

УДК 519.642

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ Трёхмерной РЕКОНСТРУКЦИИ ПО КОНУСНЫМ ПРОЕКЦИЯМ

В. П. Карих

*Федеральный научно-производственный центр «Алтай»,
659322, г. Бийск, ул. Социалистическая, 1
E-mail: kar@frpc.secna.ru*

Рассмотрено в исторической последовательности появление и развитие алгоритмов трёхмерной реконструкции в рентгеновской томографии. Исследовано условие полноты данных для точной реконструкции объекта в одной точке. Показано, что некоторые точные алгоритмы позволяют реконструировать часть объекта по данным, удовлетворяющим условию полноты для этой части. Другие алгоритмы для решения такой же задачи требуют полного набора данных для всего объекта.

Ключевые слова: 3D-реконструкция, конусный пучок, преобразование Радона, интегрально-дифференциальное преобразование.

Введение. В современных системах 3D-томографии часто применяют приближённые алгоритмы реконструкции. Среди них наиболее популярен алгоритм Фельдкампта. Точные алгоритмы используются значительно реже по следующим причинам. Во-первых, требуется полный набор данных, во-вторых, велик объём вычислений, в-третьих, приближённые алгоритмы могут давать удовлетворительную точность. Постоянное совершенствование вычислительной техники даёт возможность применять более трудоёмкие точные алгоритмы. В предлагаемой работе рассматриваются свойства алгоритмов, позволяющие проводить точную реконструкцию части объекта, используя при этом неполный набор информации об объекте.

Среди точных алгоритмов рассматривают: инверсию Радона, алгоритм Туя, модификацию алгоритма Туя, выполненную О. Е. Трофимовым и А. С. Денисюком, алгоритм Гранжа и алгоритм Смита.

Задача данной работы — показать, что первые четыре алгоритма тесно связаны между собой, могут быть получены один из другого рядом преобразований и обладают свойством локальности. Алгоритм Смита таковым свойством не обладает.

Инверсия Радона. Свойство локальности. Первым алгоритмом 3D-реконструкции по интегральным проекциям является обобщение алгоритма двумерного обратного преобразования Радона. Здесь предполагается, что известны интегралы от искомой трёхмерной функции плотности по всем плоскостям, пересекающим объект. Формула реконструкции для данного случая получена в работе [1]:

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial^2 R(\mathbf{n}, t)}{\partial t^2} \sin(\theta) d\theta, \quad (1)$$

где $f(\mathbf{x})$ — плотность объекта в точке $\mathbf{x} = (x, y, z)$; $R(\mathbf{n}, t)$ — интеграл от плотности по плоскости, отстоящей на расстоянии t от начала координат и перпендикулярной направлению $\mathbf{n} = (\sin(\theta) \cdot \cos(\varphi), \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi), \cos(\theta))$:

$$R(\mathbf{n}, t) = \int f(\mathbf{x}) \delta(t - (\mathbf{x}, \mathbf{n})) d\mathbf{x}.$$

В подынтегральном выражении (1) вторая производная от R берётся в точке $t = (\mathbf{x}, \mathbf{n})$. Алгоритм представляется довольно простым и наглядным. Для реконструкции объекта в определённой точке \mathbf{x} необходимо просуммировать вторые производные от интегралов только по тем плоскостям, которые проходят через точку \mathbf{x} . В этом смысле алгоритм является локальным. Применение инверсии Радона (1) ограничено в основном тем, что для получения требуемого набора данных необходимо просвечивать объект плоским параллельным пучком. Если расстояние от источника до объекта конечно, то требуется перемещать источник излучения по поверхности (например, сфере), окружающей его. Такой объём информации избыточен. Поэтому, несмотря на простоту алгоритма обратного преобразования Радона в $3D$ -пространстве, схема сканирования по двумерной поверхности не нашла применения.

Алгоритм Туя и его модификация. В [2] была поставлена задача реконструирования функции в трёхмерном пространстве при известных её интегралах вдоль прямых, пересекающих некоторую кривую. Работа [3] явилась ответом на поставленный вопрос и стала основополагающей в реконструкции многомерных функций по конусным данным, получаемым при движении источника по пространственной кривой. Кроме того, выведена формула обращения для n -мерных комплексных функций в комплексном пространстве. Редукция формулы на действительные функции оказалась настолько затруднительной, что результаты значительное время не могли быть применены непосредственно в томографии. Лишь в [4] представлена формула реконструкции трёхмерных действительных функций по конусным данным, полученным от источника, движущегося по некоторой пространственной кривой. Вычислительная процедура по алгоритму Туя оказалась сложной, поскольку в формуле содержится преобразование Фурье, существующее только в смысле обобщённых функций. Для численной реализации алгоритма Туя желательно иметь формулу, содержащую регулярные функции. Такое выражение получено независимо в работах [5, 6]:

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) \frac{1}{(\phi'(\lambda), \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int_{S(\mathbf{n})} L(\mathbf{n}, D) g(\beta, \lambda) \Omega(\beta) \right] d\theta. \quad (2)$$

Здесь $\phi(\lambda)$ — траектория источника; $g(\beta, \lambda)$ — конусная проекция (интеграл от функции $f(\mathbf{x})$ вдоль луча, исходящего из точки траектории $\phi(\lambda)$ в направлении единичного вектора β); $\phi'(\lambda)$ — касательный вектор к траектории; $S(\mathbf{n})$ — единичная окружность, центр которой расположен в точке траектории источника $\phi(\lambda)$, а плоскость её перпендикулярна вектору \mathbf{n} ; $\Omega(\beta)$ — мера на окружности $S(\mathbf{n})$; оператор $L(\mathbf{n}, D)$ — дифференцирование функции $g(\beta, \lambda)$ по направлению вектора \mathbf{n} :

$$L(\mathbf{n}, D)g(\beta, \lambda) = n_1 \frac{\partial}{\partial \beta_1} g(\beta, \lambda) + n_2 \frac{\partial}{\partial \beta_2} g(\beta, \lambda) + n_3 \frac{\partial}{\partial \beta_3} g(\beta, \lambda). \quad (3)$$

Формулу реконструкции (2) можно считать окончательным решением задачи трёхмерной томографии с конусным пучком. Она является точной, в ней присутствуют регулярные функции, и она пригодна для реализации численных алгоритмов [7].

Связь инверсии Радона с алгоритмом Трофимова — Денисюка. В работе [8] показано, что алгоритм Радона (1) может быть реализован по данным конусного пучка при перемещении источника по пространственной кривой, удовлетворяющей условию полноты Кириллова — Туя.

Интеграл от плотности $R(\mathbf{n}, t)$ по плоскости, определяемой парой \mathbf{n}, t , может быть получен, как уже упоминалось ранее, на основании данных плоского параллельного пучка.

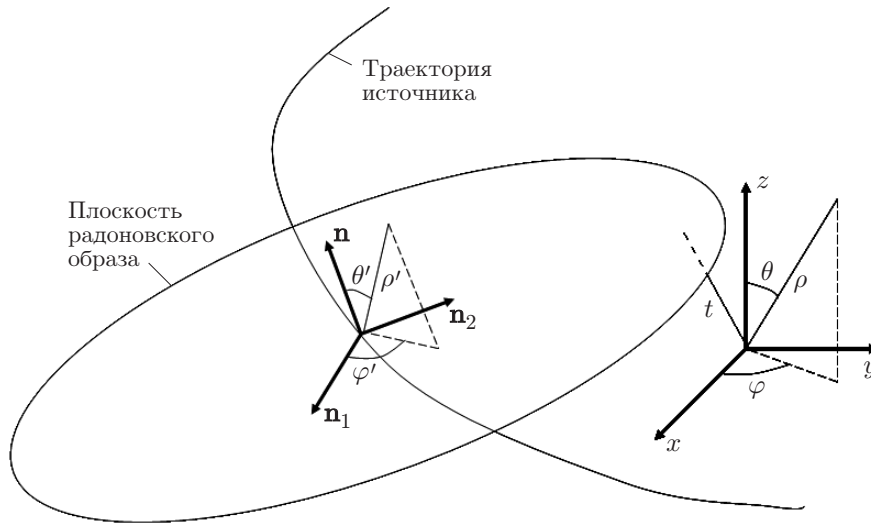


Рис. 1. Локальная система координат, определяемая плоскостью радоновского образа и точкой пересечения с траекторией источника

Рассмотрим далее конусную проекцию $g(\xi, \lambda)$, которая имеет начало в точке траектории $\phi(\lambda)$, принадлежащей плоскости \mathbf{n}, t , т. е. $(\phi(\lambda), \mathbf{n}) = t$. Пусть $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — три взаимно ортогональных единичных вектора, образующих локальную систему координат с началом в точке $\phi(\lambda)$. В этой системе введём сферические координаты ρ', θ', φ' (рис. 1). Следуя идее Гранжа [7], можно показать, что справедливо соотношение, связывающее данные конусного и плоского пучков:

$$\frac{\partial R(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta'} \int_0^{2\pi} g(\varphi', \theta', \lambda) d\varphi'. \tag{4}$$

Равенство (4) выполняется при условиях $\theta' = \pi/2$ и $(\phi(\lambda), \mathbf{n}) = t$. Для пояснения формулы (4) рассмотрим в локальной системе координат две пары поверхностей, изображённые на рис. 2: параллельные плоскости (a), отстоящие друг от друга на расстоянии Δt , и конические поверхности (b), имеющие общую вершину и разделённые угловым интервалом $\Delta \theta'$. При уменьшении интервала Δt параллельные плоскости превращаются в одну, определяемую параметрами \mathbf{n} и t . При уменьшении интервала $\Delta \theta'$ конические поверхности также соединяются в одну с теми же параметрами \mathbf{n} и t .

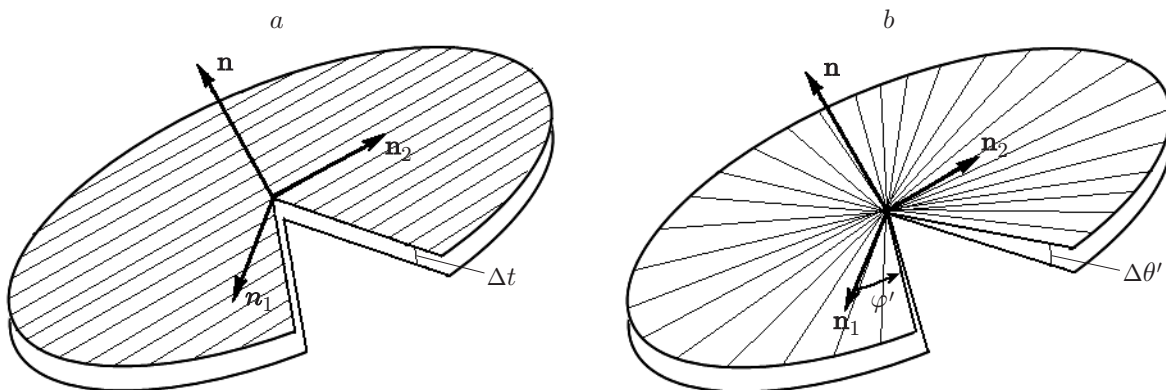


Рис. 2. Связь данных: параллельного (a) и конусного (b) пучков

Радоновский образ $R(\mathbf{n}, t)$ может быть получен путём интегрирования данных просвечивания (интегралов от плотности) вдоль параллельных прямых, как показано на рис. 2, *a*. Прямые расположены в плоскости, определяемой парой \mathbf{n}, t , направлены параллельно вектору \mathbf{n}_2 , а интегрирование производится по перпендикулярному направлению \mathbf{n}_1 . Если аналогичную операцию произвести для другой плоскости, параллельной предыдущей и отстоящей на малом расстоянии Δt , то получим $R(\mathbf{n}, t + \Delta t)$. Разделим разность этих образов на Δt и перейдём к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим левую часть равенства (4).

Рассмотрим теперь расходящийся пучок с центром в начале той же локальной системы координат (см. рис. 2, *b*). Проинтегрируем по азимутальному углу φ' данные просвечивания вдоль расходящихся прямых, расположенных на одной из конусных поверхностей, затем выполним такую же процедуру для другой конусной поверхности, имеющей ту же вершину и отстоящей на малом интервале $\Delta\theta'$. Разность полученных значений разделим на $\Delta\theta'$ и перейдём к пределу $\Delta\theta' \rightarrow 0$. В результате будем иметь правую часть выражения (4), которое свидетельствует о совпадении результатов вычислений в первом и втором случаях. Формальное доказательство этого факта несложно, но объёмно, поэтому здесь мы его опускаем.

Таким образом, выразим первую производную преобразования Радона для трёхмерной функции через производную от интеграла по данным расходящегося пучка. Используя равенство (4), по конусным данным найдём производную трёхмерного радоновского образа для всех плоскостей, пересекающих одновременно объект и траекторию источника. Правую часть равенства (4) можно подставить в формулу инверсии Радона (1). Вторую производную $\frac{\partial^2 R(\mathbf{n}, t)}{\partial t^2}$ вычислим через производную по траектории. Если сместиться по траектории $\phi(\lambda)$ на малую величину $\Delta\lambda$, то расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению \mathbf{n} и проходящими через точки $\phi(\lambda)$ и $\phi(\lambda + \Delta\lambda)$, составит $\Delta t = (\phi'(\lambda), \mathbf{n})\Delta\lambda$. В итоге при переходе $\Delta t \rightarrow 0$ следует

$$\frac{\partial^2 R(\mathbf{n}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{(\phi'(\lambda), \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial R(\mathbf{n}, t)}{\partial t} = \frac{1}{(\phi'(\lambda), \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \theta'} \int_0^{2\pi} g(\varphi', \theta', \lambda) d\varphi'. \quad (5)$$

Выражение (5), как и (4), справедливо для точки траектории, в которой она пересекается плоскостью \mathbf{n}, t при условии $\theta' = \pi/2$. Подставив выражение для второй производной от преобразования Радона в виде правой части (5) в формулу (1), получим

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \frac{1}{(\phi'(\lambda), \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \theta'} \int_0^{2\pi} g(\varphi', \theta', \lambda) d\varphi' d\varphi d\theta. \quad (6)$$

В формуле (6) можно поменять порядок операций, относящихся к различным переменным: интегрирования по φ' и дифференцирования по θ' . В результате будем иметь

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \frac{1}{(\phi'(\lambda), \mathbf{n})} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta'} g(\varphi', \theta', \lambda) d\varphi' d\varphi d\theta. \quad (7)$$

Теперь покажем, что выражение (7) совпадает с формулой реконструкции (2). Для этого рассмотрим внутренний интеграл в (2) в локальной системе координат $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ со своими сферическими координатами φ', θ', ρ' . Тогда справедливо равенство

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_{n_1} \mathbf{n}_1 + \beta_{n_2} \mathbf{n}_2 + \beta_n \mathbf{n},$$

$$\beta_{n_1} = \sin \theta' \cdot \cos \varphi', \quad \beta_{n_2} = \sin \theta' \cdot \sin \varphi', \quad \beta_n = \cos \theta', \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1).$$

Запишем операцию дифференцирования по направлению \mathbf{n} (3):

$$L(\mathbf{n}, D)g(\boldsymbol{\beta}, \lambda) = \frac{\partial g(\boldsymbol{\beta}, \lambda)}{\partial \beta_n} = \frac{\partial g(\boldsymbol{\beta}, \lambda)}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial \beta_n}.$$

Поскольку вектор $\boldsymbol{\beta}$ перпендикулярен направлению \mathbf{n} (угол $\theta' = \pi/2$), то $\partial \theta' / \partial \beta_n = 1$. Интегрирование по единичной окружности, перпендикулярной вектору \mathbf{n} , можно заменить интегрированием по угловой переменной φ' , так как приращение длины окружности равно приращению угла.

В итоге получим

$$\int_{S(\mathbf{n})} L(\mathbf{n}, D)g(\boldsymbol{\beta}, \lambda)\Omega(\boldsymbol{\beta}) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta'} g(\boldsymbol{\beta}(\varphi', \theta'), \lambda) d\varphi',$$

что и требовалось доказать.

Преобразование (4), устанавливающее связь между данными плоского и конусного пучков в $3D$ -пространстве, можно назвать интегрально-дифференциальным. Действительно, луч в параллельном пучке в трёхмерном пространстве (помимо направления) идентифицируется двумя параметрами, например x и y . По одному из них мы интегрируем лучевые суммы и получаем радоновский образ, по другому — дифференцируем. В конусном пучке (помимо координат источника) луч идентифицируется также двумя параметрами, например θ и φ . По азимутальному углу производится интегрирование, а по полярному — дифференцирование. Использование соотношения (4) позволяет преобразовать инверсию Радона (1) в формулу реконструкции (2), при этом сохраняется свойство локальности: для реконструкции объекта в одной точке требуются интегралы лишь вдоль тех лучей, которые принадлежат плоскостям, проходящим через реконструируемую точку. Иными словами, для реконструкции объекта в одной точке достаточно части траектории источника, удовлетворяющей условию полноты для этой точки.

Алгоритм Смита и его свойства. В трёхмерной томографии известно ещё одно преобразование, также устанавливающее связь между данными параллельного и конусного пучков [9, 10]. Придерживаясь тех же обозначений, что и в предыдущих формулах, приведём основные положения и результаты этих работ.

Пусть $f(\mathbf{x})$ означает трёхмерный объект, который должен быть реконструирован. Предполагается, что носителем $f(\mathbf{x})$ является шар радиуса 1. Введём функцию F , определяемую формулой

$$F(\boldsymbol{\beta}, s) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 H_\varepsilon(s-t)R(\boldsymbol{\beta}, t)dt, \quad (8)$$

где

$$H_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon^2 & \text{для } |t| < \varepsilon, \\ -1/t^2 & \text{для } |t| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (9)$$

а $R(\beta, t)$ является преобразованием Радона функции f . Если F известна, то f может быть реконструирована по формуле

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{S^2/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta, t) H_\varepsilon(\mathbf{x} \cdot \beta - t) dt d\beta. \quad (10)$$

Здесь $d\beta$ — элемент поверхности единичной сферы, а интегрирование проводится по половине сферы $S^2/2$.

Далее определим функцию G_S , связанную с конусными проекциями:

$$G_S(\beta, \lambda) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^2/2} H_\varepsilon(\beta \cdot \gamma) g(\gamma, \lambda) d\gamma, \quad (11)$$

где $g(\gamma, \lambda)$ — конусная проекция, измеряемая из точки траектории $\phi(\lambda)$. Определённые таким образом функции F и G_S связаны простым соотношением

$$G_S(\beta, \lambda) = 2\pi F(\beta, \phi \cdot \beta). \quad (12)$$

Доказательство равенства (12) дано в работе [11].

Установленное равенство (12) получено преобразованием, которое можно назвать интегрально-интегральным. Здесь в двухпараметрических лучевых данных производятся интегрирование по одной переменной (при преобразовании Радона) и свёртка с рамп-фильтром (9) по другой переменной (8).

Последовательность действий для реконструкции можно представить схемой

$$g \rightarrow G_S \rightarrow F \rightarrow f.$$

Существенное различие рассмотренных преобразований заключается в размерности. Интегрально-дифференциальное преобразование производится в плоскости, а интегрально-интегральное — в пространстве. В алгоритме Смита, где используются интегрально-интегральные преобразования, для реконструкции плотности в одной точке требуются данные траектории, удовлетворяющие условию полноты для всех точек объекта. Согласно (10) для реконструкции в одной точке требуется знать $F(\beta, t)$ для всех значений β, t , т. е. всех плоскостей, пересекающих объект.

Локальность алгоритма позволяет произвести точную реконструкцию части объекта, при этом траектория источника должна удовлетворять условию полноты для этой части объекта. Другое полезное свойство локальности заключается в том, что реконструкцию можно начинать до того, как получены все измеряемые данные, и продолжать её по мере их поступления.

Очевидно, что условию полноты для выделенной точки объекта удовлетворяет отрезок траектории, концы которого лежат на прямой, проходящей через данную точку. Действительно, любая плоскость, проходящая через эту точку, пересекает отрезок траектории. Можно показать, что в случае спиральной траектории для реконструкции одной плоскости объекта, перпендикулярной оси спирали, достаточно одного витка спирали, симметричного относительно плоскости [12]. Это свойство позволяет реконструировать первую плоскость объекта при наличии информации от первого витка траектории. По мере получения данных после реконструкции одной плоскости можно перейти к следующей, отстоящей на небольшом расстоянии и параллельной предыдущей. Новый виток спирали, необходимый

для реконструкции, будет частично совпадать с предыдущим. Часть данных спирали с одной стороны будет отброшена, а с другой — добавлена. Такая последовательность реконструкции напоминает работу конвейера. Объект может быть просканирован не по всей длине, и при этом будет получена точная реконструкция той части объекта, для которой проекционные данные достаточны.

Заключение. В представленной работе рассмотрено понятие локального условия полноты для конусной томографии. Показано, что часть точных алгоритмов допускает точную реконструкцию объекта в отдельной точке по данным, удовлетворяющим условию полноты для этой точки. Применение такого свойства в практике 3D-томографии позволяет реконструировать объект по частям, минимизируя при этом объём исходных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Radon J.** Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. 1917. Kl. 69. S. 262–277.
2. **Гельфанд И. М.** Интегральная геометрия и ее связь с теорией представлений // УМН. 1960. XV, № 2. С. 155–164.
3. **Кириллов А. А.** Об одной задаче И. М. Гельфанда // ДАН СССР. 1961. 137, № 2. С. 276–277.
4. **Tuy H. K.** An inversion formula for cone-beam reconstruction // Siam Journ. Appl. Math. 1983. 43, N 3. P. 546–552.
5. **Трофимов О. Е.** К задаче восстановления функции трех переменных по ее интегралам вдоль прямых, пересекающих заданную кривую // Автометрия. 1991. № 5. С. 57–64.
6. **Денисюк А. С.** Исследование по интегральной геометрии в вещественном пространстве: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук / МГУ. М., 1991. 16 с.
7. **Шапошникова Е. В.** О точности определения границ объекта при томографической реконструкции в конусах лучей // Автометрия. 2004. 40, № 1. С. 36–40.
8. **Grangeat P.** Mathematical framework of cone-beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform // Proc. of the Conf. "Mathematical Methods in Tomography". Oberwolfach, Germany, 1990. P. 66–97.
9. **Smith B. D.** Image reconstruction from cone-beam projections: necessary and sufficient conditions and reconstruction methods // IEEE Trans. Med. Image. 1985. MI-4, N 1. P. 14–25.
10. **Smith B. D.** Cone-beam tomography: recent advances and tutorial review // Opt. Eng. 1990. 29, N 5. P. 524–534.
11. **Smith B. D.** Computer-aided tomographic imaging from cone-beam data: Ph. D. Dissertation. Univ. of Rhode Island, 1978.
12. **Карих В. П.** Способ рентгеновской компьютерной томографии с конусным пучком для неразрушающего контроля // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. 2001. № 5. С. 67–70.

Поступила в редакцию 23 декабря 2011 г.