

УДК 517.977.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ГРАНИЦ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

А. Н. Рогалев

*Учреждение Российской академии наук
Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН,
660036, г. Красноярск, Академгородок, 50, стр. 44
E-mail: rogalov@ict.krasn.ru*

Отмечено, что во многих случаях управление объектом ведётся в условиях априорной неопределённости внешних воздействий, а также неопределённости текущего состояния объекта. Описаны гарантированные методы, позволяющие получать количественные оценки границ всех возможных фазовых состояний системы, учитывающей все воздействия. Приводятся примеры расчётов включений множеств достижимости.

Ключевые слова: гарантированная граница, символьная формула, множество достижимости.

Введение. Оценка множества состояний, при которых можно реализовать желаемый режим работы управляемого объекта, представляет не только теоретический, но и прикладной интерес. Обычно постановка задачи формулируется следующим образом. Зависимость вектора фазового состояния $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ от управления $u = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^m(t))$ и структуры управляемого объекта выражается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), \quad u(t) \in U, \quad y(s) = y^0, \quad (1)$$

с заданными классами допустимых управлений и начальными и конечными состояниями управляемого объекта при некоторых условиях, налагаемых на правые части системы дифференциальных уравнений. Многие из представляющих практический интерес управляемых динамических систем не могут быть удовлетворительно описаны системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), все коэффициенты которых известны точно [1–8]. Это зависит от влияния различных неопределённых факторов: внешних возмущающих сил, неконтролируемых вариаций параметров, погрешностей определения начальных условий и некоторых других.

Точное или приближённое описание множества достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы управления, выбрать оптимальное управление. Множество достижимости $Y(t)$ — это множество всех точек фазового пространства R^n , в которые можно сдвинуться за интервал времени $[t^0, t]$ из всех возможных точек начального множества фазовых состояний M^0 по решениям системы (1) с начальным условием $y(t^0) \in M^0$ и с допустимым управлением $u(t)$. Границы множества достижимости управляемой системы позволяют оценивать её предельные возможности и строить оптимальное управление.

Вероятностные (стохастические) характеристики во многих случаях не дают эффективных показателей функционирования управляемой системы с неопределёнными факторами [1, 2, 5, 8], так как они принципиально не гарантируют исход одного конкретного эксперимента (результат действия управляемой системы), помимо этого требуется знание статистических характеристик неопределённых факторов, что не всегда доступно в достаточной мере.

Существует несколько подходов к разработке численных методов аппроксимации множеств достижимости. Значительное число методов предназначено для оценки множеств достижимости управляемых систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Широкое применение имеет метод эллипсоидов [2, 3, 5, 7]. Основу этого метода составил класс эллипсоидов с введённой на нём операцией сложения эллипсоидов, а также дифференциальное уравнение эволюции эллипсоида, аппроксимирующее множество достижимости. В [2, 5] указана возможность построения эллипсоидов, с двух сторон аппроксимирующих множество достижимости.

В работах [1, 4, 6] описан подход, состоящий в аппроксимации множества решений (трубки траекторий) целым семейством внешних (внутренних) трубок, образованных параллелепипедами (параллелотопами), грани которых не обязательно параллельны координатным плоскостям. Семейства вводятся таким образом, чтобы, с одной стороны, были обеспечены точные представления решений (через пересечение или объединение), а с другой — каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных (что открывает возможности для параллельных вычислений).

Полное описание методов приближения множеств достижимости и ссылки на работы, в которых представлены методы, используемые для оценки или аппроксимации множеств достижимости, можно найти в [1–9]. В основном эти методы предназначались для линейных управляемых систем. Если требовалось изучать нелинейную систему, то выполнялись различные аппроксимации их множествами достижимости линейных управляемых систем. Это объясняется тем, что для линейных динамических систем возможно вывести уравнения множеств достижимости и ОДУ, описывающие эволюцию внешних и внутренних оценок множеств достижимости.

Гарантированные методы. Основная задача в предлагаемом исследовании — рассмотреть гарантированные методы решения дифференциальных систем с учётом управляющих воздействий и показать их эффективность. Анализ методов, выполняющих оценки множеств достижимости, свидетельствует о том, что получить надёжную оценку в условиях неопределённости для нелинейных правых частей, в которую входят управляющие воздействия произвольным образом (не только как аддитивный член), удаётся в небольшом числе задач. Поэтому возможности применения гарантированных методов, основанных на символьном представлении решений, для оценки множеств достижимости будут полезными специалистам в управлении. Более полное описание этого подхода можно найти в [10–20].

Будем рассматривать задачу (1), для которой определено ограниченное по величине управляющее воздействие и поставлены начальные данные. Пусть в (1) f — непрерывно дифференцируемая по t функция ($f(t) \in C^1$), множество U компактно в R^n , выбор возможных реализаций управляющих воздействий $u(\cdot)$ стеснён ограничениями $u(s) \in U$, $s \in [t^0, t]$, отражающими особенности рассматриваемой задачи. Полагаем также, что

а) выполняется равномерная оценка $|y(t)| < b$ для всех решений (1) на интервале $t \in [t^0, T]$, где $b = \text{const} > 0$;

б) множество $Y(t) = f(t, y, U)$ компактно и выпукло для всех $y, t \in [s, T]$.

Непрерывность множества достижимости $D(t, s, y^0)$, зависящего также от времени, означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что хаусдорфова метрика между множествами значений решений в моменты времени t^1, t^2 становится меньше ε :

$$d(D(t^1, s, y^0), D(t^2, s, y^0)) < \varepsilon, \quad |t^1 - t^2| < \delta, \quad t^1, t^2 \in [s, T]. \quad (2)$$

Задача гарантированного оценивания множества достижимости состоит в вычислении

Детальное описание собственно алгоритма реализации класса гарантированных методов дано в [10–20], а также в цитируемых в них работах. Представим кратко этапы выполнения гарантированного метода:

1. Начало выполнения алгоритма — инициализация всех переменных, идентифицирующих систему (размерность, вид правой части, список переменных, начальные данные).

2. Запись компонент символьных формул решений как векторных функций, состоящих из символьных компонент $s(t^k)$, зависящих от символьных форм начальных данных y_1^0, \dots, y_n^0 . Каждая компонента символьного вектора определяется заново в каждой точке t^k в виде функции, зависящей от символьных начальных данных y_1^0, \dots, y_n^0 . Эта формула описывает сдвиг на каждом шаге вдоль кривой, аппроксимирующей траекторию решения системы. Сдвиг вдоль траектории определяется на основе построенных символьных формул решений.

3. Последовательное исполнение метода хранения и переработки символьной информации при продвижении вдоль траектории решений, производящееся на основе статичного хранения этой информации, работы с адресацией памяти с помощью функций поточной обработки.

4. Преобразование символьной формулы приближённого решения к виду, который позволяет эффективно и быстро вычислять оценки областей значений приближённых решений (S -решения), соответствующие изменениям параметров задачи. Для этого применяется кусочно-полиномиальное представление символьных формул и опорные функции для многозначных функций, описывающих области значений. Символьные формулы не преобразуются на каждом шаге алгоритма, а организуется их хранение в памяти, для чего полезна кусочная полиномиальность. Затем они используются для вычислений областей значений решений (см. п. 3).

5. Представление символьной формулы (вектора с символьными компонентами) Y , аппроксимирующей оператор сдвига вдоль траектории, позволяет определить прообразы экстремальных значений (верхних и нижних границ множеств решений). Эти прообразы принадлежат вектору начальных значений Y^0 для всех узлов сетки t^k . При нахождении прообразов применяется одна из форм решения экстремальной задачи. Обозначим найденные точки y_d^0 , $d = 1, \dots, 2n$. Они служат основой для нахождения множеств («брусков») решений, включающих все решения из окрестности точек y_d^0 .

6. Определение границы глобальной ошибки начинается с использования алгоритма неподвижной точки в форме алгоритма типа гомотопии [22]. Цель применения такого алгоритма — вычислить области значений (многозначные векторные функции), включающие множества точных решений в областях, содержащих каждую из $2n$ -граничных точек. Вычисленные многозначные функции образуют граничные гиперплоскости для множества решений системы ОДУ, являющиеся гарантированными границами данного множества решений. Границы областей всех решений могут быть завышенными, но они позволяют оценивать глобальную ошибку решений, являясь включениями остаточных членов разложений.

7. Гарантированные границы глобальной ошибки множества приближённых решений устанавливаются на основе суммирования оценок локальной ошибки вдоль траектории, заданной символьным решением, причём эти ошибки привязаны к каждому экстремальному значению S -решения. Верхняя оценка глобальной ошибки (векторная величина, состоящая из S -компонент) — это результат накопления величин локальных ошибок вдоль траектории решения. Подобная верхняя оценка насчитывается для всех подынтервалов на всём интервале интегрирования и для каждого экстремального значения, ограничивающего S -решение. Именно так происходят независимое определение символьных формул решений и процесс суммирования локальных ошибок вдоль траекторий решения.

8. Определяются границы включений множества приближённых решений поставленной задачи. В общем случае можно обосновать близость этого множества и множества точных решений, что основывается на свойствах сходимости методов, описывающих траектории решений. Чтобы построить включение множества точных решений, к границам S -решений добавляется оценка глобальной ошибки (таких операций объединения будет $2n$). Все вычисления значений границ множеств решений отложены на последний этап исполнения алгоритма. При этом используются машинные арифметические операции с направленными округлениями. Полезно отметить, что для большинства тестовых примеров включение обеспечивается уже для множества S -решений, хотя это эмпирический факт.

В итоге величина $Y(t)$ — это гарантированная оценка множества точных решений с учётом всех видов ошибок.

Вычисления границ множества решений используют тот факт, что построенные символьные формулы решений есть кусочно-полиномиальные функции, зависящие от y_1^0, \dots, y_n^0 . Множество значений приближённых решений является выпуклым и компактным. Его возможно аппроксимировать внешним многогранником, включающим множество решений.

Выполнение преобразований символьных формул — это первый этап гарантированного метода включения решений, за которым следует этап вычислений. Для проведения символьных преобразований используются системы компьютерной алгебры. Однако её подобное применение обычно приводит к крайне затратным по времени исполнения алгоритмам, особенно если вычисления производятся в цикле. Получаемые формулы, как правило, громоздки, и непосредственные вычисления с их помощью неэкономны. Кроме того, предоставляемая системами компьютерной алгебры возможность проводить действия с числами большой разрядности делает арифметические операции дорогими, так что проблема экономии вычислений стоит в этом случае ещё более остро. Используя последовательные подстановки и приведение подобных членов, формулу можно преобразовать в выражение, зависящее только от y^0 . Поэтому в общем случае для описываемого класса методов предлагается модель вычислений символьных формул, основанная на поэтапном статичном хранении информации и преобразовании её в завершающей стадии метода. В силу этого модель вычислений (преобразований и вычислений) символьных формул осуществляется без явного выписывания суперпозиций компонент формулы, определяемых на каждом шаге. Связь между компонентами устанавливается посредством задания механизма адресации. Ссылки на адреса различных уровней хранятся в стековой памяти в виде дерева. Генерация кода вычислений по формуле (3) осуществляется в процессе обхода этого дерева, начиная с вершин.

В обозначенном выше алгоритме получения символьных формул

$$Y^n = F^n(t^0, \dots, t^n, Y^0, Y^1, \dots, Y^n) = S^n(Y^0) \circ \dots \circ S^2(Y^{i-1}) \circ S^1(Y^i) \quad (4)$$

используется следующая методика обработки их последовательности. Пусть $\varphi(y^0)$ — это однозначное отображение единичного интервала из R^1 на гиперкуб из R^n , которое каждой точке $t \in R$ сопоставляет некоторую точку $y = \varphi(t)$. С помощью такого отображения можно построить алгоритм исполнения, который для каждой точки $t \in R$ позволяет определить формулу отображения $F(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_n^0)$ и процесс её сборки по адресам. Для этого предлагается использовать в качестве отображения $\varphi(y^0)$ непрерывное однозначное отображение единичного интервала на n -мерный куб, известное как кривая Пеано, заполняющая пространство. Фактически кривая Пеано представляет собой непрерывную, нигде не дифференцируемую кривую, которая проходит через все точки единичного гиперкуба в пространстве R^n . Изобразить кривую Пеано нельзя, возможно лишь дать последовательность кривых [23], которая в пределе сходится к ней. Каждая такая кривая называется

приближением кривой Пеано и имеет номер, определяющий её в последовательности кривых.

Таким образом, m -приближение можно рассматривать как некоторую аппроксимацию m -функции в рекурсивной формуле (4). Это соответствие задано отображением элементов конечного множества отрезков из единичного интервала и элементами конечного множества гиперкубов, входящих в R^n . Формула будет представлять рекурсивную структуру, размер которой изменяется. Для записи такой формулы в компьютере используются линейные динамические структуры [24].

Итог работы описанного выше алгоритма — возможность в любой точке t^k строить символьную формулу решения (3) и вычислять на её основе значения решений.

Приложения. 1. Рассмотрим движение управляемого объекта на плоскости, описываемое следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= V \cos \varphi, \\ \frac{dy_2}{dt} &= V \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{k}{V}u, \quad |u| \leq 1, \\ V &= \text{const}, \quad k = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Значения угла φ рассматриваются на интервале $(-\infty, \infty)$. Здесь y_1, y_2 — координаты объекта, отождествляемого с точкой на плоскости; φ — угол между вектором скорости объекта и осью x ; u — управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла φ ; k — максимальное боковое ускорение; V — величина скорости.

Неравенство в (5) ограничивает радиус кривизны траектории объекта: он не может быть больше единицы. Исследуемая система использовалась в [25, 26] при постановке задачи «шофёр-убийца» (рис. 1). Состояние $z_0 = (y_1(t_0), y_2(t_0), \varphi(t_0))$ объекта в начальный момент времени предполагается заданным.

Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \geq 0$ есть совокупность всех точек фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (5) в момент

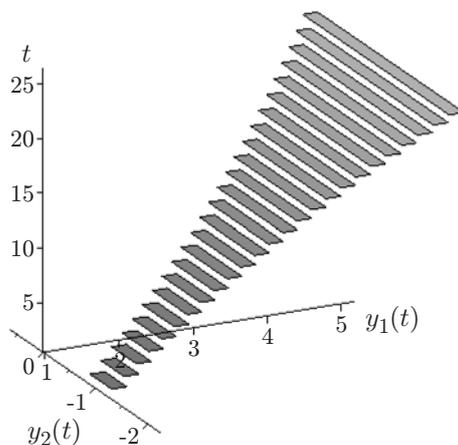


Рис. 1. Гарантированные границы множества достижимости задачи (5) (проекция на оси t, y_1, y_2)

времени $T \geq 0$ при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $T = [0, t^*]$ из начальной точки z_0 .

2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в правую часть которой входит управляющее воздействие:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= 2y_2 + y_4, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -2y_1 + y_3 + u_1(t), \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 + 10y_4, \\ \frac{dy_4}{dt} &= 2y_1 - 2y_3 + u_2(t).\end{aligned}\tag{6}$$

Система (6) — это гамильтонова система, имеющая гамильтониан

$$H = y_1^2 + y_2y_4 + 5y_4 + y_1^2 - y_1y_3 + y_3^2 - u_1(t)y_1 - u_2(t)y_3,$$

где y_1, y_3 — обобщённые координаты; y_2, y_4 — обобщённые импульсы.

На возмущающие силы системы $u_1(t), u_2(t)$ накладываются ограничения $\{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}$.

В [1] для этой системы выбраны начальные данные в виде параллелепипеда размерности 4. Динамические оценки множеств достижимости построены в виде эллипсоидов [1]. Поэтому полезно предложить гарантированные оценки множеств достижимости (рис. 2 и 3), качественно совпадающие с результатами [1], которые показывают отсутствие экспоненциального роста границ эллипсоидов. (В [1] графики построены в логарифмической шкале с несколькими числовыми метками. Других числовых данных для этой системы в [1] не приводится.)

3. Формулировка задачи накопления возмущений динамических систем была предложена в 1939 г. механиком Булгаковым при изучении влияния северных координат скорости корабля на девиацию компаса [27, 28]. При этом полагалось, что скорость — это кусочно-непрерывная функция, ограниченная по модулю. Задача максимального отклонения принадлежит к классу задач робастной оптимизации и максиминного контроля. Интерес к решению класса этих задач не исчезает и в наше время [29].

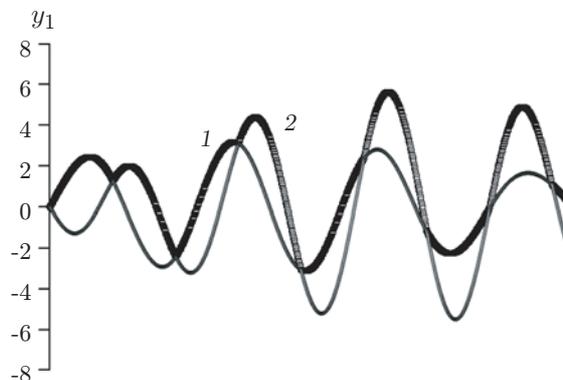


Рис. 2. Гарантированные границы множества достижимости задачи (6) (проекция на оси t, y_1): верхняя (кривая 1) и нижняя (2)

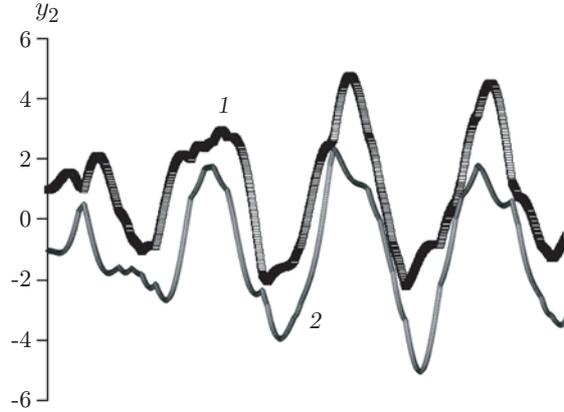


Рис. 3. Гарантированные границы множества достижимости задачи (6) (проекция на оси t, y_2): верхняя (кривая 1) и нижняя (2)

Рассмотрим управляемую систему

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + F_1(y)\tilde{u} + F_2(y)v,$$

$$\tilde{u} \in U = \{\tilde{u} \in L_2^s \mid \tilde{u}(t) \in R^s\}, \tag{7}$$

$$v(\cdot) \in V = \left\{v(\cdot): |v_i(t)| \leq v_i; \quad \left| \frac{dv_i}{dt} \right| \leq \mu, \quad i = 1, \dots, m \right\},$$

где y — n -мерный вектор; \tilde{u} — s -мерный управляемый вектор, являющийся измеримой векторной функцией, в любой момент времени принимающей значение из области управления R^s ; $v(\cdot)$ — m -мерный возмущающий вектор, являющийся кусочно-гладкой векторной функцией, ограниченной по модулю вместе с первой производной; $F_1(y)\tilde{u}$ — управление системой; $F_2(y)v$ — возмущение.

Полагаем, что задана задача программного управления, когда движение $y^{\text{pr}}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1 < \infty$, является искомым, а управление u^{pr} реализует это движение:

$$\begin{cases} \frac{dy^{\text{pr}}(t)}{dt} \equiv f(y^{\text{pr}}(t), u^{\text{pr}}(t)), \\ u^{\text{pr}}(\cdot) \in W, \quad t \in [t_0, t_1] \end{cases}$$

(здесь W — функциональное пространство, описывающее области управляемости).

Рассмотрим отклонение $z = y - y^{\text{pr}}$ в простейшей стабилизирующей форме $\tilde{u} = u^{\text{pr}} + u$, где u — стабилизирующее управление. Затем, полагая, что в классе стабилизирующих алгоритмов исполняемыми являются только линейные алгоритмы, уравнение для отклонений запишем в виде

$$\frac{dz}{dt} = \left(A_0(y^{\text{pr}}(t)) + \sum_{i=1}^s A_i \left(y^{\text{pr}}(t), \frac{dy^{\text{pr}}(t)}{dt} \right) \right) z + B(y^{\text{pr}}(t))u + C(y^{\text{pr}}(t))v,$$

где $A_0 = \partial f / \partial y$; $A_i = \partial F_i / \partial y$; $B = F_1$; $C = F_2$; s — размерность системы.

В методе Булгакова предлагается задача максимального отклонения только по одной координате:

$$\frac{dz}{dt} = Az + bv,$$

где $z = y - y^{\text{пр}}$ — это n -мерный фазовый вектор (вектор-столбец); $A = (a_{ij})$ — постоянная матрица размера $n \times n$; $b = (b_i)$ — n -мерный вектор (вектор-строка); $v = v(t)$ — возмущение, скалярная кусочно-непрерывная ограниченная функция.

Первоначально подход [28] был рассчитан на одномерные управляемые системы, в которых выходной величиной являлась скалярная функция. Если изучалась многомерная система, то предлагалось выделить единый комплексный показатель качества управляемых систем, учитывающий поведение нескольких выходных величин, интересующих разработчиков. Например, решалась задача максимального отклонения функционала $I(t) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2(t)$, $a_i > 0$, для управляемой системы. До момента появления метода [28] при анализе динамических свойств основное внимание уделялось либо типовым возмущениям системы (ступенчатым, линейно возрастающим, синусоидальным и другим), либо возмущениям, имеющим характер случайного процесса (обычно стационарного). Понятно, что эти подходы не исчерпывали многообразия реально существующих ситуаций. Определение характеристик случайного процесса для данной системы часто сопряжено с большими трудностями. Вместе с этим случаи, когда информация о поведении возмущений заключается лишь в знании их верхних и нижних границ, встречаются довольно часто в реальных задачах. Максимальное отклонение, которое необходимо определить здесь, складывается из двух частей: отклонение, вызванное возмущением начальных условий, или начальное возмущение, и отклонение, вызванное накоплением возмущений.

Одной из последних задач, рассматриваемых Булгаковым с применением своего метода, была задача минимизации накопленных возмущений угловых параметров корабля на прямом курсе при ограниченных по модулю ветровых возмущениях (нагрузках). При этом допускались следующие предположения: движение корабля происходит в горизонтальной плоскости; вертикальные движения при рассмотрении устойчивости и управляемости мало влияют на его движение в горизонтальной плоскости; корабль движется в идеальной безграничной жидкости; система, состоящая из корабля и жидкости, имеет столько же степеней свободы, что и сам корабль. Движение судна может быть задано проекциями скорости центра тяжести на подвижные оси и угловой скоростью. Однако во многих случаях более удобной оказывается другая система кинематических параметров: модуль скорости центра тяжести судна $|V|$, угол дрейфа β и угловая скорость ω . Из рис. 4 видно, что обе системы кинематических параметров связаны между собой соотношениями:

$$V_x = V \cos \beta, \quad V_y = V \sin \beta, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{V_y}{V_x}, \quad |V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Все эти величины являются размерными кинематическими характеристиками, пригодными для описания любого вида манёвра судна.

При движении судна в условиях воздействия ветра для его удержания на курсе приходится постоянно переключать перо руля. Однако переключки производятся не относительно диаметральной плоскости, а относительно некоторого отклонения, принимаемого за средний угол, необходимый для прямолинейного движения судна. Воздействие ветровой нагрузки на корабль характеризуется дополнительными силами и моментом, приложенными к кораблю. В уравнениях возмущённого движения при интеллектуальном отклонении

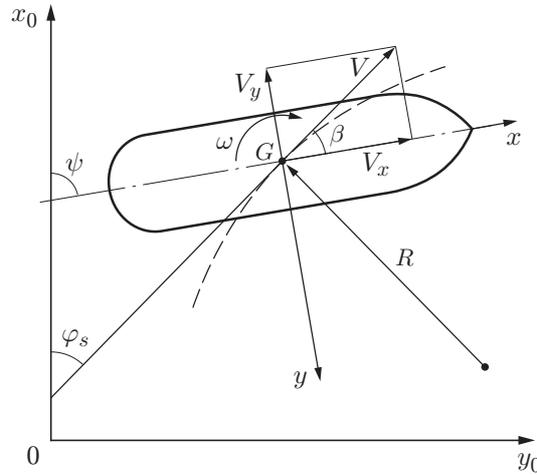


Рис. 4. Изображение двух систем кинематических параметров при движении судна

руля (авторулевом) появятся правые части [30, 31]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= ay_1 + by_2 + s_1U + M(y_3, \gamma), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= cy_1 + dy_2 + hy_2|y_2| + s_2U + P(y_3, \gamma), \\
 \frac{dy_3}{dt} &= y_1, \\
 \frac{dy_4}{dt} &= \cos(y_3 - y_2), \\
 \frac{dy_5}{dt} &= \sin(y_3 - y_2).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Аэродинамический момент и поперечная сила соответственно равны

$$M(y_3, \gamma) = g_1W^2 \sin \gamma(1 - \cos \gamma(1 + n \sin^2 \gamma)), \quad P(y_3, \gamma) = g_2W^2 \sin \gamma.$$

Соотношения между переменными, характеризующими ветровое воздействие W на судно, следующие:

$$W^2 = W_i^2 - 2W_i \cos(y_3 - y_2) + 1, \quad W_i \sin(y_3 + \gamma) - \sin(y_2 + \gamma) = 0.$$

Неизвестные аэродинамические коэффициенты g_1, g_2 косвенным путём определяются по результатам натурных испытаний.

В (8) t совпадает с безразмерным временем $t_d = (tV_0)/L$; L — длина корабля; V_0 — постоянная поступательная скорость на прямом курсе; y_1 — возмущение скорости корабля; y_2 — возмущение угла дрейфа; y_3 — ошибка угла курса; U — параметр управления, равный углу отклонения пера руля. Координаты центра тяжести судна y_4, y_5 в начальный момент будем полагать совпадающими с началом отсчёта. Система координат центра тяжести введена таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с направлением истинного ветра ($W_{iy} = 0, W_i = W_{ix} > 0$). Величины a, b, c, d, s_1, s_2 — коэффициенты инерционных и демпфирующих сил и моментов, действующих на корабль [27, 30]. Числовые значения параметров подбирались в соответствии со значениями, приведёнными в [30], хотя частично

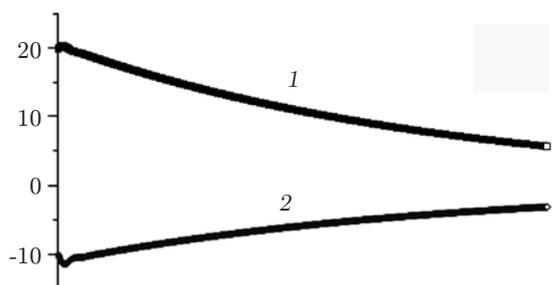


Рис. 5. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) (проекция на оси t, y_1): верхняя (кривая 1) и нижняя (2)



Рис. 6. Гарантированные границы множества достижимости задачи (8) (проекция на оси t, y_2): верхняя (кривая 1) и нижняя (2)

носили экспериментальный характер (требовалось проверить эффективность метода при самых сложных вариантах). В некоторых случаях максимальное накопленное отклонение по углу курса за безразмерное время t_1 при ограничении ξ_0 на модуль ветрового возмущения в [27, 28] возможно оценивать формулой

$$\max y_3 = [(6,25t_1^2 + 31,0t_1 + 68,3)e^{-0,47t_1} - 68,0]\xi_0.$$

Предлагаемый гарантированный метод применялся для оценки накопленных возмущений параметров отклонения корабля от курса при ветровом возмущении, заключённом в некоторую область [27, 28]. Вычисленные гарантированные границы отклонений показали эффективность метода (рис. 5 и 6) по сравнению с оценками, полученными в [27, 28].

Заключение. Гарантированные методы, основанные на символьных формулах приближённых решений, предложены в конце 1980-х и начале 1990-х гг. в работах автора статьи, их описание можно найти также в [10–20, 32–34].

В данной работе рассматриваются вопросы применения гарантированных методов оценки решений дифференциальных уравнений для вычисления включений множеств достижимости управляемых систем. В этих методах используются символьные формулы приближённых решений, что позволяет строить области множеств решений и находить оценки глобальных ошибок. Этот подход является новым, поскольку нахождение символьных формул приближённых решений требует специальной организации, преобразования, хранения больших наборов символьных данных. Гарантированные методы являются одним из эффективных инструментов для вычисления включений множеств достижимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
3. Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости управляемых линейных систем с неопределенной матрицей // Прикладная математика и механика. 1996. 60, № 6. С. 940–950.
4. Костоусова Е. К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычислительные технологии. 1998. 3, № 2. С. 11–20.
5. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 331 p.

6. Куржанский А. Б., Фурасов Б. Д. Задачи гарантированной идентификации билинейных систем с дискретным временем // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 5–12.
7. Кинев А. Н., Рокитянский Д. У., Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 5–13.
8. Овсеевич А. И., Шматков А. М. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 11–16.
9. Пацко Б. В., Пятко С. Г., Федотов А. А. Трехмерные множества достижимости нелинейных управляемых систем // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
10. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1993. **33**, № 2. С. 219–231.
11. Рогалев А. Н. Использование границ глобальной ошибки в гарантированных оценках решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии. 2002. **7**, ч. 4. С. 88–95.
12. Рогалев А. Н. Исследование практической устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Там же. Ч. 5. С. 148–150.
13. Рогалев А. Н. Задачи практической (интервальной) устойчивости с заданной областью предельных отклонений // Тр. Пятой междунар. конф. памяти академика А. П. Ершова. Международное совещание по интервальной математике и методам распространения ограничений. Новосибирск: Изд-во ИСИ СО РАН, 2003. С. 90–100.
14. Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. **8**, № 5. С. 102–116.
15. Рогалев А. Н. Включение множеств решений дифференциальных уравнений и гарантированные оценки глобальной ошибки // Там же. № 6. С. 80–94.
16. Рогалев А. Н. Гарантированные оценки безопасного функционирования технических и электроэнергетических систем // Тр. Всеросс. конф. с междунар. участием «Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф». Красноярск: ИВМ СО РАН, 2003. Т. 3. С. 42–48.
17. Рогалев А. Н. Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислительные технологии. 2004. **9**, № 1. С. 86–93.
18. Рогалев А. Н. Гарантированные границы решений дифференциальных уравнений // Тихонов и современная математика. Междунар. конф. М.: МГУ, 2006. С. 100–103.
19. Рогалев А. Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вест. НГУ. Сер. Информационные технологии. 2006. **4**, вып. 1. С. 56–62.
20. Рогалев А. Н. Вопросы устойчивости ансамблей дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии (Совместный выпуск с «Вестником» КазНУ). Сер. математика, механика. Информатика. 2008. **13**, ч. 3. С. 111–117.
21. Neumaier A. Taylor forms — Use and limits // Reliable Computing. 2003. **9**, N 1. P. 43–79.
22. Eaves R. C., Saigal R. Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions // Mathem. Programming. 1972. **3**, N 2. P. 225–237.

23. **Вирт Н.** Алгоритмы + структуры данных = программы. М.: Мир, 1985. 406 с.
24. **Knuth D.** The art of computer programming. Vol. 1. Fundamental algorithms. Massachusetts — Berkley — Sydney: Addison-Wesley Longman Inc., 1998. 706 p.
25. **Isaacs R.** Differential games. A mathematical theory and applications to warfare and pursuit, control and optimization. N. Y.: John Wilea, 1965. 384 p.
26. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 470 с.
27. **Булгаков Б. В.** Прикладная теория гироскопов. М.: МГУ, 1976. 400 с.
28. **Булгаков Б. В.** О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. **51**, № 5. С. 339–342.
29. **Александров В. В., Жермоленко В. Н.** Минимаксная стабилизация параметрически возбуждаемых вибрационных систем // Вест. МГУ. Сер. Математика и механика. 1998. Вып. 6. С. 40–43.
30. **Басин А. М.** Теория устойчивости на курсе и поворотливости судна. М.: Гостехиздат, 1949. 228 с.
31. **Антонов В. А., Письменный М. Н.** Теоретические вопросы управления судном: Учеб. пособие. Владивосток: Морской государственный университет, 2007. 78 с.
32. **Рогалев А. Н.** Построение и анализ некоторых интервальных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Тез. докл. Всесоюз. шк. молодых ученых и специалистов. Москва — Красноярск: Институт прикладной математики, КГУ, 1986. С. 121–122.
33. **Новиков В. А., Рогалев А. Н.** Влияние эффекта «раскрутки» на получение верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1990. **29**, № 10. С. 1593–1595.
34. **Рогалев А. Н.** Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Матер. Всесоюз. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики». Саратов: Саратовский госуниверситет, 1991. С. 136–140.

Поступила в редакцию 22 февраля 2011 г.
