\ 0, & \text{Im}\sqrt{\varepsilon_1} > 0; \end{cases} \quad U_3 = \begin{cases} n \mid \frac{\alpha_n^2}{\varepsilon_3} < 1, & \text{Im}\sqrt{\varepsilon_3} = 0, \\ 0, & \text{Im}\sqrt{\varepsilon_3} > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Коэффициенты с $n \notin U_1$ и $n \notin U_3$ описывают затухающие волны.

Численное моделирование. Рассмотрим в качестве примера дифракцию плоской волны $\lambda_0 = 0,6$ мкм на бинарной диэлектрической дифракционной решётке с коэффициентом заполнения 0,25 толщиной 0,24 мкм. Область расчёта Ω покрывалась сетью размером 100×140 узлов. При моделировании объединённым методом конечных элементов — разложения Рэлея (МКЭР) длина сегмента сети покрытия h изменялась от $\lambda_0/300$ до $\lambda_0/30$. Таким образом, период решёток менялся от 0,2 до 2,0 мкм. Также проводилось моделирование дифракции методом связанных волн (Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA)) [22]. Погрешность моделирования рассчитывалась следующим образом:

$$\Delta I^R = \left| I_{\text{МКЭР}}^R - I_{\text{RCWA}}^R \right|, \quad \Delta I^T = \left| I_{\text{МКЭР}}^T - I_{\text{RCWA}}^T \right|$$

(I^R и I^T — интенсивности отражённых и прошедших нулевых дифракционных порядков).

В первом примере поляризованная плоская волна падает по нормали из воздуха ($\varepsilon_1 = 1$) на решётку на подложке ($\varepsilon_3 = 2,25$). На рис. 2 представлены зависимости отклонения интенсивностей прошедшего ΔI^T и отражённого ΔI^R нулевых порядков от длины

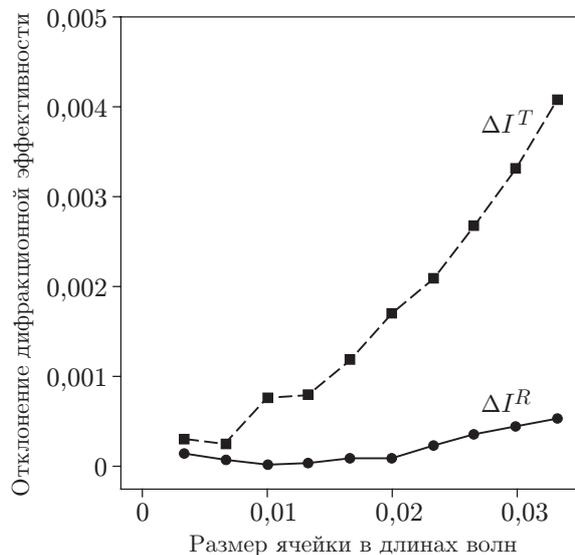


Рис. 2

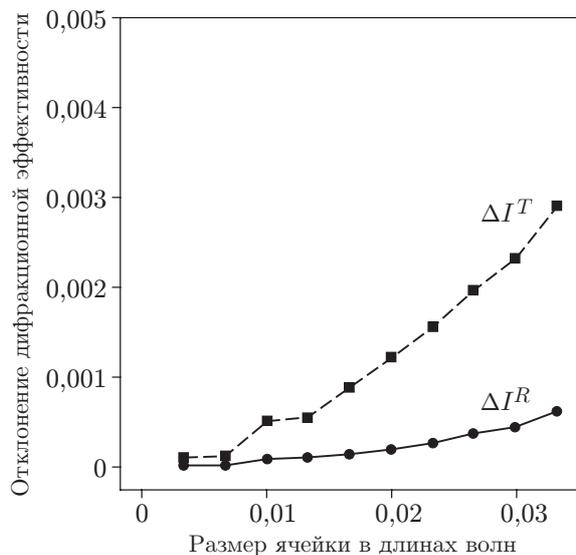


Рис. 3

сегмента сети покрытия h/λ в случае падения ТЕ-поляризованной волны. Для данного эксперимента при длине $h < \lambda/60$ отклонение ΔI^T составляет менее 0,001, а отклонение ΔI^R — менее 0,00008. На рис. 3 приведены зависимости отклонения интенсивностей ΔI^T и ΔI^R от h/λ в случае падения ТМ-поляризованной волны. Для данного эксперимента при длине $h < \lambda/55$ отклонение ΔI^T составляет менее 0,001, отклонение ΔI^R — менее 0,00018.

Во втором примере поляризованная плоская волна падает по нормали из подложки с решёткой ($\varepsilon_1 = 2,25$) в воздух ($\varepsilon_3 = 1$). На рис. 4 показаны зависимости отклонения интенсивностей ΔI^T и ΔI^R от h/λ в случае падения ТЕ-поляризованной волны. В этом эксперименте при длине $h < \lambda/43$ отклонение ΔI^T составляет менее 0,001, а отклонение ΔI^R — менее 0,00034. На рис. 5 представлены зависимости отклонения интенсивностей ΔI^T и ΔI^R от h/λ в случае падения ТМ-поляризованной волны. Здесь при длине $h < \lambda/60$ отклонение ΔI^T составляет менее 0,001, отклонение ΔI^R — менее 0,00022.

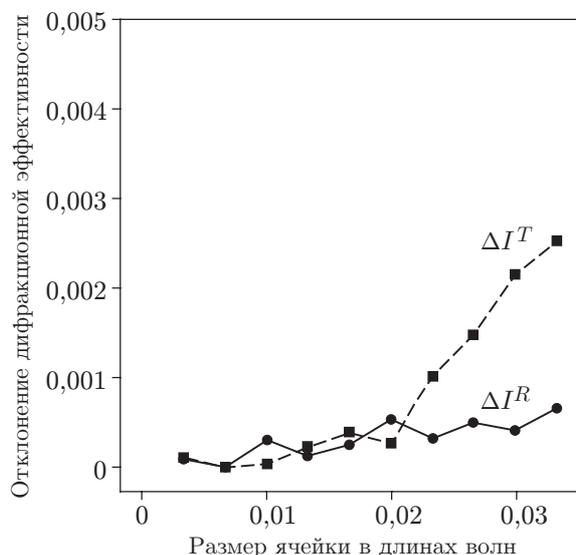


Рис. 4

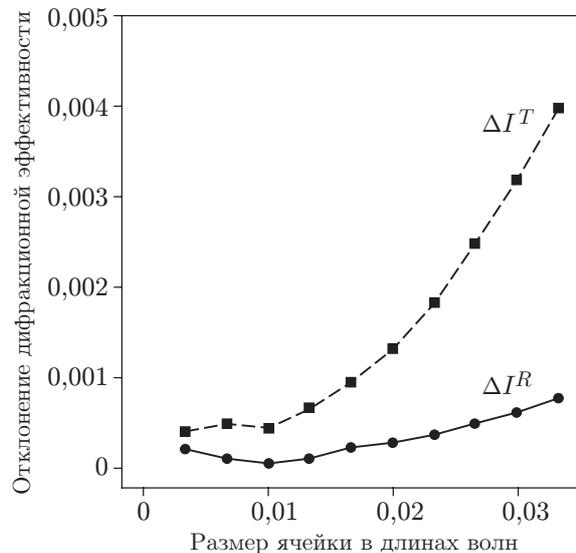


Рис. 5

Таким образом, сравнение результатов, полученных разработанным МКЭР и методом RCWA, показало их хорошее соответствие.

Заключение. Предлагаемый в данной работе метод позволяет рассчитывать дифракцию плоской электромагнитной волны на периодических диэлектрических и проводящих микрообъектах с субволновыми размерами неоднородностей. Новизна объединённого метода заключается в применении при расчёте поля дифракции на неоднородном периодическом оптическом объекте метода Галёркина и разложения Рэлея для реализации граничных условий, независимых от угла падения волны. Отличительной особенностью данного метода является возможность расчёта структур с множественным рассеянием и резонансными эффектами, таких как фотонные кристаллы, фотонно-кристаллические линзы, композитные металло-диэлектрические структуры, структуры с плазмонными резонансами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Moharam M. G., Gaylord T. K.** Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction // JOSA. 1981. **71**, N 7. P. 811–818.
2. **Li L.** New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings // JOSA A. 1997. **14**, N 10. P. 2758–2767.
3. **Neviere M., Popov E.** Light propagation in periodic media: Differential theory and design. N. Y.: Marcel Dekker, 2003. 410 p.
4. **Chandezon J., Maystre D., Raoult G.** A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application // Journ. Opt. 1980. **11**, N 4. P. 235–241.
5. **Garnet G.** Reformulation of the lamellar grating problem through the concept of adaptive spatial resolution // JOSA A. 1999. **16**, N 10. P. 2510–2516.
6. **Electromagnetic theory of gratings.** Topics in current physics /Ed. R. Petit. Berlin: Springer-Verlag. 1980. Vol. 22. 284 p.
7. **Prather D. W., Mirotznik M. S., Mait J. N.** Boundary integral methods applied to the analysis of diffractive optical elements // JOSA A. 1997. **14**, N 1. P. 34–43.
8. **Vincent P.** A finite-difference method for dielectric and conducting crossed gratings // Opt. Commun. 1978. **26**, N 3. P. 293–296.

9. **Головашкин Д. Л., Казанский Н. Л., Сафина В. Н.** Применение метода конечных разностей для решения задачи дифракции Н-волны на двумерных диэлектрических решетках // Компьютерная оптика. 2003. № 25. С. 36–40.
10. **Urbach Н. Р.** Convergence of the Galerkin method for two-dimensional electromagnetic problems // SIAM Journ. Numer. Anal. 1991. **28**, N 3. P. 697–710.
11. **Bao G.** Finite element approximation of time harmonic waves in periodic structures // SIAM Journ. Numer. Anal. 1995. **32**, N 4. P. 1155–1169.
12. **Elschner J., Hinder R., Schmidt G.** Finite element solution of conical diffraction problems // Adv. Comp. Math. 2002. **16**, N 2–3. P. 139–156.
13. **Нестеренко Д. В., Котляр В. В.** Объединенный метод конечных элементов и граничных элементов для анализа дифракции света на дифракционных решетках // Компьютерная оптика. 2008. **32**, № 3. С. 238–245.
14. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 720 с.
15. **Schmidt G.** Electromagnetic scattering by periodic structures // Journ. Math. Sci. 2004. **124**, N 6. P. 5390–5406.
16. **Bao G.** Variational approximation of Maxwell's equations in biperiodic structures // SIAM Journ. Appl. Math. 1997. **57**, N 2. P. 364–381.
17. **Bao G., Dobson D. C.** On the scattering by a biperiodic structure // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. **128**, N 9. P. 2715–2723.
18. **Bao G., Chen Z., Wu H.** Adaptive finite-element method for diffraction gratings // JOSA A. 2005. **22**, N 6. P. 1106–1114.
19. **Rathsfield A., Hsiao G. C., Elschner J.** Grating profile reconstruction based on finite elements and optimization techniques // SIAM Journ. Appl. Math. 2003. **64**, N 2. P. 525–545.
20. **Методы компьютерной оптики** / Под ред. В. А. Сойфера. М.: Физматлит, 2000. 688 с.
21. **Неганов В. А., Раевский С. Б., Яровой Г. П.** Линейная макроскопическая электродинамика. М.: Радио и связь, 2000. 509 с.
22. **GSolver** [Программа] / Сайт компании Grating Solver Development Company. URL: <http://www.gsolver.com> (дата обращения: 1.12.2010).

Поступила в редакцию 17 ноября 2010 г.
