

УДК 519.2

## ОЦЕНИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ИТЕРАЦИОННОГО ВЕЙВЛЕТ-АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Ю. Е. Воскобойников

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113  
E-mail: voscob@mail.ru*

Предлагаются два статистических метода оценивания оптимального параметра регуляризации нелинейного алгоритма восстановления сигналов: на основе критерия оптимальности и принципа невязки. Методы имеют простую алгоритмическую реализацию и не требуют задания априорной информации о количественных характеристиках искомого решения. Результаты вычислительного эксперимента показали эффективность метода на основе критерия оптимальности.

*Ключевые слова:* восстановление сигналов и изображений, нелинейные регуляризирующие алгоритмы, пороговая вейвлет-фильтрация, оценивание оптимального параметра регуляризации.

**Введение.** Математической моделью стационарных измерительных систем является интегральное уравнение первого рода с разностным ядром. Задача восстановления заключается в нахождении одномерного или двумерного сигнала на входе измерительной системы по зарегистрированному выходному сигналу. Математически это решение интегрального уравнения, что является некорректно поставленной задачей [1, 2] с известными принципиальными и практическими трудностями её решения.

Дискретный характер измерений выходного сигнала обуславливает дискретизацию исходной математической модели, и задача восстановления сигнала сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$K\varphi = f. \quad (1)$$

Особенности матрицы  $K$  размера  $N \times M$ :

— плохая обусловленность (а возможно, и вырожденность) как следствие некорректности исходной задачи, что приводит к неприемлемо высоким ошибкам восстановления при использовании метода наименьших квадратов, а также других традиционных методов линейной алгебры;

— циркулянтная (или блочно-циркулянтная) структура матрицы  $K$  [3, с. 121];

— большие (особенно при восстановлении изображений) размеры  $N$ ,  $M$  матрицы  $K$  (порядка нескольких тысяч, а иногда и сотен тысяч).

На практике вместо точной правой части  $f$  системы (1) регистрируются «зашумлённые» значения  $\tilde{f}_i = f_i + \eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , где  $\eta_i$  — случайные величины, называемые в дальнейшем шумом измерения. Зарегистрированные значения можно представить в векторной форме:

$$\tilde{f} = f + \eta. \quad (2)$$

Для построения устойчивого решения системы (1) используют метод регуляризации Тихонова [2, 4] или его статистические варианты [5, 6]. Вычислительной основой являются дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и алгоритм быстрого преобразования Фурье

(следствие разностного характера ядра исходного интегрального уравнения), что даёт возможность строить эффективные вычислительные алгоритмы восстановления. Такие алгоритмы строятся только в случаях, когда регуляризованное решение находится из условия минимума некоторого квадратичного функционала. Наиболее часто используется функционал вида

$$F(\varphi) = \|\tilde{f} - K\varphi\|_2^2 + \alpha\|\varphi\|_2^2, \quad (3)$$

где  $\|\cdot\|_2$  означает евклидову норму вектора,  $\alpha$  — параметр регуляризации. Нетрудно показать, что вектор  $\varphi_\alpha$ , доставляющий минимум функционалу (3), есть решение системы

$$(K^T K + \alpha I)\varphi_\alpha = K^T \tilde{f}, \quad (4)$$

где  $I$  — единичная матрица соответствующего размера. Поэтому алгоритм вычисления  $\varphi_\alpha$  линейный (при заданном параметре  $\alpha$ ). К сожалению, свойство линейности не позволяет хорошо восстанавливать контрастные сигналы, имеющие интервалы с небольшими значениями производной (сигнал почти постоянен) и большими значениями (скачкообразное изменение амплитуды).

Для преодоления этой трудности в последние годы предложены методы, в которых квадратичный функционал  $\|\varphi\|_2$  заменён другими типами функционалов. В данной работе регуляризованное решение  $\varphi_\alpha$  системы (1) находится из условия минимума функционала [7, 8]

$$F(\varphi) = \|\tilde{f} - K\varphi\|_2^2 + \alpha\|\varphi\|_1, \quad (5)$$

где норма  $\|\varphi\|_1 = \sum_{i=1}^M |\varphi_i|$ . Как будет показано далее, введение нормы  $\|\varphi\|_1$  позволит с меньшей ошибкой восстанавливать контрастные сигналы. Пока не удаётся получить явные уравнения (типа (4)), определяющие вектор  $\varphi_\alpha$ , поэтому необходимо использовать итерационные алгоритмы минимизации. Наличие слагаемого  $\|\varphi\|_1$  обуславливает разрывный характер градиента, что порождает известные трудности, связанные со сходимостью итерационных процедур.

В ряде публикаций (например, [9]) предложен метод, позволяющий построить эффективный вычислительный алгоритм нахождения вектора  $\varphi_\alpha$  (при заданном параметре регуляризации) из условия минимума функционала (5). Однако сам выбор параметра регуляризации, который оказывает существенное влияние на точность получаемых регуляризованных решений, не рассматривался ни в одной из публикаций.

Поэтому целью данной работы явилось построение статистических алгоритмов оценивания оптимального параметра регуляризации, минимизирующего среднеквадратическую ошибку (СКО) регуляризованных решений системы уравнений (1), найденных из условия минимума функционала (5).

**Алгоритм вычисления регуляризованного решения.** Первоначально рассмотрим задачу минимизации функционала (5) при  $K = I$  — единичной матрице, т. е. найдём вектор  $z^*$ , доставляющий минимум функционалу

$$J(z) = \|\tilde{f} - z\|_2^2 + \alpha\|z\|_1. \quad (6)$$

Заметим, что вектор  $z^*$  можно рассматривать как результат фильтрации вектора  $\tilde{f}$ . Эффективный (не итерационный) алгоритм минимизации удаётся построить с использованием алгоритма вейвлет-фильтрации с «мягкой» пороговой функцией.

Напомним, что многомасштабное вейвлет-представление функции  $f(t)$  имеет вид [10, 11]

$$\widehat{f}(t) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(t) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

где индекс  $j$  характеризует уровень разложения и его часто называют коэффициентом масштаба, а индекс  $k$  — коэффициент сдвига базисных функций  $\varphi_{j,k}(t)$ ,  $\psi_{j,k}(t)$ . Чем меньше номер  $j$ , тем более «мелкие» структуры исходной функции  $f(t)$  могут быть представлены в базисах  $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ ,  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  и тем ближе реконструированный сигнал  $\widehat{f}(t)$  к исходному. Формально аппроксимирующие  $(a_{j,k})$  и детализирующие  $(d_{j,k})$  коэффициенты определяются интегралами

$$a_{j,k} = \int_R f(t) \varphi_{j,k}(t) dt, \quad d_{j,k} = \int_R f(t) \psi_{j,k}(t) dt,$$

где  $R$  — интервал определения функции  $f(t)$ . Однако на практике применяется «быстрый» алгоритм Малла [12], имеющий рекуррентный характер. В этом алгоритме для вычисления коэффициентов используются суммы небольшого числа слагаемых (число зависит от вида вейвлетов), что позволяет эффективно вычислять интегралы без методических ошибок, присущих квадратурным формулам. Входными данными для этого алгоритма будет вектор  $f$ , содержащий  $N$  отсчётов  $f(t_i)$ , а результатом работы — вектор  $\theta$ , содержащий  $N$  коэффициентов разложения и имеющий следующую блочную структуру:

$$\theta^T = |d_{j_0+1,k} : d_{j_0+2,k} : \dots : d_{j_0+J,k} : a_{j_0+J,k}|,$$

при этом на каждом уровне разложения количество коэффициентов уменьшается в 2 раза (подробнее см. [13]).

Матричная запись такого дискретного вейвлет-преобразования имеет вид

$$\theta = Wf. \quad (7)$$

Обратное дискретное преобразование, вычисляющее вектор  $f$  по вектору коэффициентов  $\theta$ , можно записать в виде

$$f = W^T \theta. \quad (8)$$

Очевидно, что  $W^T W = I$  — единичная матрица.

Далее будет использоваться ортогональное вейвлет-преобразование, в котором базисные функции ортонормальны на интервале  $R$ . Для такого преобразования имеет место равенство (аналог равенству Парсерваля)

$$\|f\|_2^2 = \|Wf\|_2^2 = \|\theta\|_2^2. \quad (9)$$

Если значения функции  $f(t)$  известны со случайной погрешностью, то уровень этой погрешности уменьшают с помощью алгоритма вейвлет-фильтрации, который включает три этапа:

- вычисление коэффициентов вейвлет-разложения (прямое вейвлет-преобразование);
- обработка коэффициентов вейвлет-разложения;
- вычисление «сглаженных» значений функции (обратное вейвлет-преобразование обработанных коэффициентов разложения).

Эффективность такого алгоритма фильтрации задаётся алгоритмами обработки коэффициентов на втором этапе. Очень часто для этого используются пороговые алгоритмы, в которых значения коэффициентов преобразуются в соответствии с принятой пороговой функцией [13]. Широкое распространение получила мягкая пороговая функция

$$S_\lambda(\theta_i) = \begin{cases} \text{sign}(\theta_i)(|\theta_i| - \lambda), & \text{если } |\theta_i| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\theta_i| < \lambda. \end{cases} \quad (10)$$

Видно, что если коэффициент разложения  $\theta_i$  меньше пороговой величины  $\lambda$ , то он зануляется, если больше или равен, то происходит его уменьшение на величину  $\lambda$ .

Величина порога  $\lambda$  определяет ошибку фильтрации: при заниженных (по сравнению с некоторым оптимальным значением  $\lambda_{\text{opt}}$ ) значениях происходит недостаточное сглаживание погрешностей, при завышенных в отфильтрованном сигнале могут исчезнуть информативные (полезные) составляющие функции  $f(t)$ . Предложено несколько алгоритмов выбора  $\lambda$ , в том числе алгоритмы, позволяющие с приемлемой точностью оценить оптимальное значение  $\lambda_{\text{opt}}$ , минимизирующее СКО фильтрации (подробнее см. [13, 14]).

Вернёмся к задаче минимизации функционала (6). С учётом (7)–(9) этот функционал можно переписать в виде

$$J(z) = \|W\tilde{f} - Wz\|_2^2 + \alpha\|Wz\|_1 = \sum_{i=1}^N [|\theta_{\tilde{f}_i} - \theta_{z_i}|^2 + \alpha|\theta_{z_i}|], \quad (11)$$

где  $\theta_{\tilde{f}_i}$ ,  $\theta_{z_i}$  — коэффициенты вейвлет-разложения векторов  $\tilde{f}$ ,  $z$  соответственно. Можно показать, что минимума  $J(z)$  достигает при значениях коэффициентов

$$\theta_{z_i}^* = S_{\alpha/2}(\theta_{\tilde{f}_i}). \quad (12)$$

Вычисление вектора  $z^*$ , минимизирующего функционал (11), можно представить в матричном виде:

$$z^* = W^T S_{\alpha/2}\{W\tilde{f}\}, \quad (13)$$

где  $S_{\alpha/2}\{\cdot\}$  означает пороговую фильтрацию (10) с величиной порога  $\lambda = \alpha/2$ . Как видно, алгоритм (13) позволяет найти вектор  $z^*$  без привлечения итерационных или рекуррентных процедур, что является очень важным его достоинством.

В [9] сделано обобщение алгоритма минимизации (13) на случай, если  $K \neq I$ , т. е. построен алгоритм минимизации функционала (5). Не приводя промежуточных построений, определим этот алгоритм следующими двумя составляющими:

1) вычисление вектора:

$$z^{(n)} = \varphi^{(n)} + \tau K^T (\tilde{f} - K\varphi^{(n)}), \quad (14)$$

2) вычисление очередного элемента минимизирующей последовательности:

$$\varphi^{(n+1)} = W^T S_{\tau\alpha/2}\{Wz^{(n)}\}. \quad (15)$$

В качестве точки старта  $\varphi^{(0)}$  можно принять нулевой вектор или вектор  $K^T \tilde{f}$ .

Величина шага  $\tau$  выбирается из условия

$$\tau < 1/\lambda_{\max}, \quad (16)$$

где  $\lambda_{\max}$  — максимальное собственное число матрицы  $K^T K$ . Как правило, пороговой обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты, аппроксимирующие коэффициенты остаются без изменения из-за малой относительной ошибки их вычисления.

Процедура (14), (15) завершается на  $n$ -й итерации по условию

$$\|\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)}\| / \|\varphi^{(n)}\| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — достаточно малая величина (в вычислительных экспериментах принималась равной 0,001).

Отметим, что (14) — это вариант итерационной процедуры

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} + \tau K^T (\tilde{f} - K \varphi^{(n)}) \quad (17)$$

градиентного типа минимизации функционала

$$F(\varphi) = \|\tilde{f} - K \varphi\|_2^2, \quad (18)$$

в зарубежной литературе получившей название алгоритма Лендвебера. Функционал (18) есть частный случай функционала (5) при  $\alpha = 0$ . Если матрица  $K$  плохо обусловлена, то в качестве параметра регуляризации выступает номер итерации, на которой заканчивается работа алгоритма (16).

Каковы вычислительные затраты на реализацию алгоритма (14), (15)? Так как матрица  $K$  является матрицей-циркулянт, то произведения  $K \varphi^{(n)}$ ,  $K^T (\tilde{f} - K \varphi^{(n)})$  можно представить периодическими дискретными свёртками [6], вычисление которых осуществляется перемножением соответствующих коэффициентов ДПФ и взятием обратного ДПФ от результата перемножения. Даже при небольших размерах матрицы  $K$  (несколько сотен строк или столбцов) такой приём уменьшает на несколько порядков количество требуемых вычислительных операций. Вейвлет-преобразование (15) имеет также высокую вычислительную эффективность (требует порядка  $N$  операций). Для ускорения сходимости итерационной процедуры (14) рекомендуется в качестве  $\tau$  брать максимальное значение, удовлетворяющее (15). В работе [9] предлагается итерационную процедуру (14) проводить отдельно для коэффициентов каждого  $j$ -го уровня разложения с соответствующим выбором  $\tau_j$ , что также существенно увеличивает скорость сходимости процедуры (14) в целом.

Обобщая вышеизложенное, можно сделать вывод: в ряде публикаций предложена эффективная вычислительная процедура минимизации функционала (5) при заданном параметре регуляризации  $\alpha$ , которая является нелинейной из-за преобразования (15). Точность вычисляемого решения  $\varphi_\alpha$  существенно зависит от параметра  $\alpha$ , выбор которого остаётся открытым. В лучшем случае в некоторых публикациях рекомендуют выбирать  $\alpha$  на основе экспертной оценки решения  $\varphi_\alpha$ , что неприемлемо при автоматизированной обработке экспериментальных данных.

Поэтому главным вопросом при практическом использовании алгоритма (14), (15) является выбор подходящего (с точки зрения минимума нормы ошибки решения) значения параметра регуляризации. Попытаемся ответить на этот вопрос.

**Алгоритмы оценивания оптимального параметра регуляризации.** Рассмотрим оценивание на основе критерия оптимальности, который предложен в работах [5, 15] и широко применяется при выборе параметра регуляризации линейных регуляризирующих алгоритмов решения некорректных задач [6, 16]. Алгоритмы, построенные на основе этого критерия дают возможность оценить (с хорошей точностью) оптимальный параметр

регуляризации, не используя при этом количественную информацию об искомом решении задачи.

Суть критерия оптимальности заключается в следующем (подробнее см. [15, 16]). Пусть  $R(\alpha)$  — линейный регуляризирующий алгоритм, вычисляющий регуляризованное решение системы (1) в виде  $\varphi_\alpha = R(\alpha)\tilde{f}$ , где  $\alpha$  — параметр или набор параметров, влияющих на точность решения  $\varphi_\alpha$ . Введём вектор невязки  $e_\alpha = \tilde{f} - K\varphi_\alpha$  и оператор невязки  $E(\alpha) = I - KR(\alpha)$ , позволяющий представить вектор невязки в виде  $e_\alpha = E(\alpha)\tilde{f}$ . В качестве критерия точности оператора  $R(\alpha)$  примем СКО, определяемую функционалом  $\Delta(\alpha) = M[\|R(\alpha)\tilde{f} - \varphi\|_2^2]$ , где математическое ожидание  $M[\cdot]$  берётся по ансамблю векторов шума измерения  $\eta$ . Вследствие того что значение функционала зависит от искомого решения  $\varphi$ , вычисление точки минимума  $\alpha_{\text{opt}}$  невозможно. Ограничимся построением только оценок для  $\alpha_{\text{opt}}$ . Доказано [15, 16], что достаточным условием минимума СКО является матричное тождество

$$V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha), \quad (19)$$

где  $V_\eta = M[\eta\eta^T]$ ,  $V_e(\alpha) = M[e_\alpha e_\alpha^T]$  — матрицы вторых моментов векторов  $\eta$ ,  $e_\alpha$  соответственно. По одной случайной реализации вектора  $e_\alpha$  невозможно с требуемой (для проверки (18)) точностью вычислить  $V_e(\alpha)$ , поэтому будем проверять следующие статистические гипотезы:

- основная (нулевая) гипотеза  $H_0$ :  $V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha)$ ;
- альтернативная гипотеза  $H_1$ :  $V_e(\alpha) \neq V_\eta E^T(\alpha)$ .

Для проверки этих гипотез введём критерий

$$\rho_W(\alpha) = e_\alpha^T (V_\eta E^T(\alpha))^{-1} e_\alpha = \tilde{f}^T V_\eta^{-1} e_\alpha. \quad (20)$$

Если вектор  $\eta$  подчиняется нормальному распределению и справедлива гипотеза  $H_0$ , то критерий  $\rho_W(\alpha)$  подчиняется распределению  $\chi_N^2$  с  $N$  степенями свободы. Тогда в качестве оценки оптимального параметра регуляризации принимается значение  $\alpha_W$ , для которого выполняется неравенство

$$\vartheta_{N, \gamma/2} \leq \rho_W(\alpha_W) \leq \vartheta_{N, 1-\gamma/2}, \quad (21)$$

где  $\vartheta_{N, \gamma/2}$ ,  $\vartheta_{N, 1-\gamma/2}$  — квантили  $\chi_N^2$ -распределения с  $N$  степенями свободы уровней  $\gamma/2$ ,  $1 - \gamma/2$  соответственно;  $\gamma$  — вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности параметра сглаживания (обычно  $\gamma = 0,05$ ). Если неравенство (20) не выполняется, то основная гипотеза  $H_0$  отвергается в пользу альтернативной  $H_1$  с вероятностью ошибки первого рода равной  $\gamma$ .

Если проекции шума измерения не коррелированы между собой и проекция  $\eta_i$  имеет нулевое среднее и дисперсию  $\sigma_i^2$ , то  $\rho_W(\alpha)$  вычисляется по формуле, не требующей определения обратной матрицы  $V_\eta^{-1}$  (ср. с (19)):

$$\rho_W(\alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{f}_i e_{\alpha_i}}{\sigma_i^2}, \quad (22)$$

где  $e_{\alpha_i}$  —  $i$ -я проекция вектора невязки.

Если число степеней свободы  $N > 30$ , то  $\chi_N^2$ -распределение хорошо аппроксимируется нормальным распределением с математическим ожиданием  $N$  и дисперсией  $2N$ . Тогда,

приняв вероятность ошибки первого рода  $\gamma = 0,05$ , получаем формулы для вычисления квантилей, входящих в неравенство (21):

$$\vartheta_{N, 0,025} = N - 1,96\sqrt{2N}, \quad \vartheta_{N, 0,975} = N + 1,96\sqrt{2N}.$$

Для вычисления  $\alpha_W$  используется любая итерационная процедура решения уравнения

$$\rho_W(\alpha) = N,$$

которая завершается, как только очередное приближение  $\alpha^{(m)}$  удовлетворяет условию (21).

Возвращаясь к задаче выбора параметра регуляризации нелинейного алгоритма (14), (15), примем в качестве параметра регуляризации величину  $\alpha_W$ , удовлетворяющую неравенству (21). Отметим, что этот параметр при малых значениях дисперсий  $\sigma_i^2$  обеспечивает порядок изменения  $e_{\alpha_i} \sim \sigma_i^2$ , т. е. сходимость правых частей системы (1) при стремлении уровня шума измерения к нулю.

В линейной теории некорректных задач для выбора параметра регуляризации используется принцип невязки [1, 2], в котором предполагается, что вектор  $\eta$  является неслучайным и задаётся норма этого вектора. Приведём его статистический вариант [16], учитывающий статистическую природу вектора  $\eta$  и основанный на следующем рассуждении: если регуляризованное решение  $\varphi_\alpha = \varphi$ , то  $e_\alpha = \eta$ , и, следовательно, статистические свойства вектора невязки должны совпадать со свойствами шума измерения.

Статистические свойства будем характеризовать матрицами вторых моментов соответствующих векторов, поэтому введём в рассмотрение статистические гипотезы:

- основная (нулевая) гипотеза  $H_0: V_e(\alpha) = V_\eta$ ;
- альтернативная гипотеза  $H_1: V_e(\alpha) \neq V_\eta$ .

Для проверки этих гипотез введём критерий

$$\rho_V(\alpha) = e_\alpha^T V_\eta^{-1} e_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{e_{\alpha_i}^2}{\sigma_i^2}. \quad (23)$$

Если справедлива гипотеза  $H_0$ , то случайная величина  $\rho_V(\alpha)$  подчиняется  $\chi_N^2$ -распределению с  $N$  степенями свободы, поэтому в качестве оценки для оптимального параметра регуляризации принимается значение  $\alpha_V$ , для которого выполняется неравенство

$$\vartheta_{N, \gamma/2} \leq \rho_V(\alpha_V) \leq \vartheta_{N, 1-\gamma/2}. \quad (24)$$

Если это неравенство не выполняется, то основная гипотеза  $H_0$  отвергается в пользу альтернативной  $H_1$  с вероятностью ошибки первого рода равной  $\gamma$ .

Отметим, что параметр  $\alpha_V$  при малых значениях дисперсий  $\sigma_i^2$  обеспечивает порядок изменения  $e_{\alpha_i}^2 \sim \sigma_i^2$ , т. е. сходимость правых частей системы (1) при стремлении уровня шума измерения к нулю.

Для вычисления  $\alpha_V$  используется любая итерационная процедура решения уравнения

$$\rho_V(\alpha) = N, \quad (25)$$

которая завершается, как только очередное вычисленное приближение  $\alpha^{(m)}$  удовлетворяет условию (24).

Оба критерия  $\rho_W(\alpha)$ ,  $\rho_V(\alpha)$  требуют задания дисперсий  $\sigma_i^2$ . Если такая априорная информация отсутствует, то для случая равноточных измерений, т. е.  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ , в работе [6, с. 140] предложен алгоритм оценивания  $\sigma^2$  через коэффициенты ДПФ вектора  $\tilde{f}$ .

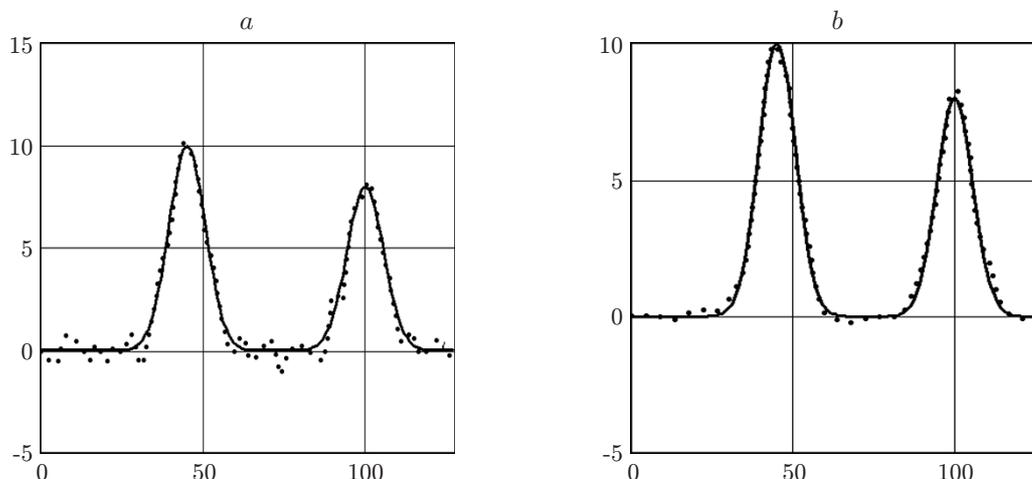


Рис. 1

Таким образом, для функционала (5) предложены два алгоритма выбора параметра регуляризации  $\alpha$ , основанные на проверке статистических гипотез о свойствах вектора невязки и не требующие задания количественных характеристик искомого решения системы (1). Перейдём к исследованию точности решений, построенных при параметрах регуляризации  $\alpha_W, \alpha_V$ .

**Результаты вычислительных экспериментов.** Эксперимент проводился с одномерными контрастными сигналами, графики которых показаны на рис. 1, 2 сплошными кривыми. Восстановление таких сигналов представляет собой большую трудность из-за их широкого спектра. Матрица  $K$  системы (1) имела размеры  $128 \times 128$  и число обусловленности  $\sim 10^9$ . Правая часть системы  $f$  искажалась нормально распределённым шумом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Дисперсия вычислялась по заданному относительному уровню шума по формуле  $\delta_f = \|\tilde{f} - f\|_2 / \|f\|_2$ . Точность получаемых решений определялась относительной ошибкой  $\delta_\varphi(\alpha) = \|\varphi_\alpha - \varphi\|_2 / \|\varphi\|_2$ , которая зависела от параметра регуляризации.

Первоначально рассмотрим, какие преимущества (по точности регуляризованных решений) даёт замена квадратичного регуляризирующего функционала  $\|\varphi\|_2^2$  (3) функци-

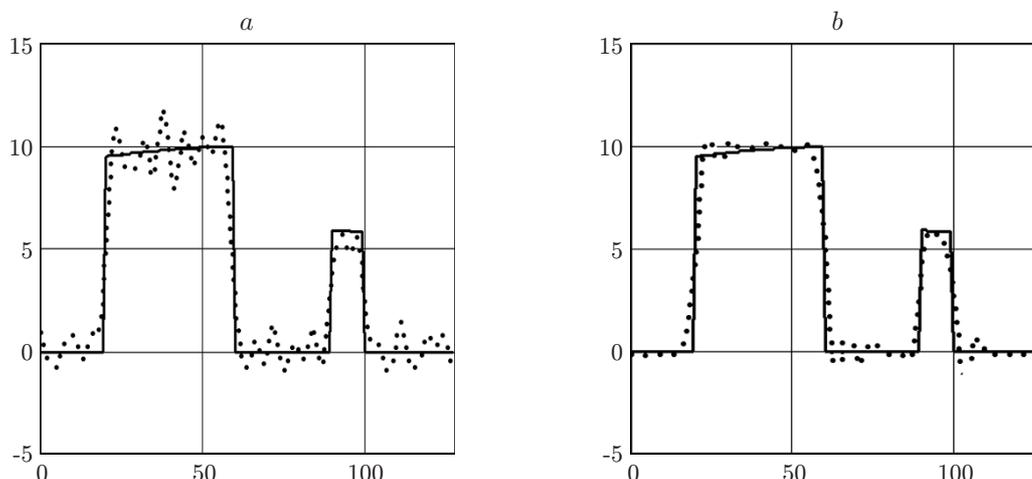


Рис. 2

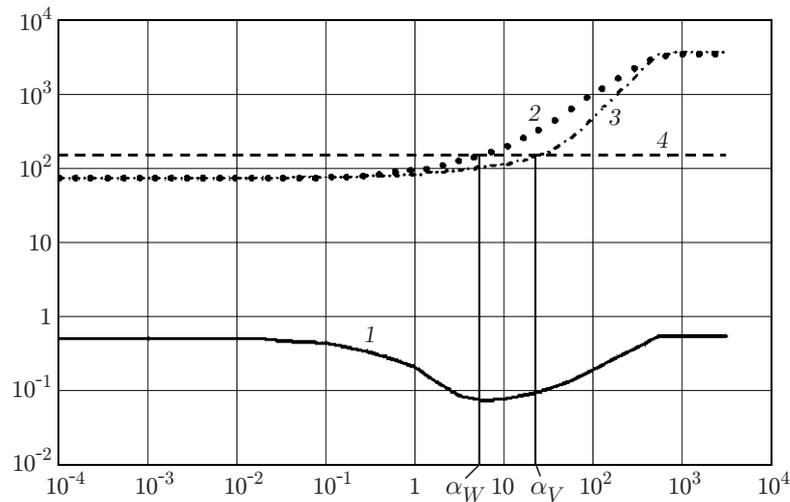


Рис. 3

оналом  $\|\varphi\|_1$  (5). Для ответа на этот вопрос были построены два регуляризованных решения:  $\varphi'_{\alpha_{\text{opt}}}$  (из условия минимума функционала (5)) и  $\varphi''_{\alpha_{\text{opt}}}$  (из условия минимума функционала (3)) при различных уровнях  $\delta_f = 0,01; 0,05; 0,10; 0,15$ . Так как искомое решение  $\varphi$  в вычислительном эксперименте задаётся, то оптимальные значения  $\alpha_{\text{opt}}$  параметров регуляризации этих функционалов находились из условия минимума нормы ошибки решения. На рис. 1, 2 точечными кривыми показаны значения данных регуляризованных решений при  $\delta_f = 0,10$ . Видно, что для обоих сигналов регуляризованные решения  $\varphi'_{\alpha_{\text{opt}}}$  имеют меньшую ошибку (примерно на 20–30 %) и не содержат тех пульсаций, которые присутствуют в решениях  $\varphi''_{\alpha_{\text{opt}}}$  и обусловлены линейностью регуляризирующего алгоритма. Аналогичная картина наблюдалась и при других уровнях шума измерения. Таким образом, можно сделать вывод о предпочтительности построения регуляризованных решений для контрастных сигналов на основе минимизации функционала (5).

Чтобы ответить на вопрос о точности оценок  $\alpha_W$ ,  $\alpha_V$ , был выполнен следующий эксперимент. Для разных уровней шума и разных форм восстанавливаемого сигнала строились зависимости  $\delta_\varphi(\alpha)$ ,  $\rho_W(\alpha)$ ,  $\rho_V(\alpha)$ . На рис. 3 приведены графики этих функций для ступенчатого сигнала (сплошная кривая на рис. 2) и  $\delta_f = 0,10$ . Принятые обозначения: кривая 1 — зависимость  $\delta_\varphi(\alpha)$ ; 2 —  $\rho_W(\alpha)$ ; 3 —  $\rho_V(\alpha)$ ; 4 — границы интервала  $[\vartheta_{N, \gamma/2}, \vartheta_{N, 1-\gamma/2}]$  для  $\gamma = 0,95$  (из-за общего масштаба рисунка границы интервала слились в одну прямую 4). Точка пересечения кривой 2 и прямой 4 определяет значение параметра  $\alpha_W$ , точка пересечения кривой 3 и прямой 4 — значение  $\alpha_V$ . Видно, что значение  $\alpha_W$  находится в области минимума ошибки решения, а значение  $\alpha_V$  завышено по сравнению с оптимальным значением  $\alpha_{\text{opt}} \approx 6$  — точкой минимума относительной ошибки  $\delta_\varphi(\alpha)$ . Таким образом, регуляризованное решение, построенное при  $\alpha = \alpha_V$ , имеет ошибку выше по сравнению с параметром  $\alpha = \alpha_W$ . Заметим, что такое увеличение ошибки при  $\alpha = \alpha_V$  имело место и в случае линейного регуляризирующего алгоритма [16, с. 84].

Эксперименты с другими формами сигналов и различными уровнями шума измерения также дали аналогичные результаты.

**Заключение.** Предложенный в данной работе метод позволяет с приемлемой точностью оценить оптимальное значение параметра регуляризации в алгоритме восстановления контрастных сигналов без привлечения априорной количественной информации об искомом решении. Этот метод прост в алгоритмизации и может также использоваться в алгоритмах восстановления изображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 285 с.
2. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В. и др.** Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1988. 198 с.
3. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. М.: Изд-во МГУ, 1992. 319 с.
5. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238 с.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2007. 184 с.
7. **Daubechies I., Defrise M., De Mol C.** An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint // Commun. Pure and Appl. Math. 2004. **57**, N 11. P. 1413–1457.
8. **Figueiredo M. A., Nowak R. D.** An EM algorithm for wavelet-based image restoration // IEEE Trans. Image Process. 2003. **12**, N 8. P. 906–916.
9. **Vonesch C., Unser M.** A fast thresholded Landweber algorithm for wavelet-regularized multidimensional deconvolution // IEEE Trans. Image Process. 2008. **17**, N 4. P. 539–549.
10. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2002. 412 с.
11. **Mallat S.** A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 1989. **11**, N 9. P. 674–693.
12. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$  // Trans. AMS. 1989. **315**, N 1. P. 69–87.
13. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В., Колкер А. Б.** Фильтрация сигналов и изображений: фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad). Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 182 с. URL: <http://www.sibstrin.ru/struct/chair/prikl/pmnews/1188> (дата обращения: 30.10.2012).
14. **Воскобойников Ю. Е., Гочаков А. В.** Оценивание оптимальных пороговых величин в алгоритмах вейвлет-фильтрации изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 2. С. 3–14.
15. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображений // Автометрия. 1995. № 3. С. 68–77.
16. **Воскобойников Ю. Е.** Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 186 с.

*Поступила в редакцию 30 октября 2012 г.*

---