

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.2

ОЦЕНИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРОГОВЫХ ВЕЛИЧИН  
В АЛГОРИТМАХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙЮ. Е. Воскобойников<sup>1</sup>, А. В. Гочаков<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»,  
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

E-mail: voscob@mail.ru

<sup>2</sup>Государственное учреждение «Сибирский региональный научно-исследовательский  
гидрометеорологический институт»,  
630099, г. Новосибирск, ул. Советская, 30

Предложен новый алгоритм оценивания оптимальных пороговых величин в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации сигналов и изображений. Выполнен большой объём вычислительного эксперимента по сравнению этого порога с пороговыми величинами, широко используемыми в алгоритмах вейвлет-фильтрации. Показано, что применение предложенного порога существенно уменьшает ошибку фильтрации как гладких, так и контрастных изображений.

*Ключевые слова:* фильтрация изображений, локально-пространственные фильтры, вейвлет-фильтрация.

**Введение.** В последние десятилетия для фильтрации зашумлённых сигналов и изображений широко используется разложение сигнала в базисе вейвлет-функций [1–3]. При этом удобной формой является многомасштабное представление вида [4, 5]

$$\hat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (1)$$

которое можно интерпретировать как восстановление исходного сигнала  $f(t)$  по его коэффициентам разложения на  $J$ -м уровне. Функции  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$  называются масштабирующими (или отцовскими), а функции  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  — вейвлет-функциями (или материнскими). Коэффициенты разложения  $a_{j,k}$  называются аппроксимирующими,  $d_{j,k}$  — детализирующими, и определяются выражениями

$$a_{j,k} = \int_R f(t) \varphi_{j,k}(t) dt; \quad d_{j,k} = \int_R f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (2)$$

где  $R$  — интервал определения функции  $f(t)$ ; коэффициент масштаба  $j$  характеризует уровень разложения; переменная  $k$  — временной сдвиг той или иной базисной функции. Напомним, что системы функций  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  составляют ортогональный базис пространств  $V_j$ ,  $W_j$ ,  $-\infty < j < \infty$ , и определяются соотношениями [1–3]

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k), \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k),$$

где функции  $\{\varphi(t - k)\}$ ,  $\{\psi(t - k)\}$  — ортогональный базис «нулевых» пространств  $V_0$ ,  $W_0$  соответственно. При этом пространство  $W_j$  ортогонально пространству  $V_j$  и  $V_{j-1} =$

$= V_j \oplus W_j$ . Чем меньше номер  $j$ , тем более «мелкие» структуры исходной функции  $f(t)$  могут быть представлены в базисах  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  и тем ближе реконструированный сигнал  $\hat{f}(t)$  к исходному.

На практике значения функции  $f(t)$  заданы (измерены) в  $N$  узлах  $t_i$  со случайной погрешностью  $\eta_i$ . Это означает, что коэффициенты разложения (2) (обозначим их  $\tilde{d}_{j,k}$ ,  $\tilde{a}_{j,k}$ ) также вычисляются со случайными ошибками. Тогда фильтрация сигналов и изображений с использованием вейвлет-разложения включает в себя три этапа:

1. Вычисление прямого дискретного вейвлет-преобразования (нахождение коэффициентов разложения  $\tilde{d}_{j,k}$ ,  $\tilde{a}_{j,k}$  по зашумлённым значениям сигнала).

2. Обработка зашумлённых коэффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$ ,  $\tilde{a}_{j,k}$  (построение оценок  $\hat{d}_{j,k}$ ,  $\hat{a}_{j,k}$  для неизвестных точных коэффициентов  $d_{j,k}$ ,  $a_{j,k}$ ).

3. Вычисление обратного дискретного вейвлет-преобразования (нахождение значений «сглаженной» функции (1) в заданных узлах с использованием оценок  $\hat{d}_{j,k}$ ,  $\hat{a}_{j,k}$ ).

Совокупность этих этапов обработки далее будем называть вейвлет-фильтрацией.

Очевидно, что качество фильтрации зашумлённого сигнала определяется алгоритмами второго этапа. Большинство используемых алгоритмов носит пороговый характер: коэффициент разложения, меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины, зануляется, в противном случае коэффициент сохраняется или подвергается линейному преобразованию. При этом выбор пороговой величины существенно влияет на ошибку фильтрации и эта величина, по сути, является управляющим параметром алгоритма вейвлет-фильтрации.

В литературе описано несколько алгоритмов выбора пороговых величин, но все они имеют известные недостатки. Так, одни алгоритмы имеют «хорошие» свойства только в асимптотике, т. е. при  $N \rightarrow \infty$ , другие получены не из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО) фильтрации и поэтому имеют ошибку фильтрации на 20–60 % больше по сравнению с минимальной.

В данной работе предлагается новый подход к выбору пороговых величин из условия минимума СКО фильтрации. Алгоритмы, построенные на основе этого подхода, позволяют с хорошей точностью оценить оптимальные значения пороговых величин, для которых СКО фильтрации минимальна. Результаты вычислительного эксперимента демонстрируют преимущества предлагаемых алгоритмов оценивания перед широко используемыми способами выбора пороговых величин.

**Пороговые алгоритмы оценивания коэффициентов разложения.** Теоретической основой пороговых алгоритмов является следующая предпосылка: уровень ошибок вычисления коэффициентов разложения сравнительно мал относительно коэффициентов разложения точного сигнала, что позволяет распознать две ситуации: «шумовой» коэффициент (обусловлен шумом измерения) и «информативный» коэффициент (в основном определяется значениями точного сигнала). Таким образом, для успешной фильтрации необходимо обратить в нуль шумовые коэффициенты, сохранив при этом информативные коэффициенты разложения.

В определённой степени этому требованию удовлетворяют пороговые алгоритмы оценивания коэффициентов разложения, которые в зарубежной литературе получили название "thresholding". В этих алгоритмах наиболее часто используются две пороговые функции:

1) «жёсткая»

$$\text{hard}(\tilde{d}, \lambda) = \begin{cases} \tilde{d}, & \text{если } |\tilde{d}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}| < \lambda; \end{cases} \quad (3)$$

2) «мягкая»

$$\text{soft}(\tilde{d}, \lambda) = \text{sign}(\tilde{d})[|\tilde{d}| - \lambda]_+, \quad (4)$$

где обозначение  $[z]_+$  определяется как

$$[z]_+ = \begin{cases} z, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$$

Кроме приведённых пороговых функций на практике используются (но гораздо реже) и другие функции [6], параметрами которых также являются пороговые величины.

Величина порога  $\lambda$  играет роль управляющего параметра, влияющего на ошибку фильтрации. При заниженном значении  $\lambda$  часть шумовых коэффициентов разложения не зануляется и результат обратного вейвлет-преобразования (отфильтрованная функция) может содержать значительный остаточный шум, т. е. функция не достаточно сглажена. При завышенном пороге  $\lambda$  зануляются информативные коэффициенты и результат фильтрации оказывается «переглаженным».

Возникает вопрос: какая пороговая функция предпочтительнее для фильтрации шумов? Однозначный ответ дать затруднительно, но проведённый вычислительный эксперимент позволяет отметить следующие особенности пороговых функций *hard* и *soft*:

— функция *hard* приемлемо работает при низком уровне шума, когда все шумовые коэффициенты разложения по модулю меньше порога  $\lambda$  и зануляются, а все информативные превосходят по модулю порог  $\lambda$  и сохраняются;

— из-за уменьшения амплитуды коэффициента разложения на величину  $\lambda$  в функции *soft* возможно сглаживание (размытие) контрастных элементов обрабатываемого сигнала;

— отсутствие в функции *soft* разрыва в окрестности точки  $\lambda$  в определённой степени предотвращает появление осцилляций (эффекта Гиббса) в особых точках сигнала; этот эффект может проявиться при использовании пороговой функции *hard*.

Однако заметим, что всё-таки решающее влияние на ошибку фильтрации оказывает величина  $\lambda$  этих пороговых функций. Очевидно, что выбор  $\lambda$  желательно осуществить исходя из условия минимума некоторого функционала, характеризующего ошибку фильтрации. Так как исходными данными являются значения функции в узлах  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то в качестве такого функционала примем

$$\Delta(\lambda) = M \left[ \|\hat{f}_\lambda - f\|^2 \right], \quad (5)$$

где  $M[\cdot]$  — оператор математического ожидания;  $f$  — вектор, составленный из значений точной функции  $f(t)$  в узлах  $t_j$ ;  $\hat{f}_\lambda$  — вектор, составленный из значений сглаженной функции в тех же узлах. Далее  $\Delta(\lambda)$  будем называть СКО фильтрации. Кратко изложим некоторые способы выбора  $\lambda$ , широко используемые в алгоритмах вейвлет-фильтрации. При этом

— базисные функции  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  являются ортонормированными, что соответствует ортогональным вейвлетам (вейвлеты Добеши, Симлета, Кайфлета [7]);

— вычисление коэффициентов разложения осуществляется алгоритмом Малла [4, 5], и результатом является набор следующих коэффициентов:

$$\{\tilde{d}_{j_0+1,k}\}, \{\tilde{d}_{j_0+2,k}\}, \dots, \{\tilde{d}_{j_0+J,k}\}, \{\tilde{a}_{j_0+J,k}\}; \quad (6)$$

— относительный уровень ошибки вычисления аппроксимирующих коэффициентов  $\{\tilde{a}_{j_0+J,k}\}$  существенно (на порядок и более) меньше уровней ошибок детализирующих коэффициентов [8], поэтому пороговой обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты уровней  $j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, j_0 + J_{\text{fl}}$ , где  $J_{\text{fl}} \leq J$ ;

— шум измерения  $\eta_i$  имеет нулевое среднее  $M[\eta_i] = 0, i = 1, 2, \dots, N$ , одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ , и значения  $\eta_i$  и  $\eta_j$  не коррелированы при  $i \neq j$ .

При таких предположениях случайные ошибки вычисления аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов имеют нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  и не коррелированы между собой [8].

*Универсальный порог* предложен в работах [9, 10] и определяется для каждого  $j$ -го уровня разложения выражением

$$\lambda_j^U = \sigma \sqrt{2 \ln N_j}, \quad (7)$$

где  $N_j$  — число детализирующих коэффициентов на  $j$ -м уровне разложения. Таким образом, чем выше уровень разложения, тем меньше величина порога. Теоретическим обоснованием такого выбора может служить следующее утверждение, доказанное в [9, 11].

**Утверждение 1.** Предположим, что  $f(x)$  является кусочным полиномом на интервале  $[0, 1]$ . Тогда оптимальная величина порога  $\lambda_{\text{opt}}$  функции soft, минимизирующая СКО фильтрации (5) при  $N \rightarrow \infty$ , имеет порядок

$$\lambda_{\text{opt}} \sim \sigma \sqrt{2 \ln N}. \quad (8)$$

Заметим, что порог  $\lambda_j^U$  можно использовать и с функциями hard и soft. По-видимому, это обстоятельство и определило название порога — «универсальный».

При конечных значениях  $N$  (меньше нескольких тысяч) вычисленные значения  $\lambda_j^U$  заметно (особенно для функции soft) отличаются в большую сторону от оптимальных значений  $\lambda_{j_{\text{opt}}}$ , что является существенным недостатком этого порога.

*SURE-порог.* Это пороговое значение рассмотрено в [11, 12]. Идея заключается в нахождении величины  $\lambda$ , минимизирующей несмещённую оценку риска Стейна. Оценка риска для  $j$ -го уровня разложения определяется как

$$\text{SURE}_j(\mu) = N_j + \sum_{k=1}^{N_j} \left[ \min \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma}, \mu \right) \right]^2 - 2 \sum_{k=1}^{N_j} \text{If} \left( \frac{|\tilde{d}_{j,k}|}{\sigma} \leq \mu \right), \quad (9)$$

где  $\text{If}(\text{условие})$  — условная функция, принимающая значение 1, если условие выполняется, и значение 0 — в противном случае. Пороговое значение на  $j$ -м уровне разложения рассчитывается из выражения

$$\lambda_j^S = \sigma \mu_j^S, \quad (10)$$

где  $\mu_j^S$  — значение  $\mu$ , доставляющее минимум функционалу (9). Предлагается пороговую величину  $\lambda_j^S$  применять к функции soft.

*Байесовский порог* рекомендуется использовать с пороговой функцией soft, он находится из выражения [13]

$$\lambda_j^B = \sigma^2 / \hat{\sigma}_{d_j}, \quad (11)$$

где  $\hat{\sigma}_{d_j}$  — оценка среднеквадратического отклонения точных детализирующих коэффициентов  $j$ -го уровня разложения, вычисляемая по формуле

$$\hat{\sigma}_{d_j} = \left[ \max \left( \sigma_{\tilde{d}_j}^2 - \sigma^2, 0 \right) \right]^{1/2}.$$

Дисперсия  $\sigma_{\tilde{d}_j}^2$  зашумлённых коэффициентов разложения  $j$ -го уровня находится следующим образом:

$$\sigma_{\tilde{d}_j}^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \tilde{d}_{j,k}^2.$$

Общими чертами приведённых способов выбора  $\lambda$  являются: определение пороговой величины для каждого уровня разложения, нахождение выражения для пороговых величин при конечных значениях  $N$  не из условия минимума СКО (5).

Если первая особенность позволяет уменьшить ошибку фильтрации за счёт более детального учёта соотношения информативных и шумовых коэффициентов на каждом уровне разложения, то вторая обуславливает недостаток этих способов, не позволяющий получить минимальную ошибку фильтрации.

**Выбор пороговых величин на основе критерия оптимальности.** Критерий оптимальности предложен в работах [14, 15] и широко применяется при выборе параметра регуляризации линейных регуляризирующих алгоритмов решения некорректных задач [16, 17]. Алгоритмы, построенные на основе этого критерия, позволяют оценить (с хорошей точностью) оптимальный параметр регуляризации без учёта количественной информации об искомом решении задачи, например при выборе параметра сглаживания в линейных алгоритмах фурье-фильтрации [18, с. 37–45].

Заметим, что все вышеназванные алгоритмы линейные (при заданной величине параметра), а пороговые алгоритмы вейвлет-фильтрации нелинейные. Однако идею критерия оптимальности попытаемся использовать и при оценивании оптимальной пороговой величины  $\lambda$ . Для этого предположим, что оператор матричного уравнения является единичной матрицей. Тогда приходим к уравнению  $\tilde{f} = f + \eta$ , которое необходимо решить относительно вектора  $f$ , т. е. отфильтровать шум  $\eta$ .

Используя результаты работ [15, 16] в этом частном случае, можно показать, что в качестве оценки оптимального параметра сглаживания линейного алгоритма фильтрации принимается значение  $\alpha_W$ , для которого выполняется неравенство

$$\vartheta_{m, \gamma/2} \leq \rho_W(\alpha_W) \leq \vartheta_{m, 1-\gamma/2}, \quad (12)$$

где  $\vartheta_{m, \gamma/2}$ ,  $\vartheta_{m, 1-\gamma/2}$  — квантили  $\chi_m^2$ -распределения с  $m$  степенями свободы уровней  $\gamma/2$ ,  $1 - \gamma/2$  соответственно;  $\gamma$  — вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно  $\gamma = 0,05$ );  $m = N$  — число значений одномерного фильтруемого сигнала. Критерий  $\rho_W(\alpha)$  находится из выражения

$$\rho_W(\alpha) = \sum_{i=1}^m \frac{e_{\alpha_i} \tilde{f}_i}{\sigma^2},$$

где  $e_{\alpha_i} = \tilde{f}_i - \hat{f}_{\alpha_i}$  — компоненты вектора невязки, определяемые разницей между заданным значением сигнала  $\tilde{f}_i$  и отфильтрованным  $\hat{f}_{\alpha_i}$  при параметре сглаживания  $\alpha$ . Если число

степеней свободы  $m > 30$ , то  $\chi_m^2$ -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $2m$ . Приняв вероятность ошибки первого рода  $\gamma = 0,05$ , получим формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (12):

$$\vartheta_{m,0,025} = m - 1,96\sqrt{2m}; \quad \vartheta_{m,0,975} = m + 1,96\sqrt{2m}. \quad (13)$$

Для определения  $\alpha_W$  используется любая итерационная процедура решения уравнения

$$\rho_W(\alpha) = m, \quad (14)$$

которая завершается, как только очередное приближение  $\alpha^{(n)}$  удовлетворяет условию (12).

Вернёмся к пороговым алгоритмам вейвлет-фильтрации. Учитывая асимптотическую оптимальность универсального порога  $\lambda_j^U$ , величину порога на каждом  $j$ -м уровне разложения будем задавать выражением

$$\lambda_j(\beta) = \beta\sqrt{2\ln(N_j)} = \beta c_j. \quad (15)$$

Необходимо построить оценку величины  $\beta_{\text{opt}}$ , которая минимизирует СКО фильтрации (5) при пороговых величинах (15).

Можно показать, что в случае ортогональных вейвлетов критерий  $\rho_W(\beta)$  вычисляется для функций soft и hard через коэффициенты вейвлет-разложения:

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - \text{soft}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta))),$$

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k \tilde{d}_{j,k} (\tilde{d}_{j,k} - \text{hard}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda_j(\beta))).$$

В качестве оценки  $\beta_{\text{opt}}$  принимается величина  $\beta_W$ , для которой выполняется неравенство

$$\vartheta_{m,\gamma/2} \leq \rho_W(\beta_W) \leq \vartheta_{m,1-\gamma/2}. \quad (16)$$

Тогда пороговая величина, вычисленная на основе критерия оптимальности, определяется выражением

$$\lambda_j^W = \beta_W \sqrt{2\ln(N_j)}. \quad (17)$$

Для иллюстрации поведения критерия  $\rho_W(\beta)$  показаны его значения для функции hard и функции soft (рис. 1, кривые 1), которые были вычислены при вейвлет-фильтрации изображения LENA (рис. 2, a) размером  $256 \times 256$  пикселей, искажённого шумом с относительным уровнем  $\delta_F = 0,10$ . На рис. 1 показаны также значения относительной ошибки фильтрации  $\delta(\beta)$  (кривые 2) и две величины  $\vartheta_{m,0,025}$ ,  $\vartheta_{m,0,975}$  при  $m = 256 \times 256 = 65536$  (прямые 3), которые из-за масштаба рисунка слились в одну линию. Видно, что точка пересечения  $\rho_W(\beta)$  с прямой 3 (т. е. значение  $\beta_W$ ) соответствует области минимума относительной ошибки фильтрации  $\delta(\beta)$ . Следовательно, можно сделать вывод о приемлемой

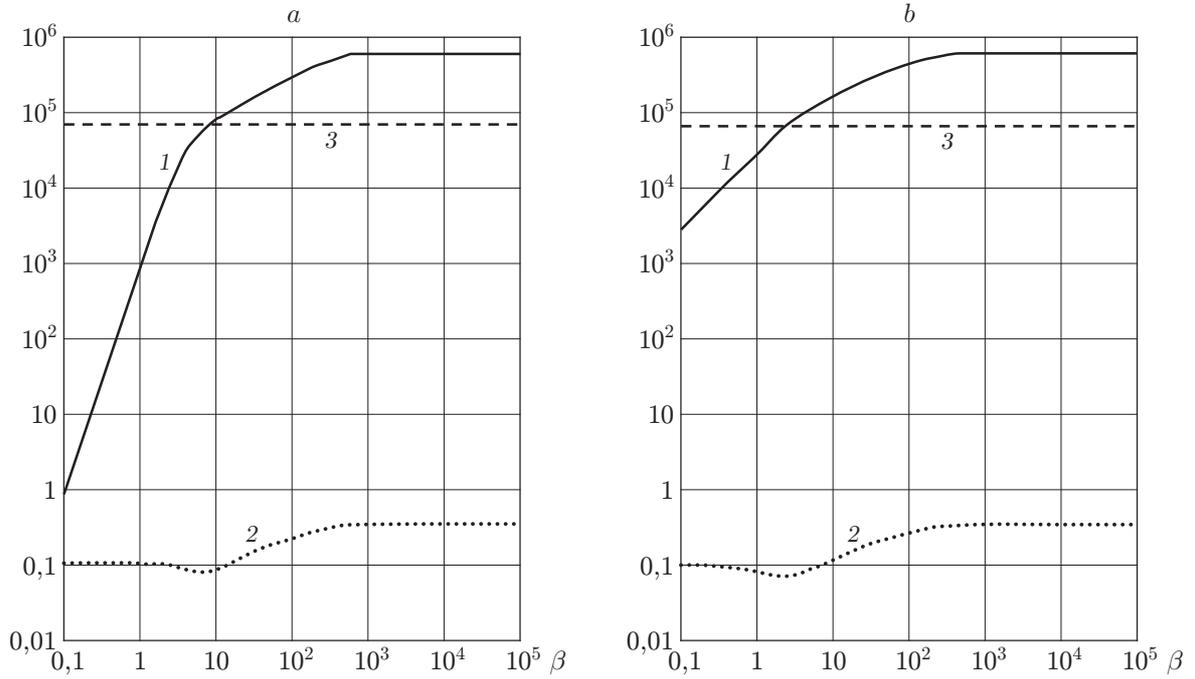


Рис. 1

точности оценки  $\beta_W$  для оптимальной величины  $\beta_{opt}$ . Этот вывод также подтверждается приводимыми далее результатами вычислительного эксперимента.

Рассмотрим свойства критерия  $\rho_W(\beta)$ . Выполнив несложные преобразования, для функций soft и hard представим  $\rho_W(\lambda)$  в виде

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 + \beta \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| > \beta c_j} \tilde{d}_{j,k}^2 c_j \right],$$

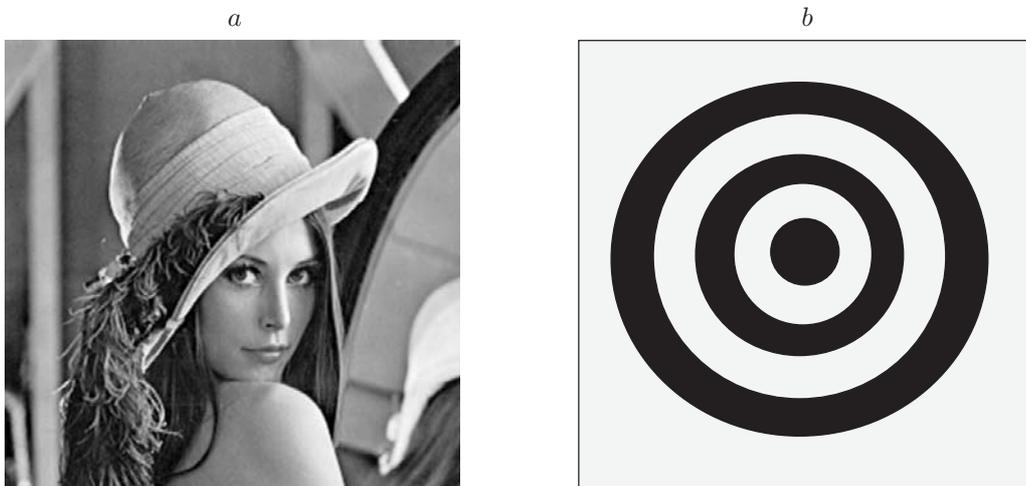


Рис. 2

$$\rho_W(\beta) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \leq \beta c_j} \tilde{d}_{j,k}^2,$$

где выражение в правой части означает суммирование только тех коэффициентов  $\tilde{d}_{j,k}$ , которые по абсолютной величине меньше или равны  $\beta c_j$ . Видно, что статистика  $\rho_W(\beta)$  для функции soft является непрерывной функцией параметра  $\beta$ , в то же время  $\rho_W(\beta)$  для функции hard может иметь разрывы первого рода при небольшом числе измерений  $m$  и небольшом уровне шума.

Заметим, что вычисление  $\beta_W$  сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_W(\beta) = m, \quad (18)$$

где  $m = N$  — число значений фильтруемого сигнала. Однако итерационный процесс прекращается, как только  $\rho_W(\beta^{(n)})$  попадает в интервал  $[\vartheta_{m,\gamma/2}, \vartheta_{m,1-\gamma/2}]$ . Количество итераций, необходимых для этого, гораздо меньше, чем при поиске корня нелинейного уравнения с заданной точностью  $\varepsilon \in [10^{-8}, 10^{-6}]$ . Это обуславливает возможность эффективно использовать «медленные» итерационные алгоритмы (например, метод дихотомии — деление отрезка пополам).

**Утверждение 2.** Если

$$\rho_W(\infty) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{f}_i^2 > \vartheta_{m,1-\beta/2}, \quad (19)$$

то существует конечное значение  $\beta_W$ , для которого выполняется неравенство (16).

**Доказательство.** Если выполняется условие (19), то точка  $\beta = \infty$  может рассматриваться как верхняя граница интервала локализации корня уравнения (18). Если  $\beta \rightarrow 0$ , то  $\rho_W(\beta) \rightarrow 0$ , и поэтому  $\beta = 0$  может рассматриваться как нижняя граница интервала локализации. Таким образом, при выполнении (19) обязательно существует хотя бы одно значение  $0 \leq \beta < \infty$ , для которого  $\rho_W(\beta)$  удовлетворяет условию (16).

Невыполнение (19) означает, что значения  $\tilde{f}_i$  зависят только от шума  $\eta_i$ , т. е. значения точной функции  $f(x_i) \equiv 0$ . Тогда  $\beta_W = \infty$  и сглаженные значения  $\hat{f}_i \equiv 0$ .

Заметим, что изложенный алгоритм построения оценки  $\beta_W$  для  $\beta_{\text{opt}}$  легко обобщается для вейвлет-фильтрации изображений. В этом случае число степеней свободы (см. (13), (18)) определяется как  $m = N_x N_y$ , где  $N_x, N_y$  — размеры фильтруемого изображения.

Для вычисления всех приведённых пороговых величин используется дисперсия шума  $\sigma^2$  или среднееквадратическое отклонение  $\sigma$ . На практике, как правило, эти величины неизвестны и можно применять оценку

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)}{0,6745}, \quad (20)$$

где оператор  $\text{median}(|\tilde{d}_{1,k}|)$  вычисляет медиану абсолютных величин детализирующих коэффициентов уровня разложения  $j_0 + 1$  (объём выборки равен  $N/2$ ). Эта оценка широко используется в робастных алгоритмах регрессионного анализа (см., например, [19]), применительно к алгоритмам вейвлет-фильтрации она исследовалась в работе [8], где была показана приемлемая точность оценки (20). Так, для точной дисперсии  $\sigma^2 = 0,91 \cdot 10^{-1}$  значения оценки (20), вычисленные по 30 реализациям ( $N/2 = 1024$ ), находились в интервале  $[0,88 \cdot 10^{-1}, 0,97 \cdot 10^{-1}]$ .

**Численные исследования пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации изображений.** Некоторые исследования точности вейвлет-фильтрации одномерных сигналов с использованием пороговых величин (7), (10), (11) выполнены в [20]. В предлагаемой работе приведём результаты вейвлет-фильтрации изображений, акцентируя внимание читателей на свойстве оптимальности той или иной пороговой величины. В качестве вейвлетов применялись ортогональные вейвлеты Добеши8.

Для тестирования были взяты изображения LENA и TARGET (см. рис. 2, *a*, *b*) размером  $256 \times 256$  пикселей. По статистической природе моделируемого шума выполненный вычислительный эксперимент можно условно разделить на две серии:

1. *Белый шум измерения.* Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$  для всех  $\eta_{i_1, i_2}$ , и соседние отсчёты шума не коррелированы друг с другом.

2. *Цветной шум измерения.* Двумерный шум измерения  $\eta_{i_1, i_2}$  имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ , и соседние отсчёты шума коррелированы друг с другом с коэффициентом корреляции 0,2.

Дисперсия  $\sigma^2$  задавалась по относительному уровню шума  $\delta_F = \|\tilde{F} - F\|/\|F\|$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма матрицы, т. е.  $\|F\| = \left(\sum_{i_1} \sum_{i_2} F_{i_1, i_2}^2\right)^{1/2}$ . Матрицы  $F, \tilde{F}$  размером  $256 \times 256$  пикселей составлены из значений точного и зашумлённого изображений соответственно. В эксперименте брались три уровня шума: 0,05, 0,10, 0,15. Дисперсия  $\sigma^2$  (используемая при генерации псевдослучайных чисел  $\eta_{i_1, i_2}$ ) находилась по заданному уровню шума  $\delta_F$  выражением

$$\sigma^2 = \left[\frac{\delta_F \max(F)}{2}\right]^2,$$

где  $\max(F)$  — максимальный элемент матрицы  $F$ . Однако при выборе пороговых величин дисперсия  $\sigma^2$  считалась неизвестной (эта ситуация часто имеет место на практике) и оценивалась с помощью выражения (20).

В качестве критерия точности фильтрации была принята средняя относительная ошибка (СОО), определяемая выражением

$$\delta(\hat{F}) = M \left[ \frac{\|\hat{F} - F\|}{\|F\|} \right],$$

где математическое ожидание берётся по распределению матрицы случайного шума  $\eta$ . Выборочная оценка математического ожидания вычислялась по 30 изображениям  $\hat{F}^{(l)}$ , являющимся результатом фильтрации изображения  $\tilde{F}^{(l)} = F + \eta^{(l)}$  ( $\eta^{(l)}$  —  $l$ -я реализация матрицы шума).

В качестве минимальной  $\delta_{\min}$  была принята СОО вейвлет-фильтра с пороговой величиной

$$\lambda_j^{\text{OPT}} = \lambda_j(\beta_{\text{opt}}) = \beta_{\text{opt}} \sqrt{2 \ln(N_j)}, \quad (21)$$

в которой оптимальное значение  $\beta_{\text{opt}}$  находилось из условия минимума СКО фильтрации для каждой реализации  $\tilde{F}^{(l)}$ . Это возможно, так как в вычислительном эксперименте точное изображение  $F$  известно (оно задаётся). Очевидно, что на практике такое определение  $\beta_{\text{opt}}$  нереализуемо, но  $\delta_{\min}$  может служить базовым ориентиром при сравнении СОО алгоритмов вейвлет-фильтрации, использующих другие пороговые величины. Для этого вычислим коэффициент эффективности:

$$E = \delta_{\min}/\delta(\hat{F}). \quad (22)$$

Таблица 1

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0,05	0,10	0,15
$\lambda_j^U$	H	0,681	0,786	0,798
	S	0,444	0,561	0,632
$\lambda_j^S$	H	0,803	0,812	0,814
	S	0,857	0,923	0,946
$\lambda_j^B$	H	0,854	0,859	0,861
	S	0,861	0,855	0,880
$\lambda_j^W$	H	0,928	0,975	0,995
	S	0,991	0,993	0,998

Чем больше  $E$  отклоняется от 1 в меньшую сторону, тем больше проигрыш в точности соответствующего алгоритма вейвлет-фильтрации по сравнению с алгоритмом вейвлет-фильтрации, использующим оптимальную пороговую величину  $\lambda_j^{\text{OPT}}$ .

В табл. 1 приведены значения коэффициента эффективности  $E$  для четырёх пороговых величин:  $\lambda_j^U$ ,  $\lambda_j^S$ ,  $\lambda_j^B$ ,  $\lambda_j^W$ , применяемых при фильтрации изображения LENA. Строки с буквой H соответствуют функции hard, с буквой S — функции soft. Видно, что пороговая величина  $\lambda_j^U$  приводит к значительному (в 1,5–2 раза) увеличению СОО (особенно для функции soft). Пороги  $\lambda_j^B$ ,  $\lambda_j^S$  также имеют СОО на 10–25 % выше  $\delta_{\min}$  (в зависимости от функции hard или soft), пороговое значение  $\lambda_j^W$  даёт наименьший проигрыш по точности при использовании обеих функций.

В табл. 2 сведены значения коэффициента эффективности  $E$  при фильтрации изображения TARGET. Анализ данных таблицы позволяет сделать выводы, такие же, как по табл. 1, но дополнительно следует отметить увеличение СОО при использовании байесовского порога  $\lambda_j^B$  (на 15–30 %). Лучшие результаты имеет пороговая величина  $\lambda_j^W$ .

Аналогичный вычислительный эксперимент был выполнен при фильтрации изображений, искажённых цветным шумом (коэффициент корреляции между соседними значениями шума равен 0,2). Полученные результаты показали значительное увеличение (на 25–30 %) СКО фильтрации (в том числе и минимальной) по сравнению с некоррелированным шу-

Таблица 2

Пороговые величины		Относительный уровень шума		
		0,05	0,10	0,15
$\lambda_j^U$	H	0,725	0,742	0,786
	S	0,443	0,536	0,610
$\lambda_j^S$	H	0,766	0,795	0,782
	S	0,887	0,923	0,936
$\lambda_j^B$	H	0,675	0,721	0,807
	S	0,681	0,723	0,824
$\lambda_j^W$	H	0,906	0,934	0,963
	S	0,966	0,992	0,996

мом. При этом уменьшение коэффициента эффективности было незначительным (порядка 3–5 %), а в некоторых случаях наблюдалось его небольшое увеличение. Однако «иерархия» пороговых величин по точности фильтрации была такая же, как и при фильтрации белого шума.

**Заключение.** По-видимому, при фильтрации изображений, отличных от рассмотренных в данной работе, количественные значения ошибок алгоритмов вейвлет-фильтрации будут другими, но иерархия рассмотренных и предложенных пороговых величин по точности фильтрации сохранится. Этот вывод основан на приведённых результатах фильтрации существенно отличающихся изображений — «гладкого» LENA и «контрастного» TARGET. Поэтому в качестве наилучшей пороговой величины в пороговых алгоритмах обработки коэффициентов разложения зашумлённых сигналов и изображений целесообразно использовать пороговую величину  $\lambda_j^W$ , определяемую выражением (17) и критерием оптимальности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2001. 464 с.
3. **Новиков Л. В.** Основы вейвлет-анализа сигналов. С.-Пб.: Изд-во ООО «Модус+», 1999. 262 с.
4. **Mallat S.** Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$  // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
5. **Mallat S.** A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1989. **11**, N 7. P. 674–693.
6. **Gao H.-Y., Bruce A. G.** Waveshrink with firm shrinkage // Statistica Sinica. 1997. **7**, N 4. P. 855–874.
7. **Daubechies I.** Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure Appl. Math. 1988. **41**, N 7. P. 909–996.
8. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Квазиоптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов // Автометрия. 2010. **46**, № 1. С. 34–45.
9. **Donoho D. L., Jonstone I. M.** Ideal spation adaptation by wavelet shrinkage // Biometrika. 1994. **81**, N 3. P. 425–455.
10. **Donoho D. L.** De-noising by soft-thresholding // IEEE Trans. Inform. Theory. 1995. **41**, N 3. P. 613–627.
11. **Donoho D. L., Jonstone I. M.** Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // Journ. Amer. Statist. Association. 1995. **90**, N 432. P. 1200–1224.
12. **Zhang X.-P., Desai M. D.** Adaptive denoising based on SURE risk // IEEE Sign. Process. Lett. 1998. **5**, N 10. P. 265–267.
13. **Abramovich F., Sapatinas T., Silverman B. W.** Wavelet thresholding via a Bayesian approach // Journ. Royal Statist. Soc. Ser. B. 1998. **60**, N 4. P. 725–749.
14. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
15. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68–77.
16. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.  
URL: <http://old.sibstrin.ru/prikl/monogr07.html> (дата обращения: 09.02.2011).

17. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2007. 184 с.  
URL: <http://old.sibstrin.ru/prikl/obrat07.html> (дата обращения: 09.02.2011).
18. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б.** Фильтрация сигналов и изображений: фурье- и вейвлет-алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 182 с.
19. **Хьюбер П.** Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
20. **Fodor I. K., Kamath C.** Denoising through wavelet shrinkage: An empirical study // SPIE Journ. Electron. Imaging. 2003. **12**, N 1. P. 151–160.

*Поступила в редакцию 17 декабря 2010 г.*

---