

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.391

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ ОРИЕНТАЦИИ
АНИЗОТРОПНОЙ ТЕКСТУРЫ
НА ОСНОВЕ ГРАДИЕНТНОГО СТРУКТУРНОГО ТЕНЗОРА*

И. С. Грузман

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный технический университет»,
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: isgruzman@gmail.com*

Получен приближённый метод вычисления систематической и среднеквадратической ошибок алгоритма оценивания ориентации анизотропной текстуры на основе градиентного структурного тензора. Показано, что метод обладает высокой точностью и вычислительной эффективностью по сравнению с методом компьютерного моделирования.

Ключевые слова: градиентный структурный тензор, оценка ориентации, систематическая и среднеквадратическая ошибки.

Введение. Методы оценивания ориентации анизотропных областей изображений играют фундаментальную роль во многих задачах компьютерного зрения и цифровой обработки изображений, таких как текстурный анализ, адаптивная и направленная фильтрация, дактилоскопия, анализ сейсмических и диагностических изображений, обработка изображений трасс и т. п. [1–7]. Подавляющее большинство этих методов построено на основе градиентного структурного тензора (ГСТ) [1, 8], обеспечивающего высокую вычислительную эффективность, достоверность обнаружения и точность оценки ориентации по сравнению с другими способами.

Важнейшими характеристиками оценок являются их математическое ожидание, определяющее отсутствие или наличие смещения (систематическая ошибка (СО)), и среднеквадратическая ошибка (СКО) оценивания — универсальная количественная мера эффективности оценок. Поскольку цифровые изображения обычно заданы на равномерной прямоугольной решётке, которая сама по себе анизотропна, то оценки ориентации имеют значительное смещение [8, 9]. Для снижения уровня СО используются оптимизированные дифференциаторы [8, 10]. Однако существующие методы не учитывают влияния шумов и параметров алгоритмов, например размеров сглаживающего окна, на величину СКО. Кроме того, оценки ориентации на основе ГСТ оптимальны в смысле минимума второго осевого момента спектра мощности [1, 8], что не гарантирует оптимальности в смысле минимума СКО.

Несмотря на значительное число работ, посвящённых алгоритмам оценивания ориентации, проблема анализа точности оценок на сегодня остаётся открытой, так как исследование их эффективности обычно проводится методом компьютерного моделирования на серии тестовых изображений.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-07-00077-а).

Цель предлагаемой работы — создание приближённых методов вычисления СО и СКО оценки ориентации, построенной на основе градиентного структурного тензора с учётом характеристик дискретных текстур и шумов наблюдения. Во-первых, это позволит отбрасывать алгоритмы, которые на имеющихся данных не будут работать должным образом, во-вторых, составит основу для синтеза оптимальных алгоритмов.

Оценка ориентации текстуры анализируемого фрагмента дискретного изображения $\lambda = \{\lambda(i_1, i_2), i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\}$ размером $(2n + 1) \times (2n + 1) = N \times N$ элементов, заданного на квадратной сетке, вычисляется следующим образом [1, 8]:

$$\tilde{\alpha} = 0,5 \operatorname{arctg}(J_1/J_2), \quad (1)$$

где компоненты ГСТ

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n f_1 f_2 G_{\lambda}(f_1, f_2) \\ \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=-n}^n (f_1^2 - f_2^2) G_{\lambda}(f_1, f_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

представляют собой числовые характеристики выборочного двумерного спектра мощности

$$G_{\lambda}(f_1, f_2) = \frac{1}{N^2} \left| S_{\lambda}(f_1, f_2) \right|^2; \quad (3)$$

$f_i = k_i/N, i = \overline{1, 2}$, — пространственные частоты.

Здесь и далее для удобства изложения начало системы координат в пространственной и частотной областях совмещено с координатами центральных отсчётов изображения и дискретного спектра.

С учётом свойства круговой симметрии спектра мощности вектор \mathbf{J} можно представить в виде

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1 f_2 G_{\lambda}(f_1, f_2) \\ 2 \left(\sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n (f_1^2 - f_2^2) G_{\lambda}(f_1, f_2) + \sum_{k_1=1}^n f_1^2 G_{\lambda}(f_1, 0) \right) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Пусть анализируемый фрагмент изображения

$$\lambda = \mathbf{z} + \boldsymbol{\eta}, \quad (5)$$

где $\mathbf{z} = \{z(i_1, i_2), i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\}$ — анизотропная текстура; $\boldsymbol{\eta} = \{\eta(i_1, i_2), i_1 = \overline{-n, n}, i_2 = \overline{-n, n}\}$ — дискретный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_{\boldsymbol{\eta}}$.

В большинстве практических случаев функция яркости анизотропной текстуры в локальной области может быть аппроксимирована детерминированной полигармонической

функцией, изолинии которой представляют собой параллельные прямые, их направление определяется углом α [1, 4, 8]:

$$\mathbf{z} = \{z(i_1, i_2) = z(i_1 \cos \alpha + i_2 \sin \alpha), \quad i_1 = \overline{-n, n}, \quad i_2 = \overline{-n, n}\}, \quad (6)$$

где

$$z(i_1, i_2) = \sum_{l=1}^L A_l \cos(2\pi(\Omega_l i_1 \cos \alpha + \Omega_l i_2 \sin \alpha) + \phi_l). \quad (7)$$

В (7) частоты Ω_l образуют возрастающую последовательность $0 < \Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_l < 0,5$, а начальные фазы ϕ_l и амплитуды A_l — произвольные неслучайные величины. Кроме того, при отсутствии априорной информации о преимущественных направлениях ориентации распределение оцениваемого угла α обычно полагают равномерным на интервале $(-\pi/2, \pi/2]$.

Для модели (5) компоненты вектора (4) представляют собой взвешенные суммы статистически независимых [11] отсчётов двумерного дискретного спектра мощности $G_{\lambda}(f_1, f_2)$. Поэтому при $N^2 > 70-80$ совместное распределение J_1 и J_2 можно считать приближённо гауссовским.

Введём следующие обозначения: $\mathbf{N}_2(\mathbf{m}, \mathbf{R})$ — двумерное гауссовское распределение вектора компонент ГСТ \mathbf{J} , где $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2]^T = [M\{J_1\} \ M\{J_2\}]^T$ — вектор-столбец математических ожиданий;

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\{J_1\} & \text{cov}\{J_1 J_2\} \\ \text{cov}\{J_1 J_2\} & D\{J_2\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

— ковариационная матрица, соответствующие элементы которой равны дисперсиям $D\{J_1\}$, $D\{J_2\}$ и ковариации $\text{cov}\{J_1 J_2\}$ компонент ГСТ.

Параметры совместного распределения компонент ГСТ. Сначала определим математическое ожидание $M\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\}$ и дисперсию $D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\}$ дискретного спектра мощности $G_{\lambda}(f_1, f_2)$. Из (5) и (3) следует:

$$G_{\lambda}(f_1, f_2) = G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) + G_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2) + \frac{2}{N^2}(\text{Re}S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)\text{Re}S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2) + \text{Im}S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)\text{Im}S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2)), \quad (9)$$

где

$$G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) = \frac{1}{N^2} \left| S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) \right|^2; \quad (10)$$

$$G_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2) = \frac{1}{N^2} \left| S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2) \right|^2$$

— выборочные двумерные спектры мощности анизотропной текстуры \mathbf{z} и аддитивного шума $\boldsymbol{\eta}$; $\text{Re}S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)$, $\text{Re}S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2)$ и $\text{Im}S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)$, $\text{Im}S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2)$ — действительные и мнимые части выборочных двумерных спектров $S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)$ и $S_{\boldsymbol{\eta}}(f_1, f_2)$ соответственно.

Используя свойства преобразования Фурье, нетрудно показать, что спектр дискретного полигармонического сигнала (6) вычисляется по формуле

$$S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L A_l(W(f_1 - \Omega_{l,c}, f_2 - \Omega_{l,s}) \times \exp(j\phi_l) + W(f_1 + \Omega_{l,c}, f_2 + \Omega_{l,s}) \exp(-j\phi_l)), \quad (11)$$

где $\Omega_{l,c} = \Omega_l \cos \alpha$; $\Omega_{l,s} = \Omega_l \sin \alpha$; $W(\cdot, \cdot)$ — частотная характеристика двумерного окна Дирихле [12]; j — мнимая единица. Отсчёты действительной и мнимой частей дискретного спектра белого гауссовского шума $S_{\eta}(f_1, f_2)$ являются гауссовскими статистически независимыми случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями [13]. С учётом (9) и свойств гауссовского распределения математическое ожидание и дисперсию отсчётов спектра мощности $G_{\lambda}(f_1, f_2)$ запишем в виде

$$M\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} = G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) + D_{\eta} = \frac{1}{N^2} |S_{\mathbf{z}}(f_1, f_2)|^2 + D_{\eta}, \quad (12)$$

$$D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} = \begin{cases} D_{\eta}^2 + 2D_{\eta}G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) & \text{при } f_1 \neq 0 \text{ или } f_2 \neq 0, \\ 2D_{\eta}^2 + 2D_{\eta}G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) & \text{при } f_1 = 0 \text{ и } f_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Перейдём к определению \mathbf{m} и \mathbf{R} распределения вектора \mathbf{J} . Математическое ожидание \mathbf{J} с учётом (12) имеет вид

$$\mathbf{m} = 2 \times \begin{bmatrix} 2 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1 f_2 G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) \\ \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n (f_1^2 - f_2^2) G_{\mathbf{z}}(f_1, f_2) + \sum_{k_1=1}^n f_1^2 G_{\mathbf{z}}(f_1, 0) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Здесь учтено, что

$$\sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1 f_2 = 0, \quad \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n (f_1^2 - f_2^2) + \sum_{k_1=1}^n f_1^2 = 0.$$

Поскольку дисперсия суммы статистически независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, то ковариационную матрицу запишем как

$$\mathbf{R} = 4 \times \begin{bmatrix} 4 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1^2 f_2^2 D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} & 2 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1 f_2 (f_1^2 - f_2^2) D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} \\ 2 \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n f_1 f_2 (f_1^2 - f_2^2) D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} & \sum_{k_1=-n}^n \sum_{k_2=1}^n (f_1^2 - f_2^2)^2 D\{G_{\lambda}(f_1, f_2)\} + \\ & + \sum_{k_1=1}^n f_1^4 D\{G_{\lambda}(f_1, 0)\} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Систематическая δ и среднеквадратическая ε ошибки оценки ориентации при равномерном распределении оцениваемого параметра α на интервале $(-\pi/2, \pi/2]$ имеют вид

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (M\{\tilde{\alpha}\} - \alpha)^2 d\alpha}, \quad (16)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D\{\tilde{\alpha}\} d\alpha + \delta^2}, \quad (17)$$

где математическое ожидание $M\{\tilde{\alpha}\}$ и дисперсия $D\{\tilde{\alpha}\}$ оценки (1) при фиксированном значении α и с учётом предположения о совместно гауссовском распределении J_1 и J_2 определяются соотношениями

$$M\{\tilde{\alpha}\} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 0,5 \operatorname{arctg}(J_1/J_2) \mathbf{N}_2(\mathbf{m}, \mathbf{R}) dJ_1 dJ_2, \quad (18)$$

$$D\{\tilde{\alpha}\} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (0,5 \operatorname{arctg}(J_1/J_2))^2 \mathbf{N}_2(\mathbf{m}, \mathbf{R}) dJ_1 dJ_2 - M\{\tilde{\alpha}\}^2. \quad (19)$$

Рассмотрим способ быстрого нахождения $M\{\tilde{\alpha}\}$ и $D\{\tilde{\alpha}\}$. Чтобы избавиться от вычисления двукратных интегралов в (18) и (19), разложим оценку (1) в двумерный ряд Тейлора второго порядка по степеням $(J_1 - m_1)^x$ и $(J_2 - m_2)^y$ в окрестности точки математического ожидания \mathbf{m} вектора \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &\approx \sum_{l=0}^2 \frac{1}{l!} \left(\left((J_1 - m_1) \frac{\partial}{\partial J_1} + (J_2 - m_2) \frac{\partial}{\partial J_2} \right)^l 0,5 \operatorname{arctg} \frac{J_1}{J_2} \right) \Bigg|_{J_1=m_1, J_2=m_2} = \\ &= \sum_{x=0}^{x+y \leq 2} \sum_{y=0} b_{x,y} (J_1 - m_1)^x (J_2 - m_2)^y, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$b_{00} = 0,5 \operatorname{arctg} \frac{m_1}{m_2}; \quad b_{10} = \frac{m_2}{2(m_1^2 + m_2^2)}; \quad b_{01} = -\frac{m_1}{2(m_1^2 + m_2^2)};$$

$$b_{02} = -b_{20} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1^2 + m_2^2)^2}; \quad b_{11} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2(m_1^2 + m_2^2)^2}.$$

Подставив формулы (20) в (18), (19) и выполнив усреднение, получим

$$M[\tilde{\alpha}] \approx b_{00} + b_{11}R_{12} + b_{20}R_{11} + b_{02}R_{22}, \quad (21)$$

$$D[\tilde{\alpha}] \approx b_{10}^2 R_{11} + b_{01}^2 R_{22} + b_{11}^2 (R_{11}R_{22} + R_{12}^2) + 2(b_{20}^2 R_{11}^2 + b_{02}^2 R_{22}^2 + b_{01}b_{10}R_{12}) + \\ + 4R_{12}(b_{20}b_{11}R_{11} + b_{02}b_{11}R_{22} + b_{02}b_{20}R_{12}). \quad (22)$$

Таким образом, метод вычисления СО и СКО ориентации состоит в следующем.

1. Для принятой полигармонической модели анизотропной текстуры (6) по формулам (10) и (11) находим выборочные двумерные спектры $S_z(f_1, f_2)$ и $G_z(f_1, f_2)$ при фиксированном значении угла ориентации α .

2. По формулам (12) и (13) определяем математические ожидания и дисперсии отсчетов двумерного спектра мощности анализируемого фрагмента изображения λ .

3. По формулам (14) и (15) рассчитываем математическое ожидание и ковариационную матрицу компонент вектора ГСТ.

4. Используя разложения в ряд Тейлора оценки $\tilde{\alpha}$ (20), вычисляем её математическое ожидание (21) и дисперсию (22).

5. Систематическую и среднеквадратическую ошибки находим в соответствии с (16) и (17) численным интегрированием.

Результаты экспериментальных исследований. Метод анализа эффективности оценки ориентации проводился для анизотропной текстуры

$$\mathbf{z} = \{z(i_1, i_2) = A \cos(2\pi(\Omega i_1 \cos \alpha + \Omega i_2 \sin \alpha)), \quad i_1 = \overline{-n, n}, \quad i_2 = \overline{-n, n}\} \quad (23)$$

при частоте $\Omega = 0,35$. На рис. 1 и 2 показаны зависимости систематической δ и среднеквадратической ε ошибок оценивания (в градусах) от отношения сигнал/шум $q = A/\sqrt{2D\eta}$, где $A/\sqrt{2}$ — эффективное значение гармонического двумерного сигнала (23). Сплошные линии соответствуют СО (16) и СКО (17), вычисленным с помощью формул (18) и (19), штриховые — СО (16) и СКО (17), найденным с помощью формул (21) и (22). Из приведённых зависимостей следует, что погрешность вычисления, обусловленная применением ряда Тейлора второго порядка, не превышает 0,5 % при $q > 1,25$ и уменьшается с увеличением размеров анализируемого изображения.

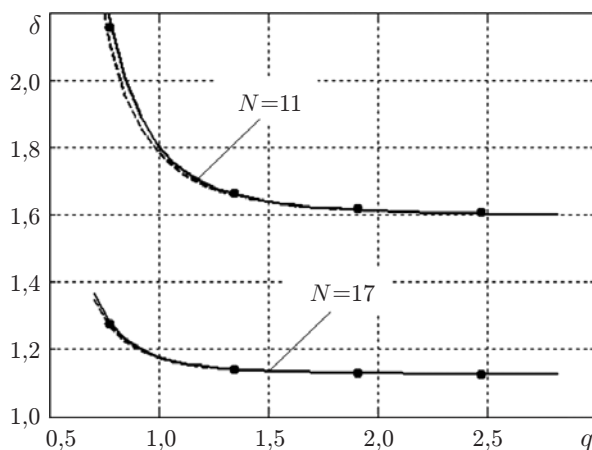


Рис. 1

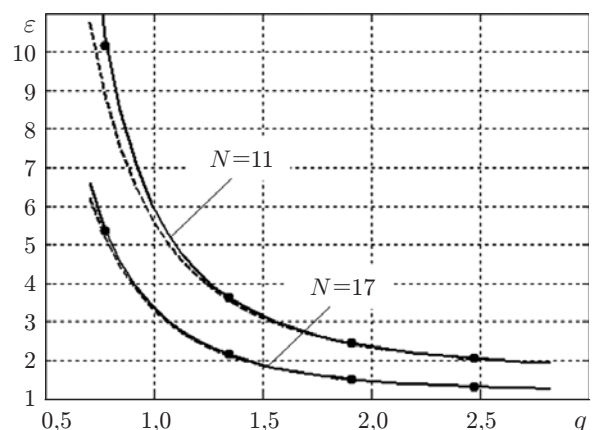


Рис. 2

На рисунках точками обозначены результаты анализа, полученные методом компьютерного моделирования. Вычисление δ и ε выполнялось путём усреднения по $5 \cdot 10^4$ тестовым изображениям для каждого значения q при независимых реализациях аддитивного дискретного белого гауссовского шума от изображения к изображению. Значение α в (23) менялось случайным образом от изображения к изображению в соответствии с равномерным распределением в диапазоне $(-\pi/2, \pi/2]$.

Замечание. В результате экспериментальных исследований установлено, что эффективность оценки ориентации практически не зависит от вида распределения аддитивного шума с чётным относительно нуля распределением. В частности, были проведены исследования методом компьютерного моделирования для двух негауссовских распределений шума: равномерного и Лапласа. Подчёркнём, что у распределения Лапласа «хвосты» тяжелее, чем у гауссовского, а у равномерного — легче. Эксперименты проводились при одинаковых математических ожиданиях и дисперсиях шума. Полученные значения систематических и среднеквадратических ошибок оценки ориентации при $N = 11$ практически полностью совпали с результатами для гауссовского распределения (относительные различия не превысили 0,28 %), что обусловлено нормализацией совместного распределения вектора \mathbf{J} . Следовательно, предложенный метод, основанный на гауссовской аппроксимации распределения вектора \mathbf{J} , может быть применён для анализа эффективности оценки ориентации при действии аддитивного дискретного белого шума с негауссовским распределением.

Кроме точности и устойчивости метода анализа, одним из важнейших показателей является его вычислительная эффективность по сравнению со статистическим экспериментом. Для проведения сравнительного анализа предложенным методом и методом компьютерного моделирования алгоритмы вычисления СО и СКО были реализованы в пакете MATLAB 7.10. Замеры времени проводились с помощью стандартных функций "tic" и "toc" пакета MATLAB. Выигрыш во времени предложенного метода анализа составляет несколько сот раз и возрастает с увеличением размеров анализируемого окна.

Заключение. В данной работе рассматривается метод вычисления систематической и среднеквадратической ошибок оценки ориентации анизотропной текстуры, наблюдаемой на фоне аддитивного дискретного белого шума. Метод основан на гауссовской аппроксимации компонент градиентного структурного тензора, вычисленных в частотной области. Корректность применения аппроксимации и самого метода анализа подтверждена совпадением результатов, полученных расчётным путём, и результатов статистического эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bigun J.** Vision with Direction: A Systematic Introduction to Image Processing and Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 396 p.
2. **Maltoni D., Maio D., Jain A. K., Prabhakar S.** Handbook of Fingerprint Recognition. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 408 p.
3. **Faraklioti M., Petrou M.** The use of structure tensor in the analysis of seismic data // Mathematical Methods and Modelling in Hydrocarbon Exploration and Production. Mathematics in Industry. 2005. 7, Pt. 1. P. 47–88.
4. **Методы** компьютерной обработки изображений /Под ред. В. А. Сойфера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 784 с.
5. **Грузман И. С., Карпушин В. Б.** Алгоритмы отождествления и распознавания объектов по изображениям линейных трасс // Доклады АН ВШ РФ. 2010. № 1. С. 84–92.

6. Грузман И. С., Карпушин В. Б. Использование поля направлений для оценки параметров геометрических искажений // Автометрия. 2008. 44, № 5. С. 3–11.
7. Грузман И. С., Карпушин В. Б. Оценка траектории движения слеодообразующего объекта на основе градиентного структурного тензора // Автометрия. 2011. 47, № 1. С. 2–9.
8. Яне Б. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2007. 584 с.
9. Грузман И. С., Карпушин В. Б. Анализ систематических ошибок алгоритма построения поля направлений на основе спектральных моментов // Доклады АН ВШ РФ. 2008. № 1(10). С. 73–82.
10. Грузман И. С., Карпушин В. Б. Синтез градиентных алгоритмов с минимальной систематической ошибкой оценивания поля направлений // Автометрия. 2010. 46, № 1. С. 2–11.
11. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
12. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 488 с.
13. Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов. М.: Энергия, 1974. 240 с.

Поступила в редакцию 10 мая 2011 г.
