

УДК 62-50

КОНТРОЛЬ ВЫРОЖДЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КРАТНЫМИ ИНТЕРВАЛАМИ ДИСКРЕТНОСТИ

Н. А. Дударенко, М. В. Полякова, А. В. Ушаков

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
197101, Санкт-Петербург, просп. Кронвержский, 49
E-mail: dudarenko@yandex.ru*

Рассматриваются дискретные многоканальные системы, сепаратные каналы которых характеризуются интервалами дискретности различной длительности, удовлетворяющими условию кратности, на предмет возможного вырождения. Основной результат базируется на концепции сводимости каналов к модельному представлению в виде дискретного описания с интервалом дискретности, равным половине минимального. Исследуется возможность вырождения дискретных многоканальных систем в случае неправильного согласования интенсивностей входных потоков с исходными интервалами дискретности. Поставленная задача решается количественно с помощью функционалов вырождения, сконструированных на спектре сингулярных чисел критериальных матриц.

Ключевые слова: многомерная дискретная система, кратные интервалы дискретности, гипотеза фильтра, вырождение, сингулярные числа, функционал вырождения, критериальная матрица.

Введение. Постановка задачи. Введение в проблематику вырождения и постановка задачи технологии его контроля в целях формирования количественной оценки процесса вырождения изложены в работах [1, 2]. В них рассмотрены каузальные факторы возможного вырождения, виды его проявления и указания на то, что в предельной форме вырождение ведёт к полной потере работоспособности многоканальной системы, вплоть до катастрофы.

Вырождение систем может происходить по причине параметрической природы. Каузальными факторами при этом являются: неудачно организованные связи между каналами системы, неудачно назначенные показатели характеристик этих связей, неудачно сформированные полосы пропускания каналов, а в случае, если система имеет дискретную природу, неудачно выбранные и распределённые по каналам интервалы дискретности и т. д.

Последнему из перечисленных факторов и посвящается предлагаемая работа. Таким образом, рассматривается проблема контроля вырождения дискретных многоканальных систем, сепаратные каналы которых характеризуются интервалами дискретности различной длительности, удовлетворяющими условию кратности.

Количественная оценка процесса вырождения. Количественная оценка склонности системы к вырождению формируется с помощью функционалов вырождения J_{Dv} [1, 2], которые конструируются на спектре сингулярных чисел α_j ($j = \overline{1, m}$) ($m \times m$)-матрицы $N(\theta, w)$ линейной алгебраической задачи (ЛАЗ) $\eta(w) = N(\theta, w)\chi(w)$, где $\eta(w)$, $\chi(w)$ — m -мерные векторы; θ — p -мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N , причём $\chi(w)$ может иметь смысл $\chi(0)$, а w — параметр, имеющий смысл переменной t непрерывного или k дискретного времени, выраженного в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = k\Delta t$. Функционал вырождения задаётся соотношением

$$J_{Dv} = \alpha_v / \alpha_1, \quad v = \overline{m, 1}, \quad (1)$$

где α_v и α_1 — v -е и максимальное сингулярные числа матрицы $N(\theta, w)$. Наиболее используемым из них является глобальный функционал вырождения $J_D = \alpha_m/\alpha_1$, с помощью которого конструируется априорная оценка возможного вырождения системы. Свойства функционалов вырождения можно найти в работах [1, 2].

Если отношение вход/выход многоканальной дискретной системы свести к линейной алгебраической задаче $\eta(k) = N(\theta, k)\chi(k)$, в которой параметр θ имеет смысл вектора, составленного из интервалов дискретности отдельных каналов этой системы, то аппарат функционалов вырождения, разработанный для ЛАЗ, позволяет отследить процесс вырождения дискретной многоканальной динамической системы по последовательному обнулению функционалов вырождения J_{Dv} матрицы системы N , именуемой далее критериальной.

Задача, поставленная в данной работе, будет решена, если отдельные каналы дискретной системы, характеризующиеся различными, но кратными наименьшему, интервалами дискретности, получат эквивалентное представление с единым интервалом дискретности [3, 4].

Сведение дискретной многоканальной системы с кратными интервалами дискретности к эквивалентной дискретной системе с единым интервалом дискретности. Под дискретной системой (объектом) будем понимать рекуррентное описание функционального объединения непрерывной системы (объекта) и квантователя с некоторым интервалом дискретности, агрегированного с запоминающим элементом нулевого порядка на интервал дискретности [5, 6]. В связи с этим становятся справедливыми следующие утверждения.

Утверждение 1. Система (рис. 1, *a*), полученная агрегированием квантователя (К) по времени с интервалом квантования T , запоминающего элемента (фиксатора (Ф)) нулевого порядка на интервал квантования и непрерывного объекта управления, имеет эквивалентное дискретное представление (рис. 1, *b*) в виде дискретной системы с интервалом дискретности $\Delta t = 0,5T$ и элементом задержки (ЭЗ) на один интервал дискретности на её входе.

Доказательство утверждения осуществим в два этапа. На первом этапе рассмотрим процесс преобразования сигнала (рис. 2) в тракте «непрерывный скалярный сигнал (НСС) $u(t)$ — квантователь с интервалом квантования T — фиксатор — кусочно-непрерывный сигнал (КНС) $u^*(t) = u(k\Delta t)$ при $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ » (НСС—К—Ф—КНС).

Предположим, что непрерывный сигнал $u(t)$ является непрерывно нарастающим: $u(t) = U_0 t$. На рис. 3, *a* дана картина преобразования сигнала $u(t)$ в сигнал $u^*(t)$ в указанном тракте, там же приведён сигнал $u(t - T/2)$, который представляет собой сигнальную

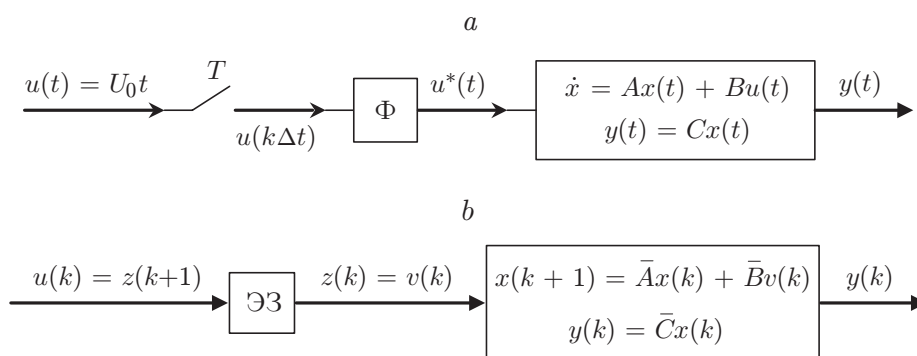


Рис. 1

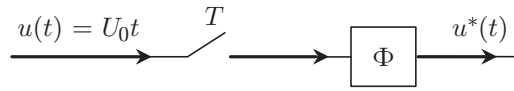


Рис. 2

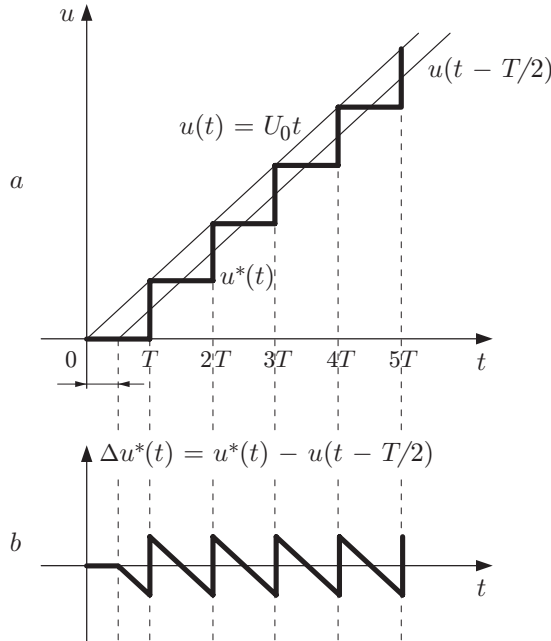


Рис. 3

медиану $u^*(t)$. На рис. 3, *b* приведена эпюра сигнала $\Delta u^*(t)$, являющегося отклонением КНС $u^*(t)$ от сигнальной медианы сигнала $u(t - T/2)$, так что $\Delta u^*(t) = u^*(t) - u(t - T/2)$.

Введение в рассмотрение сигналов $u(t - T/2)$ и $\Delta u^*(t)$ позволяет изобразить тракт НСС—К— Φ —КНС в виде структурной схемы на рис. 4, *a*. Если предположить выполнение гипотезы фильтра [6], то функциональное объединение цепи НСС—К— Φ —КНС с непрерывной частью системы получает эквивалентное представление, показанное на рис. 4, *b*.

На втором этапе формулируется задача построения дискретного представления непрерывной системы (рис. 5) с интервалом дискретности $\Delta t = 0,5T$, решение которой приводит к схеме на рис. 1, *b*.

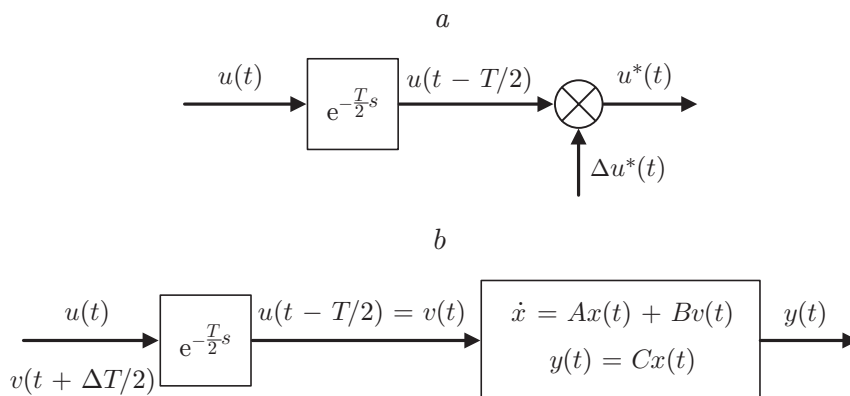


Рис. 4

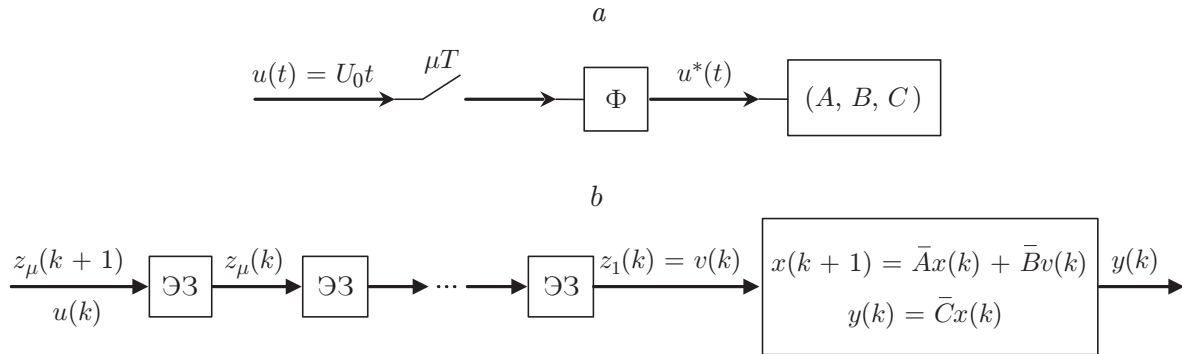


Рис. 5

Аналитическое описание этой дискретной системы имеет вид

$$x_{\text{д}}(k+1) = A_{\text{д}}x_{\text{д}}(k) + B_{\text{д}}u(k); \quad y(k) = C_{\text{д}}x_{\text{д}}(k); \quad x_{\text{д}}(0), \quad (2)$$

где $x_{\text{д}} = [x^T, z^T]^T$, u, y — агрегированный вектор состояния дискретной системы «элемент задержки на один интервал дискретности — дискретное описание непрерывной исходной части», переменная управления и выходная переменная такие, что $\dim x_{\text{д}} = n_{\text{д}} = \{(\dim x = n) + (\dim z = 1)\}$, $\dim u = \dim y = 1$; $A_{\text{д}}, B_{\text{д}}, C_{\text{д}}$ — соответственно матрицы состояния, управления и выхода, согласованные по размерам с переменными системы (2) и аналитически определяемые выражениями

$$A_{\text{д}} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{\text{д}} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_{\text{д}} = [C \quad 0]. \quad (3)$$

Утверждение 2. Система (рис. 5, а), полученная агрегированием квантователя по времени с интервалом квантования μT , запоминающего элемента Φ нулевого порядка на интервал квантования и непрерывного объекта управления, имеет эквивалентное дискретное представление (рис. 5, б) в виде дискретной системы с интервалом дискретности $\Delta t = 0,5T$ и цепочкой из μ элементов задержки на один интервал дискретности на её входе.

Доказательство утверждения 2 строится по схеме доказательства утверждения 1.

Таким образом, сформирована эквивалентная дискретная система с интервалом дискретности $\Delta t = 0,5T$ для исходной системы (см. рис. 5, а), квантователь которой осуществляет выборку из непрерывного сигнала управления с интервалом квантования, равным μT .

Аналитическое описание дискретной системы (см. рис. 5, б) имеет вид

$$x_{\text{д}}(k+1) = A_{\text{д}}x_{\text{д}}(k) + B_{\text{д}}u(k); \quad y(k) = C_{\text{д}}x_{\text{д}}(k); \quad x_{\text{д}}(0), \quad (4)$$

где $x_{\text{д}} = [x^T, z^T]^T$, u, y — агрегированный вектор состояния дискретной системы « μ элементов задержки на интервал дискретности $\Delta t = 0,5T$ — дискретное описание непрерывной исходной части», переменная управления и выходная переменная такие, что $\dim x_{\text{д}} = n_{\text{д}} = \{(\dim x = n) + (\dim z = \mu)\}$, $\dim u = \dim y = 1$; $A_{\text{д}}, B_{\text{д}}, C_{\text{д}}$ — соответственно матрицы состояния, управления и выхода, согласованные по размерам с переменными

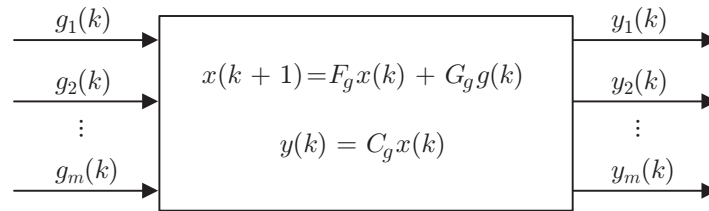


Рис. 6

системы (4) и аналитически определяемые выражениями

$$A_{\text{д}} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}\bar{P}_{\mu} \\ 0 & J_{\mu}(0) \end{bmatrix}; \quad B_{\text{д}} = \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 0_{(\mu-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_{\text{д}} = [C \quad 0_{1 \times \mu}], \quad (5)$$

где $J_{\mu}(0)$ — $(\mu \times \mu)$ -клетка Жордана с нулевыми диагональными элементами, такая что

$$J_{\mu}(0) = \begin{bmatrix} 0_{(\mu-1) \times 1} & I_{(\mu-1) \times (\mu-1)} \\ 0_{1 \times \mu} \end{bmatrix}; \quad \bar{P}_{\mu} = [1 \quad 0_{1 \times (\mu-1)}].$$

На рис. 6 приведена дискретная многоканальная система, построенная на основе многоканального объекта управления, каждый из каналов которого в исходном виде имеет представление, как на рис. 5, а, в эквивалентном виде — как на рис. 5, б, и введённого в него формирователя дискретного сигнала управления, реализующего закон управления

$$u(k) = K_g g(k) - K x(k) \quad (6)$$

в виде прямой связи по задающему воздействию $g(k)$ с матрицей K_g и обратной связи по вектору состояния $x(k)$ с матрицей K .

Очевидно, что система на рис. 6 имеет аналитическое описание

$$x_{\text{д}}(k+1) = F_{\text{д}} x_{\text{д}}(k) + G_{\text{д}} g(k); \quad y_{\text{д}} = C_{\text{д}} x_{\text{д}}(k), \quad (7)$$

где $F_{\text{д}} = A_{\text{д}} - B_{\text{д}}K$; $G_{\text{д}} = B_{\text{д}}K_g$.

Система (7) характеризуется тем, что все её каналы работают с одним интервалом дискретности $\Delta t = 0,5T$, имеет на входе μ_j элементов задержки на интервал дискретности Δt , где μ_j — целое и удовлетворяющее соотношению $\mu_j > \mu_{j-1}$, $j = \overline{1, m}$, и является объектом исследования при оценке влияния неправильного распределения заявок по каналам дискретной многоканальной системы на процесс возможного вырождения.

Исследование дискретной многоканальной динамической системы при многочастотном векторном дискретном гармоническом воздействии. Ставится задача исследования дискретной многоканальной системы общего вида (7) с единым интервалом дискретности при многочастотном дискретном гармоническом сигнале.

Источник дискретного внешнего конечномерного воздействия зададим в форме автономной дискретной системы, характеризующейся минимальной реализацией, представимой в виде

$$z(k+1) = E_{\text{д}} z(k); \quad z(0); \quad g(k) = P_{\text{д}} z(k), \quad (8)$$

где z — вектор состояния дискретной модели задающего воздействия: $z \in R^l$; E_d, P_d — матрицы состояния и выхода дискретной модели задающего воздействия: $E_d \in R^{l \times l}$, $P_d \in R^{m \times l}$, причём матрица P_d удовлетворяет условию $P_d P_d^T = I$ (I — единичная матрица размера $m \times m$). Дискретная модель задающего воздействия выбирается минимальной размерности, но такой, чтобы её выход

$$g(k) = P_d z(k); \quad z(k) = E_d^k z(0) \quad (9)$$

на множестве начальных состояний $z(0)$ адекватно представлял весь класс конечномерных задающих воздействий системы (7).

Критериальная матрица N_d системы (7) при многочастотном векторном дискретном гармоническом воздействии имеет вид [1, 3]

$$N_d = C_d [I - 2F_d \cos \omega_j \Delta t + F_d^2]^{-1} [I \cos \omega_j \Delta t - F_d (-\sin \omega_j \Delta t) I] G_d, \quad (10)$$

где $0 \leq \omega_j \leq \infty$ — частота многочастотного гармонического воздействия.

Пример. Рассмотрим дискретную многоканальную динамическую систему вида (7):

$$x_d(k+1) = F_d x_d(k) + G_d g(k), \quad y_d = C_d x_d(k).$$

Система состоит из трёх взаимосвязанных каналов, каждый из которых имеет третий порядок. Матрицы состояния сепаратных каналов непрерывного аналога исследуемой системы обладают распределением мод Баттерворта с характеристическими частотами $\omega_{01} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{02} = 6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{03} = 18 \text{ с}^{-1}$, так что

$$F_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{01}^3 & -2\omega_{01}^2 & -2\omega_{01} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & -\omega_{02}^3 & -2\omega_{02}^2 & -2\omega_{02} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & -\omega_{03}^3 & -2\omega_{03}^2 & -2\omega_{03} \end{bmatrix},$$

$$G_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_{01}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{02}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{03}^3 \end{bmatrix}, \quad C_d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и кратными интервалами дискретности $\Delta t_1 = 0,01 \text{ с}$, $\Delta t_2 = 0,0033 \text{ с}$, $\Delta t_3 = 0,0011 \text{ с}$. Очевидно, что минимальному значению интервала дискретности соответствует время

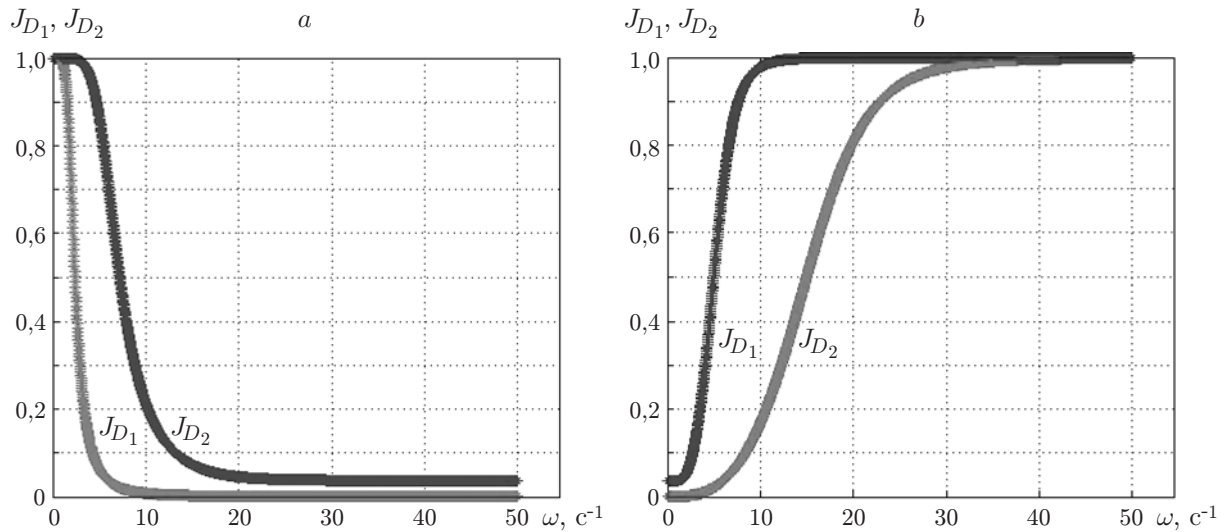


Рис. 7

$\Delta t_3 = 0,0011$ с. Следовательно, количество задержек в третьем канале многоканальной системы будет равно 1, во втором — 3, а в первом — 9.

Рассмотрим исследуемую систему при внешнем гармоническом многочастотном воздействии частоты ω_j с вектором распределения частот γ по входам системы и матрицей весов Γ вида

$$\dot{z}(t) = Ez(t); \quad z(0); \quad g(t) = Pz(t),$$

где

$$E = \text{diag} \left\{ E_{jj} : E_{jj} = \begin{vmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{vmatrix}; \quad \omega_j = \gamma_j \omega : j = \overline{1,3} \right\}, \quad \gamma = [1 \quad 1/3 \quad 1/9]^T;$$

$$P_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} : j = \overline{1,3};$$

$$\Gamma = \text{diag} \left\{ \Gamma_{jj} : \Gamma_{jj} = \begin{vmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \beta_j \end{vmatrix}; \quad j = \overline{1,3} \right\}, \quad \beta_j = 1.$$

Следуя используемому в данной работе методу, приведём кривые функционалов вырождения (рис. 7) для случаев, когда коэффициенты вектора распределения частот многочастотного векторного гармонического воздействия по входам системы представляют собой $\gamma = [1/9 \quad 1/3 \quad 1]^T$ (рис. 7, а) и $\gamma = [1 \quad 1/3 \quad 1/9]^T$ (рис. 7, б).

Очевидно, что исследуемая система функционирует без вырождения только в случае согласованного распределения частот входного воздействия с характеристическими частотами и интервалами дискретности каждого из сепаратных каналов системы (см. рис. 7, б).

Заключение. Построение полной дискретной модели многоканальной системы, каждый сепаратный канал которой функционирует со своим интервалом дискретности, удовлетворяющим условию кратности, возможно на основе единого интервала дискретности, равного половине минимального интервала дискретности исходной дискретной системы с включением на входе каналов цепочки из элементов задержки с числом, равным кратности интервала дискретности в каждом канале. Полученное представление дискретной модели

упрощает процедуру коррекции системы с помощью аппарата функционалов вырождения в случае, если её исходное описание задано так, что интенсивности входных потоков не согласованы с исходными интервалами дискретности её сепаратных каналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дударенко Н., Ушаков А.** Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 232 p.
2. **Дударенко Н. А., Ушаков А. В.** Технология количественной оценки склонности сложных систем многомерного управления к вырождению // Автометрия. 2010. **46**, № 2. С. 20–26.
3. **Dudarenko N. A., Ushakov A. V.** Performance evaluation of MIMO discrete dynamic systems with periodic disturbances using degeneration factors // Proc. of the IFAC Workshop PSYCO. Turkey, 2010. Vol. 4, Pt. 1. URL: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/46937.html> (дата обращения: 10.08.2011).
4. **Дударенко Н. А.** Спектральный анализ сложных дискретных систем при стохастических экзогенных воздействиях с применением в задачах контроля вырождения // Науч.-техн. вестн. С.-Пб.: СПбГУ ИТМО, 2006. Вып. 28. С. 140–149.
5. **Гудвин Г. К., Гребе С. Ф., Сальгадо М. Э.** Проектирование систем управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 911 с.
6. **Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.** Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.

Поступила в редакцию 10 августа 2011 г.
