

УДК 681.5

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА НА ОСНОВЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ\*

С. В. Ефимов, М. И. Пушкарев

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«Институт кибернетики  
Национального исследовательского политехнического университета»,  
634050, г. Томск, ул. Ленина, 30  
E-mail: efimov@tpu.ru*

Проведён анализ влияния нулей и полюсов замкнутой системы автоматического управления на её прямые показатели качества: перерегулирование и время регулирования. Показана необходимость определения доминирующих полюсов на корневой плоскости. Представлен критерий  $\varepsilon$ -доминирования составляющих переходной функции системы автоматического управления. Разработана методика вычисления прямых показателей качества на основе расположения нулей и полюсов системы. Рассмотрены числовые примеры.

*Ключевые слова:* система автоматического управления, прямые показатели качества, перерегулирование, время регулирования, доминирующий полюс, корневая плоскость.

**Введение.** В многочисленных работах, посвящённых корневому анализу линейных систем автоматического управления, для определения прямых показателей качества переходного процесса используются косвенные корневые показатели качества, основанные на значениях доминирующих полюсов [1, 2]. Однако корневые показатели не учитывают влияния нулей системы на качество переходного процесса, что делает их примерными, а в некоторых случаях ошибочными. Считается, что доминирующими являются полюсы, наиболее приближенные к мнимой оси корневой плоскости [1, 2]. Тем не менее оценим правомерность применения критерия доминирования полюсов — их близости к мнимой оси, а значит, и правильность определения прямых показателей качества: перерегулирования и времени регулирования.

**Постановка задачи.** Рассмотрим замкнутую линейную систему автоматического управления с передаточной функцией  $W(s) = G(s)/H(s)$ , где  $G(s)$  и  $H(s)$  — полиномы по степеням  $s$ . Пусть передаточная функция данной системы не имеет кратных полюсов.

Необходимо вычислить прямые показатели качества на основании расположения нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы. Так как определение значений косвенных показателей качества в большей степени зависит от доминирующих полюсов, то требуется найти те полюсы передаточной функции замкнутой системы, которые являются доминирующими на корневой плоскости рассматриваемой системы.

**Доминирование полюсов.** Корневой анализ устойчивости систем основывается на расположении полюсов замкнутой системы автоматического управления. В состав формул, определяющих переход от косвенных показателей качества к прямым, входят значения

---

\*Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК № 14.740.11.0542).

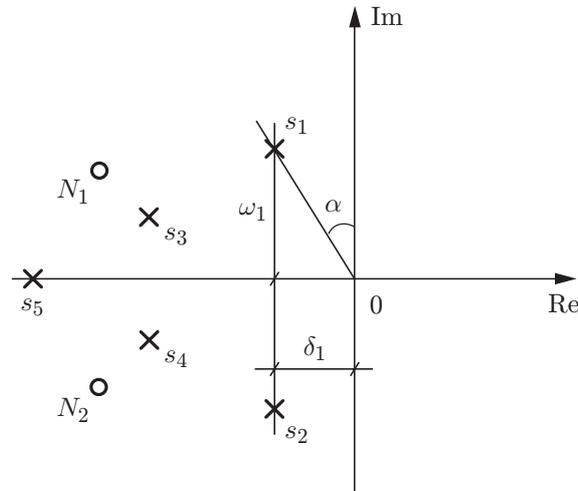


Рис. 1. Корневая плоскость (кружки — нули, крестики — полюсы)

доминирующих полюсов, характеризующих динамические свойства системы [2]:

$$\sigma = e^{\text{tg}(\alpha)}, \quad (1)$$

$$t_p = 3/\text{Re}(s_1) = 3/\delta_1, \quad (2)$$

где  $\sigma$  — перерегулирование;  $\alpha$  — угол, образованный комплексным корнем и мнимой осью корневой плоскости;  $t_p$  — время регулирования системы,  $s_1 = \delta_1 + \omega_1 j$  — доминирующий полюс (рис. 1).

Рассмотрим систему автоматического управления с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1,79 \cdot 10^6 s + 2,703 \cdot 10^7}{s^4 + 55s^3 + 9,11 \cdot 10^4 s^2 + 3,16 \cdot 10^6 s + 2,703 \cdot 10^7}. \quad (3)$$

Представленная система имеет нуль  $N_1 = -15,1$  и полюсы  $s_1 = -20$ ,  $s_2 = -15$ ,  $s_{3,4} = -10 \pm 300j$  (рис. 2). Согласно рисунку  $s_{3,4}$  — доминирующие полюсы. Оценим влияние каждого полюса на переходный процесс, применив формулу Хевисайда [3, 4]:

$$h(t) = \frac{G(0)}{H(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{G(s_k) e^{s_k t}}{s_k \prod_{i=1, i \neq k}^n (s_k - s_i)} = \frac{G(0)}{H(0)} + \frac{\prod_{i=1}^n |s_i|}{\prod_{i=1}^m |N_i|} \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^m (s_k - N_i)}{\prod_{i=1, i \neq k}^n (s_k - s_i)} e^{s_k t}. \quad (4)$$

С использованием формулы (4), слагаемые которой являются составляющими переходной функции, установлено, что доминирующее воздействие на переходный процесс оказывает не пара комплексно-сопряжённых полюсов  $s_{3,4}$ , ближайших к мнимой оси, а полюс  $s_1 = -20$  (рис. 3).

Таким образом, выбор доминирующих полюсов  $s_{3,4}$  системы на начальном этапе анализа сделан неверно, что приводит к ошибочным значениям показателей качества. Поэтому при корневом анализе актуальна задача выбора полюсов, определяющих динамические свойства систем, — доминирующих полюсов.

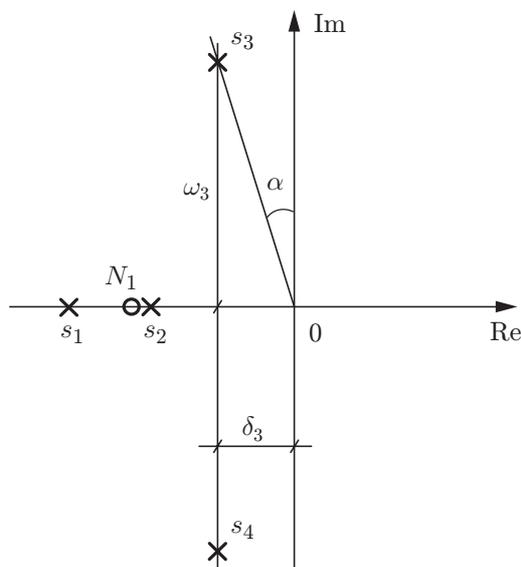


Рис. 2. Расположение нуля (кружок) и полюсов (крестики) системы (3)

**Критерий  $\varepsilon$ -доминирования полюсов.** Составляющая  $A_i e^{s_i t}$  ( $A_i$  — амплитуда от действия полюса) переходной функции (4) называется  $\varepsilon$ -доминирующей на интервале времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ , если при  $t \in [t_1, t_2]$  выполняется неравенство [3]

$$\left| \sum_{k=1, k \neq i}^n A_k e^{s_k t} \right| / |A_i e^{s_i t}| < \varepsilon.$$

В работе [3] получены достаточные условия  $\varepsilon$ -доминирования составляющей переходной функции:

$$\sum_{\lambda, \lambda \neq i} \frac{|A_\lambda|}{|A_i|} e^{(s_\lambda - s_i)t} + \sum_{\nu} 2 \frac{|A_\nu|}{|A_i|} e^{(\delta_\nu - s_i)t} < \varepsilon, \quad (5)$$

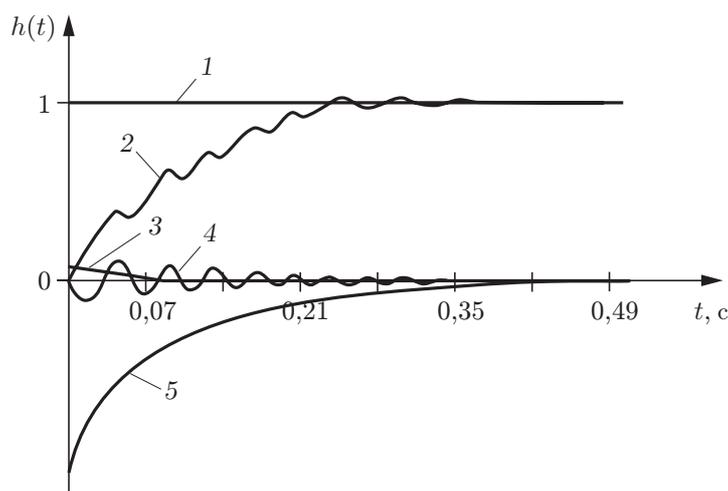


Рис. 3. Графики составляющих переходного процесса: кривая 1 —  $W(0)$ , 2 — результирующий график системы (3), 3 — составляющая от полюса  $s_2$ , 4 — от полюсов  $s_{3,4}$ , 5 — от полюса  $s_1$

$$\sum_{\lambda} \frac{|A_{\lambda}|}{2|A_m|} e^{(s_{\lambda} - \delta_m)t} + \sum_{\nu, \nu \neq m} \frac{|A_{\nu}|}{|A_m|} e^{(\delta_{\nu} - \delta_m)t} < \varepsilon, \quad (6)$$

где  $s_{\lambda}$  — действительные полюсы;  $s_{\nu, \nu+1} = \delta_{\nu, \nu+1} \pm \omega_{\nu, \nu+1}j$  — комплексно-сопряжённые полюсы;  $A$  — амплитуда составляющей переходной функции; время  $t$  изменяется в интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

При анализе динамических свойств системы выполнение условия (5) или (6) для претендующей на  $\varepsilon$ -доминирование составляющей переходной функции является критерием точности существующих оценок показателей качества процесса регулирования по распределению полюсов и нулей передаточной функции, которые выводятся на основе присутствия в переходной функции системы некоторой доминирующей составляющей.

При выполнении условия (5) на интервале  $0 \leq t \leq t_i$  время затухания  $t_i$  аperiodической составляющей до заданного значения  $\Delta$  равно  $\ln(|A_i|/\Delta)/|s_i|$  [3].

При выполнении условия (6) на интервале  $0 \leq t \leq t_m$  время убывания  $t_m$  амплитуды колебательной составляющей до заданного значения  $\Delta$  равно  $\ln(2|A_m|/\Delta)/|\delta_m|$  [3].

С учётом формул (4)–(6) для полюсов системы (3)  $s_1, s_2, s_{3,4}$  значения  $\varepsilon$  равны 0,36; 49,44; 5,73 соответственно. При  $\varepsilon > 1$  составляющая не может считаться доминирующей на заданном интервале времени. Таким образом, согласно значениям  $\varepsilon$  установлено, что полюс  $s_1 = -20$  — доминирующий на этом интервале.

**Корневые показатели качества.** Рассмотрим замкнутую систему с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1,897s^3 + 15,18s^2 + 28,94s + 37}{s^3 + 5s^2 + 13,25s + 37}. \quad (7)$$

Представленная система (7) имеет нули  $N_{1,2} = -1 \pm 1,5j$ ,  $N_3 = -6$  и полюсы  $s_1 = -4$ ,  $s_{2,3} = -0,5 \pm 3j$ .

По критерию  $\varepsilon$ -доминирования для полюсов системы (7)  $s_1, s_{2,3}$  значения  $\varepsilon$  составили 474,3; 0,01 соответственно, следовательно,  $s_{2,3}$  — доминирующие полюсы.

Согласно [1, 2] для определения перерегулирования  $\sigma$  и времени регулирования  $t_p$  системы (7) на основе косвенных показателей качества (степени устойчивости  $\delta$  и колебательности  $\text{tg}(\alpha)$ ) можно использовать формулы (1), (2). В результате имеем  $\sigma = 84\%$  и  $t_p = 6$  с. Однако показатели качества, полученные из рис. 4, составили  $\sigma = \frac{2,58 - 1}{1} \times 100\% = 158\%$ , а  $t_p = 5,77$  с.

Таким образом, определяемые показатели качества в первом и втором случаях различны, что позволяет судить о грубости и неточности формул (1) и (2), связывающих прямые и косвенные показатели качества системы.

**Влияние нулей и полюсов системы на показатели качества.** На основании [4] выброс колебательной системы составляет

$$\xi \approx 2A_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} \exp \left[ \frac{\delta_1}{\omega_1} \left( \pi + \sum_3^n \varphi_k - \sum_1^m \Phi_j \right) \right] + \sum_3^n B_k e^{s_k t_m}, \quad (8)$$

где  $m, n$  — порядок числителя и знаменателя её передаточной функции;  $s_1 = \delta_1 + \omega_1 j$  — доминирующий полюс;  $\varphi_k$  — угол, образованный доминирующим полюсом и любым другим полюсом;  $\Phi_j$  — угол между доминирующим полюсом и нулём системы;

$$\omega_0 = \sqrt{\delta_1^2 + \omega_1^2}; \quad A_1 = \left| \frac{G(s_1)}{s_1 H'(s_1)} \right|; \quad B_k = \left| \frac{G(s_k)}{s_k H'(s_k)} \right|; \quad t_m = \frac{1}{\omega_1} \left( \pi + \sum_3^n \varphi_k - \sum_1^m \Phi_j \right).$$

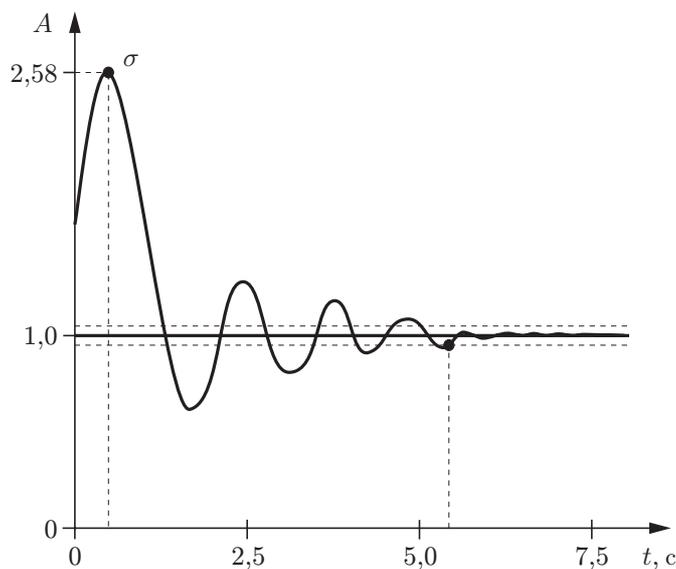


Рис. 4. График переходного процесса

По значению выброса  $\xi$  можно найти перерегулирование системы:

$$\sigma = \frac{\xi}{A_{уст}} \cdot 100 \%, \quad (9)$$

где  $A_{уст}$  — установившееся значение [5].

Для оценки времени регулирования, определяемого интервалом времени, начиная с момента приложения воздействия на систему до момента установления отклонения регулируемой величины, не превышающей заданного порога  $\Delta = 0,05$ , также существуют формулы, учитывающие амплитуду доминирующего полюса [3]. Для действительного доминирующего полюса

$$t_p = \frac{3 + \ln(A_1)}{\delta_1}, \quad (10)$$

для комплексно-сопряжённых доминирующих полюсов

$$t_p = \frac{3 + \ln(2A_1)}{\delta_1}. \quad (11)$$

В состав (10) и (11) входит значение амплитуды доминирующего полюса, однако в этих соотношениях не берётся в расчёт влияние других полюсов и нулей передаточной функции системы.

Обратимся к формуле Хевисайда вида

$$h(t) = \frac{G(0)}{H(0)} + \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}. \quad (12)$$

В момент времени  $t_p$  разница между амплитудой выходного сигнала и установившимся значением составляет 5% (от заданного значения) и запишется как

$$\left| h(t_p) - \frac{G(0)}{H(0)} \right| = \Delta \frac{G(0)}{H(0)},$$

при  $\Delta = 0,05$  и  $G(0)/H(0) = 1$  она будет иметь вид

$$\left| h(t_p) - \frac{G(0)}{H(0)} \right| = 0,05.$$

Тогда (12) запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t_p} = 0,05. \quad (13)$$

Однако форма соотношения (13) не позволяет аналитически выразить  $t_p$ . Разложение в ряд Тейлора степенной функции

$$e^{s_k t_p} = 1 + \frac{s_k t_p}{1!} + \frac{(s_k t_p)^2}{2!} + \dots + \frac{(s_k t_p)^n}{n!}$$

приведёт к значительному повышению порядка уравнения, что не упростит вычисление  $t_p$ , а ограничение малым числом членов ряда даст высокую погрешность. Поэтому  $t_p$  в (13) эффективнее находить численным методом. Такие методы, как правило, требуют начального приближения искомой величины: чем ближе это значение к искомому, тем меньшее количество расчётов потребуется для определения  $t_p$ . Для сокращения времени вычисления  $t_p$  предлагается начальное приближение находить из соотношений (10) и (11). Это позволит получить наиболее точное значение времени регулирования с помощью численного решения уравнения (13) с учётом того, что в момент времени  $t_p$  амплитуда выходного сигнала отклонена от установившегося значения на 5 %.

Согласно формулам (8)–(13) показатели качества для рассмотренного примера составили  $\sigma = 162,8$  % и  $t_p = 5,97$  с.

Таким образом, прямые показатели качества системы, полученные на основе формул (8)–(13), с учётом взаимного расположения нулей и полюсов системы на корневой плоскости соответствуют действительным показателям качества.

**Методика определения прямых показателей качества** для линейных динамических систем автоматического управления, передаточные функции которых не содержат кратных полюсов, заключается в вычислении прямых показателей качества:

- 1) нулей и полюсов системы автоматического управления на основании исходных данных (передаточной функции системы);
- 2) амплитуд  $A_i$  от действия каждого из полюсов системы согласно соотношению  $A_i = |G(s_i)/(s_i H'(s_i))|$ ;
- 3) доминирующих полюсов системы по критерию  $\varepsilon$ -доминирования;
- 4) углов  $\Phi_j$ , образованных доминирующим полюсом, нулями системы и положительным направлением действительной оси;
- 5) углов  $\varphi_i$ , образованных доминирующим полюсом, другими полюсами системы и положительным направлением действительной оси;
- 6) значения перерегулирования системы автоматического управления на основании расположения её нулей и полюсов согласно (9);
- 7) приближённого времени регулирования согласно (10) или (11);
- 8) времени регулирования согласно (13) с учётом приближённого значения, полученного в п. 7.

**Заключение.** В предлагаемой работе представлен корневой анализ систем автоматического управления на основе расположения их нулей и полюсов. Исследовано влияние нулей и полюсов систем на значения прямых показателей качества: перерегулирования и времени регулирования. Отмечена необходимость определения доминирующих полюсов и рассмотрен критерий  $\varepsilon$ -доминирования составляющих переходной функции для исследуемых систем, так как близость полюсов к мнимой оси и началу координат в общем случае не может служить признаком их доминирования.

Результаты исследований показали, что с установлением доминирующих полюсов системы и учётом влияния и нулей, и полюсов системы значения показателей качества, полученные расчётным путём, соответствуют их реальным значениям, определённым по графику переходного процесса.

На основе проведённых исследований разработана методика вычисления прямых показателей качества по расположению нулей и полюсов системы на корневой плоскости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1996. 992 с.
2. **Лукас В. А.** Теория управления автоматическими системами. Екатеринбург: Изд-во УГГГА, 2002. 675 с.
3. **Филиппов Д. Н.** Критерии  $\varepsilon$ -доминирования составляющих переходных функций линейных систем автоматического управления /Московский авиационный институт. М., 1989. 7 с. Деп. в ВИНТИ 22.05.1989, № 4524.
4. **Удерман Э. Г.** Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с.
5. **Ефимов С. В., Гайворонский С. А., Замятин С. В., Суходоев М. С.** Определение желаемой области расположения доминирующих полюсов замкнутой системы с учетом ее нулей // Изв. Томского политехнического университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. **312**, № 5. С. 57–61.

*Поступила в редакцию 10 февраля 2011 г.*

---