

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

УДК 62-40

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ*

Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева

*Самарский государственный технический университет,
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
E-mail: rapoport@samgtu.ru*

Устанавливается кусочно-постоянный (релейный) характер сосредоточенных управляющих воздействий в задачах оптимального управления по базовым критериям быстродействия и энергопотребления широким кругом нелинейных объектов технологической теплофизики с распределёнными параметрами. На этом основании искомые программные управления в целом ряде практически встречающихся ситуаций могут быть найдены предложенным авторами алгоритмически точным (альтернативным) методом. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассматривается задача оптимального управления нелинейными моделями процесса индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед последующей обработкой давлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, технологическая теплофизика, система с распределёнными параметрами, оптимизация по быстродействию, минимизация энергопотребления, релейные управляющие воздействия, индукционный нагрев.

Введение. В работах [1–4] предложен конструктивный, алгоритмически точный (альтернативный) метод решения краевых задач оптимального управления (ЗОУ) системами с распределёнными параметрами (СРП) в условиях заданной точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию объекта, базирующийся на специальной предварительной процедуре последовательной параметризации искомых управляющих воздействий (УВ).

Такая процедура становится выполнимой при заведомо известной структуре оптимальных программных управлений в пространственно-временной области их определения с заданным характером непрерывного изменения УВ на всех участках, из которых составляется в итоге оптимальная программа. В свою очередь, структура программных УВ в ЗОУ СРП может быть найдена в целом ряде модельных ситуаций с помощью аналитических условий оптимальности в совокупности с дополнительной информацией о свойствах оптимизируемых процессов в конкретной предметной области [1–6]. Однако этот путь, связанный с использованием стандартного аппарата классических методов оптимизации, например в форме принципа максимума Понтрягина, приводит к достаточно простым и эффективным результатам в основном применительно к ЗОУ СРП с линейными моделями объекта управления [1–6].

Краевая задача принципа максимума в ЗОУ с нелинейными моделями СРП становится чрезмерно сложной, прежде всего, за счёт аналитически неразрешимой нелинейной системы дифференциальных уравнений для сопряжённых переменных, и установить однозначным образом на основе решений данной задачи искомую структуру управляющих воздействий, как правило, не удаётся.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-08-00277).

В данной работе предлагается другой способ определения характера управляющих воздействий в представляющих самостоятельный интерес задачах оптимального управления по базовым критериям быстродействия и энергозатрат типичными нелинейными объектами технологической теплофизики. Устанавливается идентичный линейному случаю релейный характер управляющих воздействий в таких ЗОУ, на которые распространяется на этом основании альтернативный метод расчёта программных УВ. Полученные результаты используются для решения актуальной задачи оптимизации процессов индукционного нагрева массивных заготовок цилиндрической формы перед последующей обработкой давлением.

1. Нелинейные модели объектов технологической теплофизики. Целый ряд ответственных термодиффузионных процессов технологической теплофизики описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа относительно управляемой функции состояния $Q(x, t)$, зависящей от пространственных координат x и времени t [5–9]:

$$\alpha(Q) \frac{\partial Q}{\partial t} = \operatorname{div}(\beta(Q) \operatorname{grad} Q) + F(x, Q, u_1), \quad (1)$$

$$t \in (0, t^0); \quad x \in \Omega_q \subset E^q, \quad 1 \leq q \leq 3; \quad x = (x^{(r)}), \quad r = \overline{1, q},$$

при краевых условиях

$$Q(x, 0) = Q_0(x); \quad \beta(Q) \left. \frac{\partial Q}{\partial n} \right|_{x \in S} = F_1(x, Q, u_2) \Big|_{x \in S}. \quad (2)$$

Здесь $\alpha, \beta, Q_0, F, F_1$ — заданные, достаточно гладкие функции своих аргументов; n — нормаль к граничной поверхности S , занимаемой объектом пространственной области $\Omega_q \ni x$; $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — соответственно сосредоточенные внутреннее и граничное управляющие воздействия, используемые по отдельности или в совокупности в зависимости от выбранного способа управления объектом с распределёнными параметрами (ОРП) и подчинённые ограничениям

$$u_{p \min} \leq u_p(t) \leq u_{p \max}, \quad t \in (0, t^0), \quad p = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

с заданными пределами $u_{p \min}, u_{p \max}$, которые могут, вообще говоря, зависеть от t .

2. Задача оптимального быстродействия. Рассмотрим типичную задачу оптимального по быстродействию управления объектом (1)–(3) [2, 5–8].

Требуется найти такие программы изменения во времени управляющих воздействий $u_p^*(t)$, стеснённых ограничениями (3), которые обеспечивают выполнение условия

$$Q(x, t^0) \in G(x), \quad x \in \Omega_q, \quad (4)$$

перевода ОРП (1), (2) из начального состояния $Q_0(x)$ в некоторую заданную область $G(x)$ допустимых конечных пространственных распределений управляемой величины с непустой внутренностью $\operatorname{int} G(x)$ за минимально возможное время $t^0 = t_{\min}^0$ в предположении управляемости объекта (1)–(3) из $Q_0(x)$ в $G(x)$.

Для ряда линеаризованных моделей рассматриваемых процессов с помощью принципа максимума установлен кусочно-постоянный (релейный) характер оптимальных по быстродействию управлений $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$, попеременно принимающих только свои предельно допустимые значения согласно (3) [2, 5–8]. Покажем, что аналогичная структура сохраняется в определённых часто встречающихся на практике условиях и для всех $u_p^*(t)$ в

исследуемой нелинейной задаче, где применение аппарата принципа максимума связано с серьёзными затруднениями.

Для доказательства этого утверждения предположим противное, ограничиваясь для простоты поиском одного управляющего воздействия $u(t) \in \{u_p(t)\}$, $u(t) \in [u_{\min}, u_{\max}]$. Тогда, по крайней мере, на некоторых временных промежутках $(t^{(n)}, t^{(n+1)}) \subset [0, t_{\min}^0]$, $n = \overline{1, v}$, где $0 \leq t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(v+1)} \leq t_{\min}^0$, оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ не достигает предельно допустимых значений, удовлетворяя строгим неравенствам $u_{\min} < u^*(t) < u_{\max}$, а везде за пределами этих промежутков $u^*(t) \equiv u_{\max}$ или $u^*(t) \equiv u_{\min}$, за исключением конечного числа точек переключения.

Воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией уравнений (1), (2) по устойчивым и сходящимся разностным схемам [10] при $u(t) = u^*(t)$ с числом $N = \sum_{n=1}^v N_n = m^{q+1}$ шагов по времени на объединении $\cup(t^{(n)}, t^{(n+1)})$, где m — одинаковое для всех $r = \overline{1, q}$ число фиксируемых точек $x_j^{(r)} \in \Omega_q$, $j = \overline{1, m}$, пространственной дискретизации по координатным осям, а N_n — число временных шагов на интервале $(t^{(n)}, t^{(n+1)})$. При этом $u^*(t)$ аппроксимируется сеточной функцией $u_N^*(t)$, принимающей согласно исходному предположению на всех промежутках $(t^{(n)}, t^{(n+1)})$ некоторые постоянные значения $u_N^{(h)}$, отличные от предельно допустимых:

$$u_{\min} < u_N^{(h)} < u_{\max}, \quad h = \overline{1, N}, \quad (5)$$

и равной u_{\max} или u_{\min} на остальных участках оптимального процесса.

Пусть в общем случае ($q = 3$) решение соответствующей разностной системы уравнений модели ОРП (1), (2) на некоторых $m < N$ временных слоях $t = t_k$, $k = \overline{1, m}$, $t_1 > 0$, включая конечный момент времени $t_m = t_{\min}^0$, относительно $N = m^4$ значений Q_{jig}^k управляемой величины $Q(x, t)$ в узлах $(x_j^{(1)}, x_i^{(2)}, x_g^{(3)}, t_k)$, $j, i, g, k = \overline{1, m}$, пространственно-временной сетки, в том числе и результирующего состояния Q_{jig}^m , где $Q_{jig}^m \in G(x)$, согласно (4), определяется некоторыми непрерывными и дифференцируемыми функциями f_{jig}^k переменных $u_N^{(h)}$, $h = \overline{1, N}$:

$$Q_{jig}^k = f_{jig}^k(u_N^{(1)}, u_N^{(2)}, \dots, u_N^{(N)}), \quad j, i, g, k = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Соотношения (6) можно, кроме того, рассматривать для N заданных величин Q_{jig}^k как замкнутую систему N уравнений относительно N значений $u_N^{(h)}$, $h = \overline{1, N}$.

Пусть якобиан

$$J = \det \left[\frac{\partial f_{jig}^k}{\partial u_N^{(h)}} \right], \quad j, i, g, k = \overline{1, m}, \quad h = \overline{1, N}, \quad N = m^4, \quad (7)$$

вычисляемый при значениях $u_N^{(h)}$, являющихся решениями системы (6), всегда отличен от нуля при достаточно большом m .

Тогда согласно теоремам о неявных функциях [11] в окрестности значений $u_N^{(h)}$ в (6) существует малая вариация $\delta u_N^* = (\delta u_N^{(h)})$, $h = \overline{1, N}$, не стесняемая ограничением (3) в силу строгих неравенств (5), которой соответствуют приращения конечного состояния $\delta Q = (\delta Q_{jig}^m)$, обеспечивающие выполнение условия

$$\tilde{Q}_{jig}^m = Q_{jig}^m + \delta Q_{jig}^m \in \text{int}G(x) \forall j, i, g = \overline{1, m}. \quad (8)$$

С учётом непрерывности зависимостей Q_{jig}^m от t_m это означает, что все величины \tilde{Q}_{jig}^m , достигаемые при варьированном управлении $\tilde{u}_N^* = u_N^* + \delta u_N^*$ на некотором временном слое $t = \tilde{t}_m < t_{\min}^0$ при достаточно большом m по-прежнему принадлежат, подобно (8), заданной области $G(x)$ в (4). Отсюда следует, что управление $u_N^*(t)$ в условиях (5), а значит, и $u^*(t)$ для исходной модели ОРП в поточечно сходящихся конечно-разностных схемах при $u^*(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N^*(t) \forall t \in (0, t^0)$ не является оптимальным по быстрдействию. Полученное противоречие приводит к выводу, что для оптимального управления не могут быть выполнены неравенства (5), и, следовательно, доказывает релейный характер $u^*(t)$ в условиях $J \neq 0$ в (7). Покажем, что последнее неравенство действительно выполняется в большинстве прикладных задач управления процессами технологической теплофизики.

Пусть $J = 0$ при достаточно большом значении m . Тогда однородная линейная система уравнений (с определителем J для линейных приближений dQ_{jig}^k вариаций δQ_{jig}^k величин Q_{jig}^k в (6))

$$dQ_{jig}^k = \sum_{h=1}^N \frac{\partial f_{jig}^k}{\partial u_N^{(h)}} \delta u_N^{(h)} = 0, \quad j, i, g, k = \overline{1, m}, \quad N = m^4, \quad (9)$$

будет иметь при $dQ_{jig}^k = 0$ ненулевые решения относительно соответствующих вариаций $\delta u_N = (\delta u_N^{(h)})$. При $m \rightarrow \infty$ этот результат приводит к тождественно равному нулю приращению $\delta Q(x, t)$ управляемой функции состояния $Q(x, t)$ во всей области $\Omega_q \ni x$ для всех $t \in (0, t^0)$ при отличной от нуля вариации управляющего воздействия:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{ \delta Q_{jig}^k; j, i, g, k = \overline{1, m} \} = \delta Q(x, t) = 0, \quad x \in \Omega_q, \quad t \in (0, t^0), \quad (10)$$

$$\lim_{N = m^4 \rightarrow \infty} \{ \delta u_N^{(h)}; h = \overline{1, N} \} = \delta u(t) \neq 0, \quad t \in (0, t^0). \quad (11)$$

Дальнейшая задача сводится к исследованию возможности выполнения равенства (10) в условиях (11).

Основное уравнение закона сохранения субстанции (массы или энергии) для ОРП (1), (2) может быть для всех $t \in (0, t^0)$ записано в следующем виде [12]:

$$\iiint_V \alpha(Q) \frac{\partial Q}{\partial t} dV = \iint_S F_1(x, Q, u_2) ds + \iiint_V F(x, Q, u_1) dV, \quad (12)$$

где V — объём области Ω_q изменения пространственных переменных, ограничиваемой поверхностью S .

В малых отклонениях $\delta Q(x, t)$ и $\delta u_p(t)$, $p = \overline{1, 2}$, от оптимального процесса $(Q^*(x, t), u_p^*(t))$ получим линеаризованное уравнение баланса (12) в вариациях, образуемое первыми членами разложения всех функций в (1), (2) и (12) в ряды Тейлора по степеням δQ и δu_p :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(Q^*) \delta Q) dV = \iint_S \left[\frac{\partial F_1(x, Q^*, u_2^*)}{\partial Q} \delta Q + \frac{\partial F_1(x, Q^*, u_2^*)}{\partial u_2} \delta u_2 \right] ds +$$

$$+ \iiint_V \left[\frac{\partial F(x, Q^*, u_1^*)}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F(x, Q^*, u_1^*)}{\partial Q} \delta Q \right] dV. \quad (13)$$

Полагая $\delta Q(x, t) \rightarrow 0$ в (13) в соответствии с предельными соотношениями (10), получим равенства

$$0 = \frac{\partial \Phi_2(Q^*, u_2^*)}{\partial u_2} \delta u_2 + \frac{\partial \Phi_1(Q^*, u_1^*)}{\partial u_1} \delta u_1, \quad t \in (0, t^0), \quad (14)$$

где

$$\Phi_1(Q^*, u_1) = \iiint_V F(x, Q^*, u_1) dV; \quad \Phi_2(Q^*, u_2) = \iint_S F_1(x, Q^*, u_2) ds. \quad (15)$$

В большинстве практически встречающихся ситуаций равенства (14) в условиях (11) при $\delta u(t) \neq 0$ оказываются невыполнимыми, следовательно, в таких случаях $J \neq 0$ в (7), а значит, оптимальное по быстродействию управление $u^*(t)$ действительно представляет собой релейную функцию времени. В частности, при типовом способе управления температурным полем $Q(x, t)$ в процессе индукционного нагрева, описываемым нелинейным уравнением теплопроводности (1), (2) с использованием напряжения на индукторе $u_1(t)$ в качестве управляющего воздействия (при $u_2(t) = 0$), функция $\Phi_1(Q^*, u_1)$ в (15) представляет собой полную мощность внутренних источников тепла, возбуждаемых в электромагнитном поле индуктора [5, 6]. Отсюда следует физически очевидное неравенство $\frac{\partial \Phi_1(Q^*, u_1^*)}{\partial u_1} \neq 0$ для всех $t \in (0, t^0)$, и, следовательно, равенство (14) невыполнимо при $\delta u_1 \neq 0, \delta u_2(t) \equiv 0$. В то же время, если в качестве $u_1(t)$ рассматривается частота питающего тока индуктора в условиях $\Phi_1(Q^*, u_1) = \text{const}$ [5], то $\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} = 0 \forall t \in [0, t^0]$, равенство (14) соблюдается при $\delta u_1 \neq 0$, условие $J \neq 0$ доказать не удаётся и вопрос о характере оптимального управления u_1^* остаётся открытым. Анализ, выполненный в [5], показывает, что $u_1^*(t)$ в этом случае действительно отличается от релейной функции времени.

Управление температурным полем $Q(x, t)$ в процессе нагрева массивных тел в печах с внешним теплообменом, моделируемым нелинейным уравнением (1) при $F = 0$, производится по граничным условиям (2) с использованием в качестве управляющего воздействия $u_2(t)$ теплового потока на поверхности нагреваемого тела или температуры в рабочем пространстве печи [7, 8, 13]. В (15) $\Phi_2(Q^*, u_2)$ представляет собой интегральную величину внешнего теплового потока на $S \ni x$ при $\frac{\partial \Phi_2(Q^*, u_2^*)}{\partial u_2} \neq 0, t \in (0, t^0)$, и опять равенство (14) не выполняется при $\delta u_1 \equiv 0$, если $\delta u_2 \neq 0$, откуда по приведённой схеме обоснования $u_2^*(t)$ снова является релейной функцией времени.

При релейном характере искоемых управляющих воздействий $u_1^*(t)$ или $u_2^*(t)$ эти воздействия заведомо определяются в параметризованной форме с точностью до числа N^* и длительностей $\Delta_i, i = 1, N^*$, интервалов их постоянства на всём протяжении процесса управления. В условиях задания в (4) области $G(x)$ в виде допустимой точности равномерного приближения $Q(x, t^0)$ к требуемому распределению $\bar{Q}(x)$ задача оптимального быстродействия сводится на следующем этапе к соответствующей задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО). Алгоритмически точное решение ЗПО относительно всех неизвестных параметров может быть получено альтернативным методом [1–4].

3. Задача минимизации энергопотребления. Пусть теперь требуется определить управляющее воздействие $u_p^{**}(t)$, $p \in \{1, 2\}$, обеспечивающее перевод объекта (1), (2) из начального состояния $Q_0(x)$ в требуемое конечное согласно (4) за время t^0 при минимально возможном в условиях (3) расходе энергии, определяемом заданным функционалом качества $I(u_p) \rightarrow \min_{u_p}$.

Покажем, что и в такой задаче чаще всего сохраняется релейный характер оптимальной программы $u_p^{**}(t)$. Обоснование этого утверждения проведём по схеме доказательства, использованной в разд. 2 для задачи оптимального быстрогодействия, с заменой $u^*(t)$ величиной $u^{**}(t)$. Дополним систему равенств (6) при сеточной аппроксимации $u_N^{**}(t) = (u_N^{(h)})$, $h = \overline{1, N}$, искомой функции $u^{**}(t) \in \{u_1^{**}(t), u_2^{**}(t)\}$ m равенствами

$$I_c^k(u) = f_0^k(u_N^{(1)}, u_N^{(2)}, \dots, u_N^{(N)}), \quad k = \overline{1, m}, \quad (16)$$

для вычисления по известным достаточно гладким функциям f_0^k своих аргументов приближённых значений $I_c^k(u)$ расхода энергии на m временных слоях t_k , $k = \overline{1, m}$, $t_m = t^0$.

Примем теперь $N = m^4 + m$ в (6) и (16) вместо $N = m^4$ для задачи быстрогодействия и рассмотрим (6) и (16) в совокупности как систему N уравнений относительно $u_N^{(h)}$, $h = \overline{1, N}$, при заданных N значениях Q_{jig}^k и I_c^k . Если теперь якобиан

$$J_1 = \det \left[\frac{\partial f_0^k}{\partial u_N^{(h)}}; \frac{\partial f_{jig}^k}{\partial u_N^{(h)}} \right], \quad j, i, g, k = \overline{1, m}, \quad (17)$$

подобно (7), отличен от нуля для достаточно больших m , то опять, аналогично задаче быстрогодействия, по теоремам о неявных функциях найдётся в условиях (5) вариация δu_N^{**} , обеспечивающая, наряду с выполнением соотношения (8) для варьируемого конечного состояния объекта, отрицательное приращение $\delta I_c^{(m)} < 0$ расхода энергии. Отсюда, как и для $u^*(t)$, следует, что управление $u^{**}(t)$ не может удовлетворять неравенствам (5), и, значит, оно является релейной функцией времени при $J_1 \neq 0$ в (17).

Если $J_1 = 0$, то равенства (9), рассматриваемые при $N = m^4 + m$ и дополняемые равенствами

$$dI_c^k = \sum_{h=1}^N \frac{\partial f_0^k}{\partial u_N^{(h)}} \delta u_N^{(h)} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (18)$$

для линейных приближений dI_c^k вариацией δI_c^k при всех $k = \overline{1, m}$, образуют однородную линейную систему N уравнений для $dQ_{jig}^k = dI_c^k = 0$ с ненулевым решением относительно $\delta u_N^{(h)}$, $h = \overline{1, m^4 + m}$, что при $m \rightarrow \infty$ приводит, наряду с (10), (11), к предельному соотношению

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{\delta I_c^k; k = \overline{1, m}\} = \delta I(u(t)) = 0, \quad t \in (0, t^0). \quad (19)$$

Анализ уравнения (13) закона сохранения в вариациях опять приводит с учётом (10) к соотношению (14) при $\delta u(t) \neq 0$, которое оказывается невыполнимым вместе с равенством (19), подобно указанным выше примерам, в прикладных задачах технологической теплофизики с интегральными величинами Φ_1 и Φ_2 энергетического воздействия на объект при $\frac{\partial \Phi_1(Q^*, u_1^*)}{\partial u_1} \neq 0$ или $\frac{\partial \Phi_2(Q^*, u_2^*)}{\partial u_2} \neq 0$.

Следовательно, в указанных ситуациях $u^{**}(t)$ действительно является релейной функцией времени и её оптимальная программа, априори задаваемая в этих случаях с точностью до числа N^{**} и длительностей $\Delta_i, i = \overline{1, N^{**}}$, интервалов её постоянства, может быть опять найдена альтернансным методом.

4. Оптимальное управление процессом индукционного нагрева. В качестве конкретного примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу оптимального управления периодическим процессом индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы с управляющим воздействием $u_1(t)$ по напряжению на индукторе [5, 6].

Температурное поле $Q(x, t)$ нагреваемых тел описывается двумерным нелинейным уравнением теплопроводности вида (1) с краевыми условиями (2) при $q = 2$, где $x = (l, y); l \in [0, R], y \in [-L, L]$ — радиальная и продольная пространственные координаты соответственно; R и L — радиус и половина длины цилиндра; $F(x, Q, u_1)$ — удельная мощность внутренних источников тепла, определяемая в зависимости от своих аргументов совместным решением (1), (2) с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля; $F_1(x, Q, u_2)$ в (2) характеризует величину тепловых потерь с поверхности нагреваемого тела в условиях $u_2 = 0$, которые принимаются одинаковыми на обоих торцах цилиндра $y = -L$ и $y = L$. Численная модель $Q(l, y, t)$ разработана на базе конечно-элементного программного продукта FLUX [14].

Пусть требуется обеспечить в соответствии с условием (4) равномерный нагрев слитка перед последующей обработкой давлением до заданной температуры $\bar{Q}(x) = Q^0 = \text{const}$ с абсолютной точностью ε , равной заданной допустимой величине ε_0 :

$$\max_{l \in [0, R], y \in [-L, L]} |Q(l, y, t^0) - Q^0| \leq \varepsilon_0. \quad (20)$$

Тогда применительно к задаче быстрогодействия необходимо найти программное оптимальное управление $u_1^*(t) \in [0, u_{1\max}]$, обеспечивающее выполнение требования (20) за минимальное время t_{\min}^0 .

Согласно полученным в разд. 2 результатам $u_1^*(t)$ является релейной функцией времени и представляется в параметризованной форме с точностью до числа N^* и длительностей Δ_i интервалов её постоянства:

$$u_1^*(t) = \frac{u_{\max}}{2} [1 + (-1)^{s+1}], \quad \sum_{i=1}^{s-1} \Delta_i < t < \sum_{i=1}^s \Delta_i, \quad s = \overline{1, N^*}, \quad \Delta_0 = 0. \quad (21)$$

При управлении (21) на численной модели $Q(l, y, t)$ может быть получено конечное распределение температур $Q(l, y, t^0)$ в виде явной зависимости $Q(l, y, \Delta)$ от $\Delta = (\Delta_i), i = \overline{1, N^*}$. Тогда исходная задача быстрогодействия сводится к следующей задаче полубесконечной оптимизации [1, 2, 5, 6]:

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^{N^*} \Delta_i \rightarrow \min_{\Delta}, \quad (22)$$

$$\Phi(\Delta) = \max_{l \in [0, R], y \in [-L, L]} |Q(l, y, \Delta) - Q^0| \leq \varepsilon_0. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала типичный случай с заданной точностью нагрева ε_0 , равной минимально возможной величине $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, достижимой в классе двухинтервальных управляющих воздействий вида (21) при $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, которые реализуют двухэтапный режим

нагрева [1, 2, 5, 6] с максимальной интенсивностью на первом интервале постоянства $u_1(t) = u_{\max}$, $t \in (0, \Delta_1)$, и последующее выравнивание температур на втором интервале $u_1(t) = 0$, $t \in (\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2)$. При этом $N^* = 2$ в (22) [5, 6]. В таком случае согласно альтернансным свойствам $Q(l, y, \Delta_1, \Delta_2)$ в условиях $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в конце оптимального процесса при небольших заглоблениях загрузки в индукторе достигаются предельно допустимые отклонения результирующего температурного распределения от заданной величины Q^0 , равные $\pm \varepsilon_{\min}^{(2)}$, в трёх точках по объёму цилиндра: на его оси ($l = 0, y = L$) и боковой поверхности ($l = R, y = L$) в торцевом сечении цилиндра ($y = L$) с минимальной температурой $Q^0 - \varepsilon_{\min}^{(2)}$, а также во внутренней точке (l_3, y_3) температурного максимума $Q^0 + \varepsilon_{\min}^{(2)}$ [5, 6].

Указанные свойства приводят по общей схеме альтернансного метода к системе пяти уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(0, L, \Delta_1, \Delta_2) - Q^0 = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(l_3, y_3, \Delta_1, \Delta_2) - Q^0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ Q(R, L, \Delta_1, \Delta_2) - Q^0 = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \\ \frac{\partial Q(l_3, y_3, \Delta_1, \Delta_2)}{\partial l} = \frac{\partial Q(l_3, y_3, \Delta_1, \Delta_2)}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (24)$$

которая может быть решена известными методами на цифровой модели объекта относительно всех искомым неизвестных. К их числу относятся параметры Δ_1, Δ_2 оптимального управления, величина $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ и координаты l_3, y_3 точки экстремума $Q(l, y, \Delta)$ на координатной плоскости (l, y) .

Некоторые конкретные результаты [15] приведены на рис. 1.

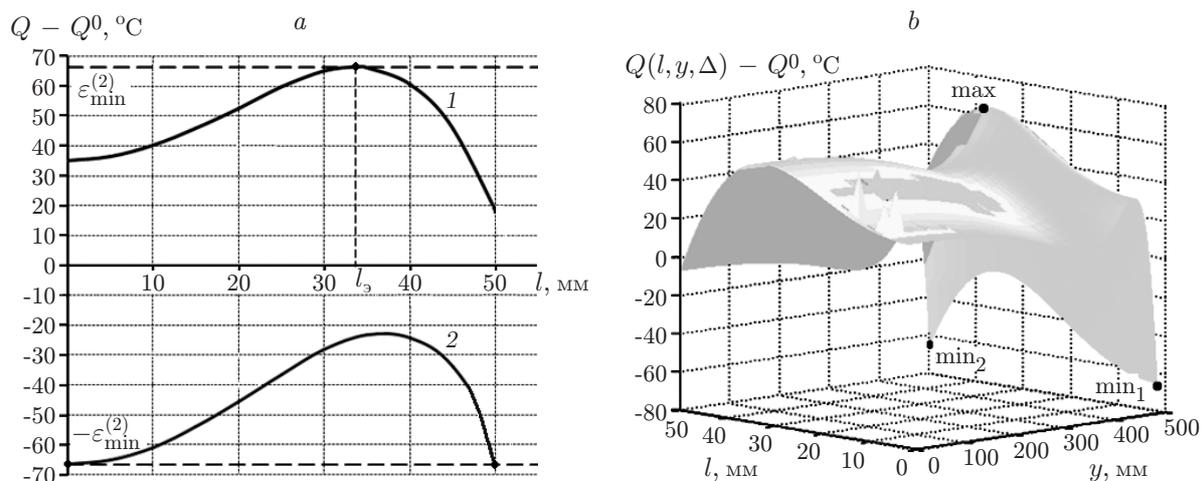


Рис. 1. Результаты расчёта оптимального по быстродействию процесса нагрева стального цилиндрического слитка ($R = 0,525$ м, $L = 0,45$ м, $Q_0 = 20$ °С, $Q^0 = 1200$ °С) в индукторе длиной 1,046 м при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)} = 66,4$ °С: *a* — результирующее радиальное распределение температур (кривая 1 — $y = y_3 = 0,415$ м, 2 — $y = L = 0,450$ м); *b* — пространственная конфигурация результирующего температурного поля

Подобно $u_1^*(t)$, оптимальное по энергозатратам управление $u_1^{**}(t)$ рассматриваемым процессом индукционного нагрева в соответствии с результатами разд. 3 следует искать в том же классе кусочно-постоянных функций (21). При этом расход энергии в отличие от (22) определяется суммой длительностей только нечётных интервалов постоянства $u^{**}(t)$, на протяжении которых $u^{**}(t) = u_{\max}$:

$$I_1(\Delta) = \sum_{i=1,3,5,\dots,N_1}^{N_1} \Delta_i \rightarrow \min_{\Delta} \quad (25)$$

$$N_1 = N^{**} \quad \text{или} \quad N_1 = N^{**} - 1 \quad \text{для нечётных или чётных } N^{**},$$

и в условиях требований (20) к конечному температурному состоянию задача опять сводится к ЗПО с целевой функцией (25) и ограничением (23).

Можно показать, что оптимальные по быстродействию и энергопотреблению алгоритмы управления $u_1^*(t)$ и $u_1^{**}(t)$ совпадают при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, но отличаются друг от друга при меньшей допустимой точности нагрева $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (23) [5, 6].

В частности, при минимально возможной величине $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)}$, достижимой в классе одноинтервальных управляющих воздействий $u_1(t) = u_{\max}$, $t \in (0, t^0)$, $t^0 = \Delta_1$, организующих процесс нагрева с максимальной интенсивностью на всём его протяжении, в конечный момент времени t^0 в обоих случаях достигаются согласно альтернативным свойствам $Q(l, y, \Delta)$ максимальные отклонения $Q(l, y, \Delta)$ от Q^0 в двух, но не одинаковых для обоих критериев оптимальности, точках по объёму цилиндра вследствие разной конфигурации оптимального пространственного распределения результирующего температурного состояния в задачах с целевыми функциями (22) и (25) [5, 6]. Вышеизложенное приводит к различным системам уравнений альтернативного метода, решения которых существенно отличаются друг от друга.

В задаче быстродействия (22), (23) при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ получаем для $N^* = 1$ систему четырёх уравнений [5, 6]:

$$\begin{cases} Q(0, L, \Delta_1) - Q^0 = -\varepsilon_{\min}^{(1)}, \\ Q(l_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}, \Delta_1) - Q^0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}, \\ \frac{\partial Q(l_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}, \Delta_1)}{\partial l} = \frac{\partial Q(l_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}, \Delta_1)}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

фиксирующую точки $(0, L)$ и $(l_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})$ с минимальной и максимальной конечными температурами, которая разрешается относительно четырёх неизвестных: $\Delta_1, \varepsilon_{\min}^{(1)}, l_{\varepsilon}$ и y_{ε} .

В задаче минимизации расхода энергии (25), (23) с уже найденной в процессе решения системы уравнений (26) величиной $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ вместо (26) будем иметь при $N^{**} = 2$ [5, 6]

$$\begin{cases} Q(0, L, \Delta_1, \Delta_2) - Q^0 = -\varepsilon_{\min}^{(1)}, \\ Q(R, L, \Delta_1, \Delta_2) - Q^0 = -\varepsilon_{\min}^{(1)}. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь уже оптимальное управление $u_1^{**}(t)$ имеет два интервала постоянства, а конечное распределение температур отличается достижением только температурного минимума

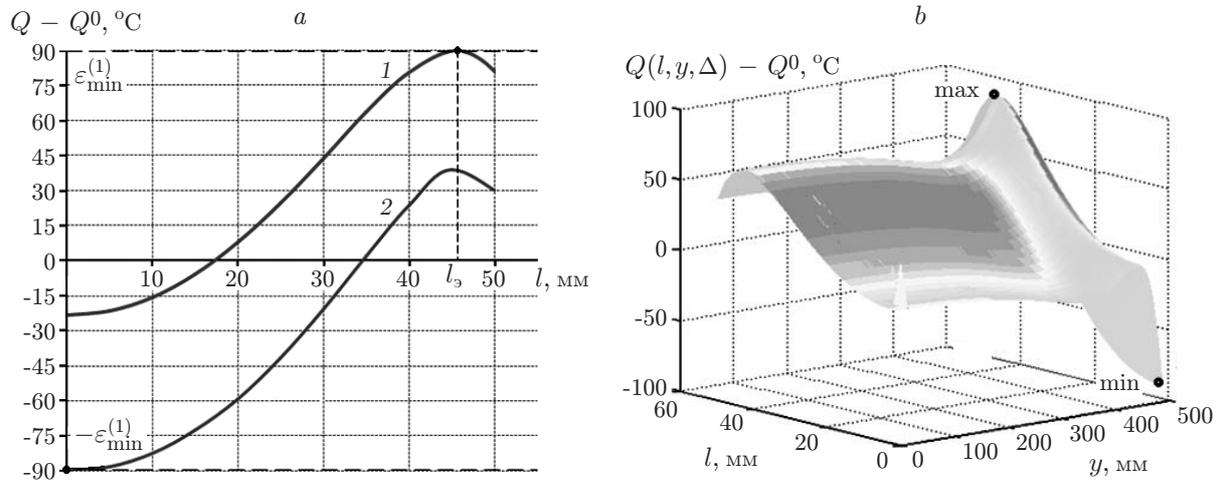


Рис. 2. Результаты расчёта оптимального по быстродействию процесса нагрева стального цилиндрического слитка при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)} = 90,1$ °С: *a* — результирующее радиальное распределение температур (кривая 1 — $y = y_0 = 0,432$ м, 2 — $y = L = 0,450$ м); *b* — пространственная конфигурация результирующего температурного поля

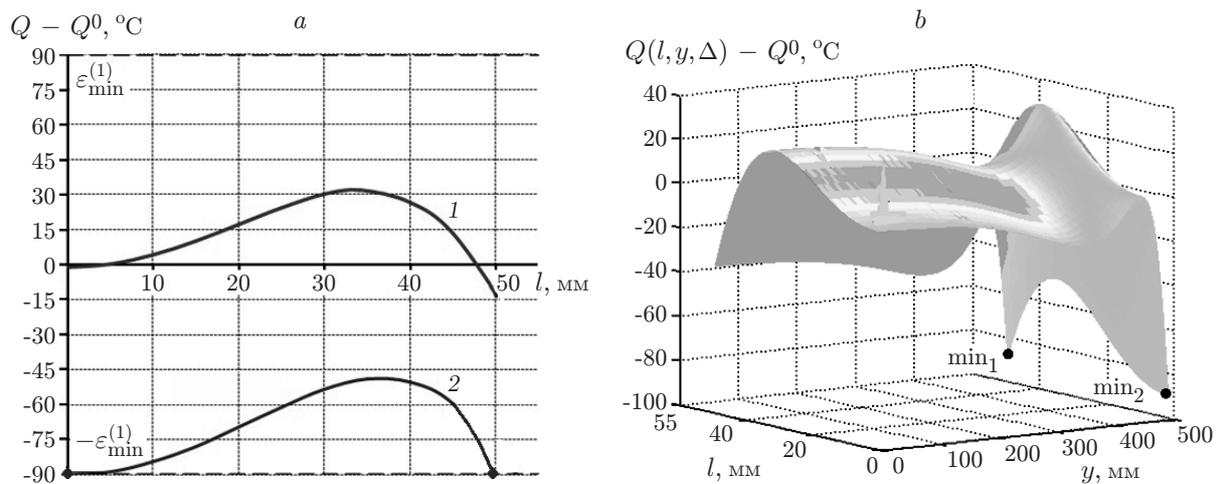


Рис. 3. Результаты расчёта оптимального по расходу энергии процесса индукционного нагрева стального цилиндрического слитка при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)} = 90,1$ °С: *a* — результирующее радиальное распределение температур (кривая 1 — $y = y_0 = 0,032$ м, 2 — $y = L = 0,450$ м); *b* — пространственная конфигурация результирующего температурного поля

в двух точках $(0, L)$ и (R, L) торцевого сечения цилиндра на его оси и боковой поверхности. Система двух уравнений (27) позволяет найти эти два искомого параметра Δ_1 и Δ_2 оптимальной программы $u_1^{**}(t)$ при заданной точности нагрева $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$. Аналогичная система уравнений сохраняется для всех заданных значений ε_0 : $\varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(1)}$. Некоторые результаты [16] расчёта $u_1^*(t)$ и $u_1^{**}(t)$ при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ для исходных данных рис. 1 приведены на рис. 2, 3.

Заключение. Полученные в данной работе результаты, устанавливающие возможность предварительной параметризации искомого управляющих воздействий, позволяют распространить конструктивные вычислительные процедуры предложенного авторами

альтернативного метода определения алгоритмов программного оптимального управления СРП на широкий круг представляющих самостоятельный интерес задач оптимизации по базовым критериям быстродействия и энергопотребления объектов технологической теплофизики, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных с нелинейными краевыми условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рапопорт Э. Я.** Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
2. **Рапопорт Э. Я.** Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
3. **Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я.** Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 22–33.
4. **Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.** Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автоматика. 2009. 45, № 5. С. 103–112.
5. **Рапопорт Э. Я.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Металлургия, 1993. 278 с.
6. **Rapoport E., Pleshivtseva Yu.** Optimal Control of Induction Heating Processes. London — New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007. 349 p.
7. **Бутковский А. Г.** Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
8. **Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.** Управление нагревом металла. М.: Металлургия, 1981. 271 с.
9. **Рей У.** Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 608 с.
12. **Лыков А. В.** Теплообмен. М.: Энергия, 1972. 560 с.
13. **Рапопорт Э. Я.** Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.
14. **Шарапова О. Ю.** Численное моделирование процесса периодического индукционного нагрева на базе конечно-элементного программного пакета FLUX // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2010. № 7(28). С. 180–185.
15. **Шарапова О. Ю.** Оптимальное управление многомерными моделями периодического процесса индукционного нагрева // Научные ведомости С.-Петербургского гос. политехн. ун-та. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2011. № 5. С. 31–35.
16. **Плешивцева Ю. Э., Шарапова О. Ю.** Энергосберегающие алгоритмы оптимального управления процессами индукционного нагрева // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2011. № 4(32). С. 171–180.

Поступила в редакцию 28 апреля 2012 г.