

УДК 681.5.01(075.8)

**УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ  
«КАРЕТКА — ИНВЕРТИРОВАННЫЙ МАЯТНИК»  
НА ОСНОВЕ СИГНАЛЬНО-АДАПТИВНОЙ ОБРАТНОЙ МОДЕЛИ\***

**В. В. Панкратов, А. А. Татарникова, А. Б. Татарников**

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: pankratov\_v\_v@ngs.ru*

Рассматриваются типовые задачи автоматического управления объектом «каретка — однозвенный инвертированный маятник»: стабилизация маятника в отсутствие ограничений на координаты каретки, управление скоростью и положением каретки со стабилизацией маятника, а также управление положением с подчинённой системой регулирования скорости. Алгоритмы управления синтезированы методом сигнально-адаптивной обратной модели исходя из требования желаемого распределения полюсов линеаризованной «нуль-системы» с преднамеренной организацией трёхтемповых процессов. Приведены результаты цифрового моделирования синтезированных систем управления.

*Ключевые слова:* автоматическое управление, инвертированный маятник, сигнально-адаптивная обратная модель.

**Введение.** С шестидесятых годов прошлого века в литературе по проблеме синтеза алгоритмов автоматического управления в качестве модельного объекта для апробации вновь разрабатываемых методов активно используется система «каретка — инвертированный маятник» [1]. Этот объект является весьма наглядным примером неустойчивой механической системы, а также простейшей моделью большого числа реальных управляемых процессов.

Цель данной работы заключается в апробации на нескольких задачах управления системой «каретка — инвертированный маятник» метода сигнально-адаптивной обратной модели (САОМ), развиваемого на кафедре электропривода и автоматизации промышленных установок Новосибирского государственного технического университета. Метод ориентирован на синтез систем автоматического управления (САУ) нелинейными и нестационарными обратимыми динамическими объектами, не имеющими форсирующих свойств, и уже достаточно проработан для практического использования. В работах [2–4] описаны предпосылки и основная идея метода, приведён пример его применения для синтеза САУ квазистационарным линейным объектом второго порядка. В [5, 6] сделаны попытки обобщения метода на многоканальные САУ. Преимущества метода проиллюстрированы в работе [7] примером построения двухканальной системы управления моментом и магнитным состоянием магнитоэлектрического синхронного двигателя.

**1. Математическая модель системы «каретка — инвертированный маятник».** При общепринятых допущениях движения расположенной на горизонтальной поверхности каретки с однозвенным инвертированным маятником (рис. 1) описываются известными дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} - mL \cos(\varphi)\ddot{\varphi} + k_1\dot{x} + mL \sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 = u, \\ -mL \cos(\varphi)\ddot{x} + (J + mL^2)\ddot{\varphi} + k_2\dot{\varphi} - mgL \sin(\varphi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 7.559.2011, НИР № 01201255056).

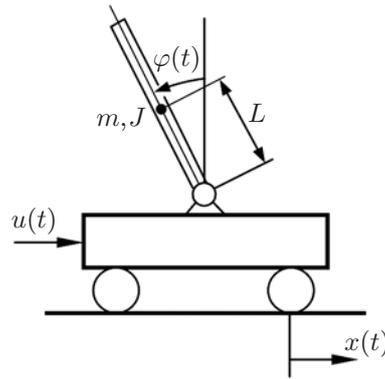


Рис. 1. Схема системы «каретка — инвертированный маятник»

где  $u$  — управляющее воздействие (сила, действующая на каретку);  $x$  — координата линейного перемещения каретки;  $\varphi$  — угол отклонения маятника от вертикали;  $m, M$  — массы маятника и каретки соответственно;  $L$  — расстояние от оси вращения маятника до его центра масс;  $J$  — момент инерции маятника относительно центра масс;  $g$  — ускорение свободного падения;  $k_1, k_2$  — коэффициенты вязкого трения.

Для решения задач синтеза система (1) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{(M+m)(J+mL^2) - (mL \cos(\varphi))^2} \begin{bmatrix} J+mL^2 & mL \cos(\varphi) \\ mL \cos(\varphi) & M+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u+f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $f_1 = -k_1 \dot{x} - mL \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2$ ;  $f_2 = -k_2 \dot{\varphi} + mgL \sin(\varphi)$ .

**2. Синтез алгоритма стабилизации инвертированного маятника.** Простейшая задача управления рассматриваемой системой заключается в стабилизации маятника в «верхнем» равновесном состоянии при начальном возмущении по отклонению  $\varphi$  и отсутствии ограничений по положению и скорости перемещения каретки. В данной задаче согласно (2) модель объекта управления в переменных «вход—выход» имеет вид

$$\ddot{\varphi} = b_1 u + \xi_1(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}),$$

где  $b_1 = \frac{mL \cos(\varphi)}{(M+m)(J+mL^2) - (mL \cos(\varphi))^2}$ , а функция

$$\xi_1 = \frac{1}{(M+m)(J+mL^2) - (mL \cos(\varphi))^2} (mL \cos(\varphi) f_1 + (M+m) f_2)$$

может быть интерпретирована в терминах метода САОМ как «приведённое возмущение».

Задаваясь линейным уравнением желаемых движений (УЖД)

$$\ddot{\varphi} = -T_1^{-2}(\varphi + A_1 T_1 \dot{\varphi}),$$

где  $T_1, A_1$  — постоянная времени и коэффициент демпфирования (формы) желаемых процессов, при допущении о непосредственных измерениях координат состояния  $\varphi, \dot{\varphi}, \dot{x}$  согласно методу САОМ получаем закон управления

$$u = -\frac{1}{T_1^2 b_1} (\varphi + A_1 T_1 \dot{\varphi}) - \frac{1}{b_1} \hat{\xi}_1$$

и асимптотический наблюдатель «приведённого возмущения»

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -\mu_1^{-1}(b_1 u + \hat{\xi}_1), \\ \dot{\hat{\xi}}_1 = \eta_1 + \mu_1^{-1} \dot{\varphi}, \end{cases}$$

где  $\mu_1$  — малый положительный параметр (постоянная времени наблюдателя);  $\hat{\xi}_1$  — оценка переменной  $\xi_1$ ; причём в качестве параметра  $b_1$  здесь целесообразно использовать приближённое значение  $b_1 \approx \frac{mL}{(M+m)(J+mL^2) - (mL)^2}$ .

На рис. 2 приведены результаты моделирования синтезированной САУ при следующих параметрах объекта:  $m = M = 10$  кг,  $L = 1$  м,  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $J = mL^2/12$  (тонкий стержень). Параметры желаемых движений:  $T_1 = 0,1$  с,  $A_1 = \sqrt{2}$  (настройка по Баттерворту),  $\mu_1 = 10^{-2}$  с. Качество процесса стабилизации маятника на рисунке соответствует принятому УЖД. По окончании переходного процесса по отклонению маятника каретка совершает равномерное движение, так как в описанных выше условиях моделирования объекта отсутствуют все силы сопротивления и, следовательно, потери энергии.

**3. Синтез алгоритма управления скоростью каретки с инвертированным маятником.** Так как задача регулирования скорости перемещения каретки с инвертиро-

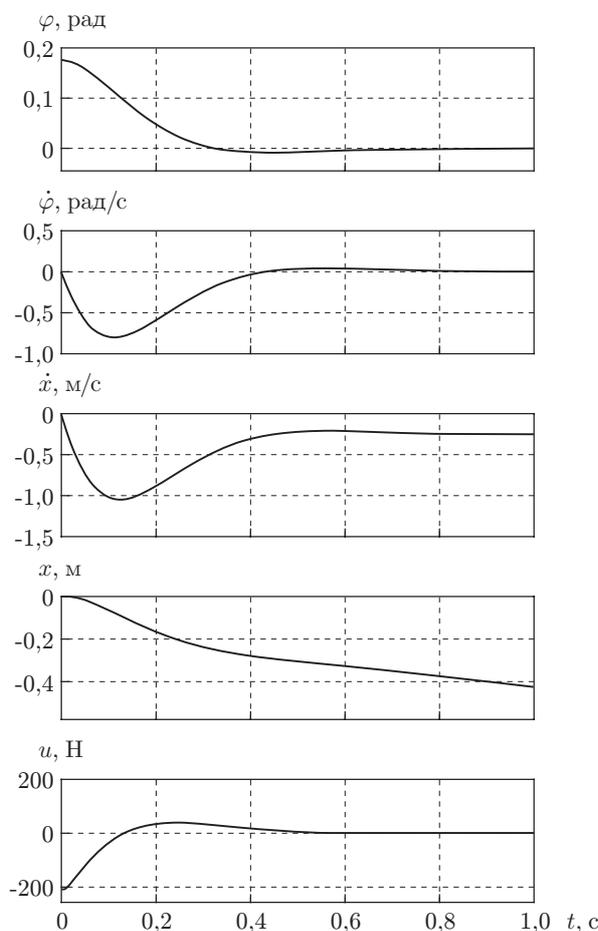


Рис. 2. Результаты моделирования синтезированной системы стабилизации маятника

ваным маятником не подразумевает введения ограничений на её линейное перемещение  $x$ , не входящее в правую часть уравнения (2), исключим из модели объекта эту координату состояния и перепишем (2) в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{(M+m)(J+mL^2) - (mL \cos(\varphi))^2} \begin{bmatrix} J+mL^2 & mL \cos(\varphi) \\ mL \cos(\varphi) & M+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u+f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $v = \dot{x}$  — скорость перемещения каретки;  $\omega = \dot{\varphi}$  — угловая скорость маятника;

$$f_1 = -k_1 v - mL \sin(\varphi) \omega^2; \quad f_2 = -k_2 \omega + mgL \sin(\varphi).$$

В данной работе предлагается следующий подход к синтезу САУ скоростью каретки. Введём в рассмотрение новую регулируемую переменную  $z(t)$  как линейную комбинацию координат состояния объекта и задающего воздействия:

$$z = (r - v) + a_\varphi \varphi + a_\omega \omega,$$

здесь  $r = \text{const}$  — заданное значение скорости перемещения каретки;  $a_\varphi, a_\omega$  — постоянные коэффициенты.

Если по аналогии с материалом разд. 2 на основе метода САОМ организовать достаточно быстрый вывод изображающей точки объекта на многообразии  $z = 0$  (выбрав достаточно малую постоянную времени УЖД по  $z(t)$ ), то дальнейшие движения САУ будут протекать в силу так называемой «нуль-системы», модель которой можно получить, подставляя вычисленное из условий  $z = 0, \dot{z} = 0$  предельное управляющее воздействие в уравнение объекта управления (3) с учётом равенства  $v = r + a_\varphi \varphi + a_\omega \omega$ . Именно эта нуль-система второго порядка должна быть стабилизирована выбором коэффициентов  $a_\varphi, a_\omega$ .

В целях определения структуры и параметров закона управления линеаризуем (3) в точке  $v = 0, \omega = 0, \varphi = 0$ . Тогда расчётная модель объекта принимает вид

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (4)$$

где

$$a_{11} = -d^{-1}(J+mL^2)k_1; \quad a_{12} = -d^{-1}mLk_2; \quad a_{13} = d^{-1}(mL)^2g;$$

$$a_{21} = -d^{-1}mLk_1; \quad a_{22} = -d^{-1}(M+m)k_2; \quad a_{23} = d^{-1}(M+m)mgL;$$

$$b_1 = d^{-1}(J+mL^2); \quad b_2 = d^{-1}mL; \quad d = (M+m)(J+mL^2) - (mL)^2.$$

Согласно (4) процессы по переменной  $z(t)$  «в малом» описываются уравнением

$$\dot{z} = a_{zv}v + a_{z\omega}\omega + a_{z\varphi}\varphi + b_z u, \quad (5)$$

где  $a_{zv} = a_\omega a_{21} - a_{11}$ ;  $a_{z\omega} = a_\varphi + a_\omega a_{22} - a_{12}$ ;  $a_{z\varphi} = a_\omega a_{23} - a_{13}$ ;  $b_z = a_\omega b_2 - b_1$ .

Это позволяет на основе метода САОМ синтезировать алгоритм управления и наблюдатель приведённого возмущения вида

$$u = -\frac{1}{T_2 b_z} z - \frac{1}{b_z} \hat{\xi}_2, \quad \begin{cases} \dot{\eta}_2 = -\mu_2^{-1}(b_z u + \hat{\xi}_2), \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \eta_2 + \mu_2^{-1} z. \end{cases}$$

Здесь  $T_2$  — постоянная времени аperiodических желаемых процессов по  $z(t)$ ;  $\mu_2$  — малый параметр — постоянная времени наблюдателя. Заметим, что для упрощения выкладок все слагаемые правой части (5), не содержащие управляющего воздействия, отнесены к приведённому возмущению  $\xi_2$ .

Для определения искомых коэффициентов  $a_\varphi$  и  $a_\omega$  используем линеаризованную модель нуль-системы, описывающей динамику замкнутой САУ на многообразии  $z = 0$ . Из уравнения (5) и условия  $\dot{z} = 0$  предельное управление определяется как

$$u^{\text{lim}} = -b_z^{-1}(a_{zv}r + a_{u\varphi}\varphi + a_{u\omega}\omega),$$

где  $a_{u\varphi} = a_{zv}a_\varphi + a_{z\varphi}$ ;  $a_{u\omega} = a_{zv}a_\omega + a_{z\omega}$ .

Подставляя его во второе и третье уравнения системы (4), с учётом равенства  $v = r + a_\varphi\varphi + a_\omega\omega$  (т. е.  $z = 0$ ), замещающего первое уравнение (4), получим собственную матрицу нуль-системы

$$\begin{bmatrix} a_{22} + a_{21}a_\omega - a_{u\omega}b_2b_z^{-1} & a_{23} + a_{21}a_\varphi - a_{u\varphi}b_2b_z^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и её характеристический полином

$$p^2 + p(a_{u\omega}b_2b_z^{-1} - a_{22} - a_{21}a_\omega) + a_{u\varphi}b_2b_z^{-1} - a_{23} - a_{21}a_\varphi = p^2 + pA_2\Omega + \Omega^2.$$

Задаваясь коэффициентом формы  $A_2$  и среднегеометрическим корнем  $\Omega$ , отсюда можно найти требуемые параметры функции  $z(r, v, \varphi, \omega)$ .

На рис. 3 приведены графики переходного процесса в синтезированной таким образом системе управления объектом (2) при нулевых начальных условиях, единичном ступенчатом задающем воздействии  $r(t)$  и коэффициентах  $a_\omega = 11$  м/рад,  $a_\varphi = 19,8$  м/с/рад, которые соответствуют  $A_2 = 2$  (биномиальное распределение корней) и  $\Omega = 1$  рад/с. Постоянные времени алгоритма сигнальной адаптации  $T_2 = 0,25$  с,  $\mu_2 = 5 \cdot 10^{-2}$  с выбраны из условий обеспечения трёхтемпового характера движений в САУ.

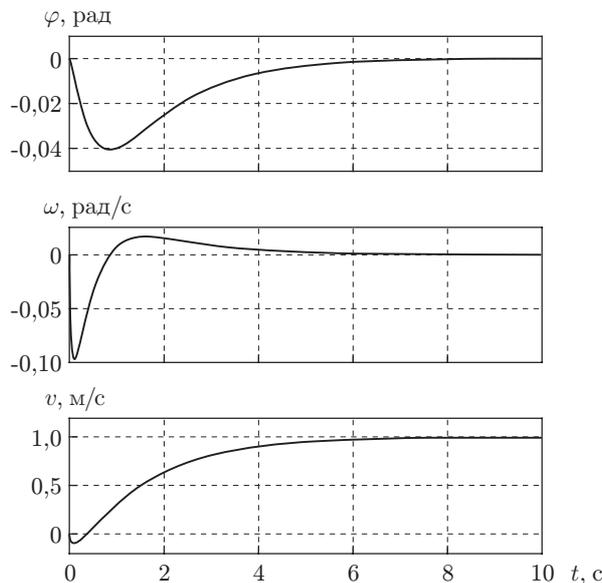


Рис. 3. Графики переходного процесса в системе регулирования скорости

**4. Алгоритм управления положением каретки с инвертированным маятником.** Методика решения задачи позиционирования каретки с инвертированным маятником аналогична рассмотренной в разд. 3. Для синтеза алгоритма управления используется модель объекта (2), предварительно линеаризованная и представленная в форме

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \\ \varphi \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (6)$$

Комбинируемую регулируемую переменную  $z(t)$  введём по формуле

$$z = (r - x) + a_{\varphi}\varphi + a_{\omega}\omega + a_v v,$$

здесь  $r = \text{const}$  — заданное значение положения каретки;  $a_{\varphi}$ ,  $a_{\omega}$ ,  $a_v$  — коэффициенты.

Согласно (6) процессы по  $z(t)$  в малом описываются уравнением

$$\dot{z} = a_{zv}v + a_{z\omega}\omega + a_{z\varphi}\varphi + b_z u, \quad (7)$$

где  $a_{zv} = a_{\omega}a_{21} + a_v a_{11} - 1$ ;  $a_{z\omega} = a_{\varphi} + a_{\omega}a_{22} + a_v a_{12}$ ;  $a_{z\varphi} = a_{\omega}a_{23} + a_v a_{13}$ ;  $b_z = a_v b_1 + a_{\omega} b_2$ .

Следовательно, алгоритм управления и наблюдатель приведённого возмущения метода САОМ можно задать в виде

$$u = -\frac{1}{T_3 b_z} z - \frac{1}{b_z} \hat{\xi}_3, \quad \begin{cases} \dot{\eta}_3 = -\mu_3^{-1}(b_z u + \hat{\xi}_3), \\ \dot{\hat{\xi}}_3 = \eta_3 + \mu_3^{-1} z. \end{cases}$$

Здесь  $T_3$  — постоянная времени аperiodических желаемых процессов по  $z(t)$ ;  $\mu_3$  — малый параметр; все слагаемые правой части (7), не содержащие управляющего воздействия, вновь отнесены к приведённому возмущению  $\xi_3$ .

В данной задаче определению из условий требуемого качества линеаризованной нуль-системы подлежат три коэффициента:  $a_v$ ,  $a_{\varphi}$  и  $a_{\omega}$ . Из уравнений  $z = 0$ ,  $\dot{z} = 0$  находим

$$x = r + a_{\varphi}\varphi + a_{\omega}\omega + a_v v$$

и предельное управление

$$u^{\text{lim}} = -b_z^{-1}(a_{zv}v + a_{z\omega}\omega + a_{z\varphi}\varphi).$$

Подставляя  $u^{\text{lim}}$  в первое, второе и третье уравнения системы (6), получим собственную матрицу нуль-системы

$$\begin{bmatrix} a_{11} - a_{zv}b_1b_z^{-1} & a_{12} - a_{z\omega}b_1b_z^{-1} & a_{13} - a_{z\varphi}b_1b_z^{-1} \\ a_{21} - a_{zv}b_2b_z^{-1} & a_{22} - a_{z\omega}b_2b_z^{-1} & a_{23} - a_{z\varphi}b_2b_z^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и её характеристический полином

$$p^3 + p^2(a_{zv}b_1b_z^{-1} - a_{11} + a_{z\omega}b_2b_z^{-1} - a_{22}) + p((a_{z\omega}b_1b_z^{-1} - a_{12})(a_{21} - a_{zv}b_2b_z^{-1}) +$$

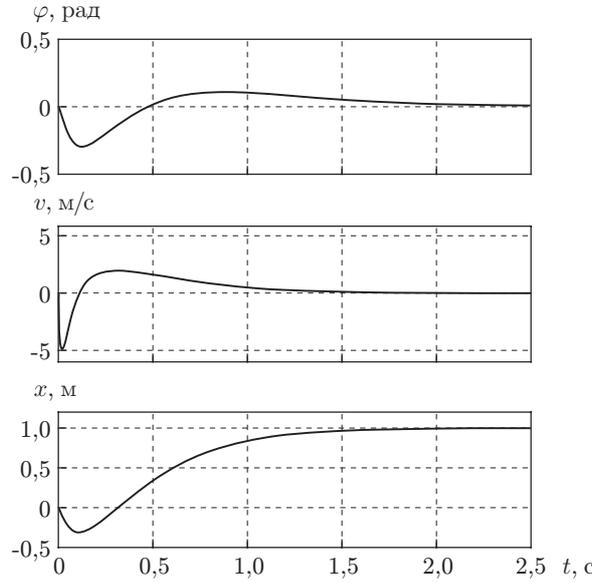


Рис. 4. Графики переходного процесса в системе управления положением каретки с инвертированным маятником

$$\begin{aligned}
 &+ a_{z\varphi} b_2 b_z^{-1} - a_{23} + (a_{zv} b_1 b_z^{-1} - a_{11})(a_{z\omega} b_2 b_z^{-1} - a_{22}) + (a_{zv} b_1 b_z^{-1} - a_{11})(a_{z\varphi} b_2 b_z^{-1} - a_{23}) + \\
 &+ (a_{z\varphi} b_1 b_z^{-1} - a_{13})(a_{21} - a_{zv} b_2 b_z^{-1}) = p^3 + p^2 A_{32} \Omega + p A_{31} \Omega^2 + \Omega^3.
 \end{aligned}$$

Задаваясь коэффициентами формы  $A_{31}$ ,  $A_{32}$  и среднегеометрическим корнем  $\Omega$ , отсюда следует вычислить требуемые параметры функции  $z(r, x, v, \varphi, \omega)$ .

В качестве примера на рис. 4 приведены графики переходного процесса в данной системе управления объектом (2) при нулевых начальных условиях, единичном ступенчатом задающем воздействии  $r(t)$  и коэффициентах  $a_v = -0,83$  с,  $a_\omega = 1,1$  м/(рад/с),  $a_\varphi = 3,3$  м/рад, которые соответствуют  $A_{31} \approx A_{32} \approx 3$  и  $\Omega = 3,65$  рад/с. Постоянные времени алгоритма сигнальной адаптации  $T_3 = 5,0 \cdot 10^{-2}$  с,  $\mu_3 = 1,0 \cdot 10^{-2}$  с.

**5. О возможности построения системы регулирования положения каретки на базе подчинённой САУ скоростью.** Если при сохранении значения среднегеометрического корня линеаризованной нуль-системы допустимо несколько ослабить требования к быстродействию САУ положением каретки, появляется возможность построить её на основе системы регулирования скорости (см. разд. 3) по принципу подчинённого регулирования координат. При этом задающее воздействие по скорости каретки формируется регулятором, реализующим управление по отклонению положения каретки. В простейшем случае регулятор положения может быть пропорциональным, так как астатизм САУ по отношению к неучтённым в модели объекта (2) возмущениям обеспечивается подчинённой системой регулирования скорости.

На рис. 5 приведён пример графиков переходного процесса в такой САУ положением при нулевых начальных условиях, единичном ступенчатом задающем воздействии и следующих параметрах подсистемы управления скоростью:  $a_\omega = 1,82$  м/рад,  $a_\varphi = 5,5$  м/с/рад,  $A_2 \approx 2$  и  $\Omega = 3,65$  рад/с,  $T_2 = 0,1$  с,  $\mu_2 = 2,0 \cdot 10^{-2}$  с. Коэффициент передачи пропорционального регулятора положения (при единичной обратной связи) рассчитывался

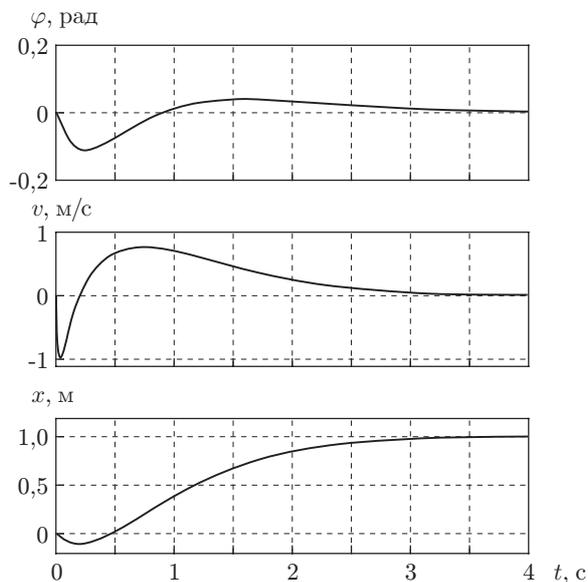


Рис. 5. Графики переходного процесса в системе регулирования положения каретки на базе подчинённой САУ скоростью

как  $K_{РП} = \Omega/a_p$ , где  $a_p \approx 5$  — эмпирический коэффициент разделения темпов движений. Преимуществом такого алгоритмического решения является возможность простого и эффективного ограничения скорости перемещения каретки «в большом» посредством ограничения выхода регулятора положения.

**Заключение.** В данной работе на примере трёх типовых задач управления системой «каретка — однозвенный инвертированный маятник» продемонстрирована эффективность метода сигнально-адаптивной обратной модели при решении задач синтеза одноканальных САУ структурно-неустойчивым объектом, содержащим вырожденную нуль-систему. Разработанная методика синтеза включает в себя:

- 1) приведение дифференциальных уравнений модели объекта к нормальной форме Коши, при этом вектор координат состояния должен содержать выходную переменную;
- 2) формирование комбинированной управляемой переменной с первым относительным порядком инерционности по управляющему воздействию в виде линейной комбинации задающего воздействия, выходной переменной и других координат состояния;
- 3) построение алгоритма управления комбинированной переменной методом САОМ;
- 4) линеаризацию модели замкнутой САУ и выделение нуль-системы;
- 5) расчёт коэффициентов комбинированной переменной из условий желаемого расположения полюсов нуль-системы;
- 6) определение параметров алгоритма САОМ (УЖД по комбинированной переменной и наблюдателя приведённого возмущения) исходя из условий преднамеренного выделения в замкнутой системе движений трёх темпов: медленных (в нуль-системе), быстрых (собственно в САОМ) и сверхбыстрых (в наблюдателе).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 650 с.

2. **Панкратов В. В.** Метод синтеза робастных алгоритмов управления на основе адаптивных обратных моделей // Автоматизированные электромеханические системы. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. С. 14–27.
3. **Панкратов В. В.** Метод синтеза систем управления на основе адаптивных обратных моделей // Матер. IX Междунар. конф. «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2008). Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. Т. 7. С. 165–169.
4. **Панкратов В. В., Нос О. В., Зима Е. А.** Избранные разделы теории автоматического управления: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 223 с.
5. **Панкратов В. В.** Сигнально-адаптивные обратные модели как метод синтеза робастных алгоритмов автоматического управления // Науч. вестн. НГТУ. 2011. № 2. С. 23–32.
6. **Панкратов В. В.** Синтез систем автоматического управления методом сигнально-адаптивной обратной модели // Автоматизированные электромеханические системы. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. С. 5–15.
7. **Панкратов В. В., Котин Д. А., Кучер Е. С.** Синтез алгоритмов управления электрическими машинами переменного тока методом сигнально-адаптивной обратной модели // Тр. VII Междунар. (XVIII Всеросс.) конф. по автоматизированному электроприводу (АЭП-2012). Иваново: ИГЭУ, 2012. С. 400–405.

*Поступила в редакцию 16 марта 2013 г.*

---