# МОДЕЛИРОВАНИЕ В ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

УДК 681.5 : 004.3

# АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ С СИГНАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ*

**А. З. Асанов, Д. Н. Демьянов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
*420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18*
*E-mail: askhat.asanov@yandex.ru*

Предложен алгоритм аналитического синтеза функциональных наблюдателей на основе невырожденного преобразования вектора состояния с использованием технологии канонизации матриц и методов решения линейных матричных уравнений произвольной размерности. Сформулированы условия разрешимости задачи синтеза и инвариантности построенного наблюдателя к сигнальным возмущениям в виде системы линейных матричных уравнений.

*Ключевые слова:* функциональный наблюдатель, алгоритм синтеза, канонизация матриц, сигнальные возмущения, инвариантность.

**Введение.** Достаточно важной прикладной задачей, часто возникающей в процессе исследования, проектирования и эксплуатации сложной технической системы, является оценка её основных параметров и вектора состояния. Это может потребоваться, например, при решении задач управления [1, 2] или диагностики [3] в случаях, когда не все компоненты вектора состояния доступны непосредственному измерению.

Наиболее часто для оценки вектора состояния применяются специальные устройства (алгоритмы) — наблюдатели, которые позволяют восстанавливать необходимую информацию по известным входным и выходным сигналам [4–6]. При этом наряду с наблюдателями полного порядка и редуцированными наблюдателями существуют так называемые функциональные наблюдатели, позволяющие оценивать не все переменные состояния, а лишь некоторую совокупность их линейных комбинаций [7]. Такие наблюдатели могут применяться, например, для выработки сигналов управления при использовании модального регулятора [8] или же для формирования обобщённого критерия качества функционирования при проведении диагностики в режиме реального времени.

Цель данной работы — создание алгоритма аналитического синтеза функциональных наблюдателей на основе специального представления математической модели системы в пространстве состояний, а также формулировка условий, при выполнении которых полученный функциональный наблюдатель становится инвариантным к действию внешних возмущений.

**Постановка задачи.** Пусть рассматривается динамический объект, который описывается в пространстве состояний уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu + Hf; \qquad y = Cx. \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-00651).

Здесь $x \in R^n$, $u \in R^s$, $y \in R^m$, $f \in R^k$ — векторы состояния, управления, выхода и внешних возмущений; $A, B, C, H$ — числовые матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что все матрицы коэффициентов известны, вектор состояния и вектор внешних возмущений недоступны непосредственному измерению, вектор управления и вектор выхода могут быть измерены с высокой точностью, пара $(A, C)$ является полностью наблюдаемой по Калману, все строки матрицы выхода линейно независимы, $n \geq \max(m, s, k)$.

Предположим, что интересующая нас информация о процессах, протекающих в изучаемом объекте, содержится в векторе $g$, определяемом соотношением

$$g = Kx. \tag{2}$$

Здесь $g \in R^p$; $K$ — числовая матрица соответствующих размеров.

Требуется синтезировать динамическую систему порядка $p$, которая формировала бы по известной информации о сигналах $y$ и $u$ вектор $\hat{g}$ такой, что

$$\varepsilon(t) = \hat{g}(t) - g(t) \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{3}$$

**Предварительные соотношения.** Для решения поставленной задачи будем использовать технологию канонизации матриц [9], суть которой заключается в том, что некоторой матрице $M$ размера $m \times n$ ставится в соответствие четвёрка матриц: $\tilde{M}^L$, $\tilde{M}^R$, $\bar{M}^L$, $\bar{M}^R$, удовлетворяющих равенству

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}^L \\ \bar{M}^L \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{M}^R & \bar{M}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\tilde{M}^L$, $\tilde{M}^R$ — левый и правый матричные делители единицы, $\bar{M}^L$, $\bar{M}^R$ — левый и правый матричные делители нуля. Произведение $\tilde{M}^R\tilde{M}^L$ обозначается как $\tilde{M}$ и называется сводным канонизатором.

Определим вектор состояния динамического объекта из второго уравнения системы (1), используя методы решения линейных матричных уравнений произвольного вида [9]:

$$x = \tilde{C}y + \bar{C}^R z, \tag{4}$$

где $z$ — некоторый неизвестный вектор длиной $n - m$.

Выражение (4) будет справедливо всегда, так как согласно принятым допущениям матрица выхода имеет полный строчный ранг, т. е. $\bar{C}^L = \varnothing$.

Подставив выражение (4) в формулу (2), получим

$$g = K\tilde{C}y + K\bar{C}^R z. \tag{5}$$

Обозначим $\mu = K\bar{C}^R z$. Тогда, рассматривая данное соотношение как линейное матричное уравнение, определим вектор $z$:

$$z = \widetilde{K\bar{C}^R}\mu + \overline{K\bar{C}^R}^R \eta. \tag{6}$$

Здесь $\eta$ — некоторый неизвестный вектор, размерность которого равна количеству линейно зависимых столбцов матрицы $K\bar{C}^R$.

Выражение (6) будет справедливо, только если выполняется условие $\overline{K\bar{C}^R}^L = \varnothing$, т. е. все строки матрицы $K\bar{C}^R$ должны быть линейно независимыми. Это означает, в частности, что число строк матрицы $K$ не должно превышать число столбцов матрицы $\bar{C}^R$ $(p \leq n-m)$.

Объединим выражения (4) и (6) и запишем результат в матричном виде:

$$x = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\widetilde{K\bar{C}^R} & \bar{C}^R\overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Можно показать, что при выполнении принятых допущений матрица коэффициентов в правой части соотношения (7) будет являться квадратной невырожденной. Для доказательства данного утверждения преобразуем указанную матрицу следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\widetilde{K\bar{C}^R} & \bar{C}^R\overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R \begin{pmatrix} \widetilde{K\bar{C}^R} & \overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $K^* = \begin{pmatrix} \widetilde{K\bar{C}^R} & \overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix}$. Если $\overline{K\bar{C}^R}^L = \varnothing$, то согласно свойствам канонизаторов [9] матрица $\widetilde{K\bar{C}^R}^L$ квадратная обратимая. Тогда матрица $K^*$ имеет такие же размеры, что и матрица $\begin{pmatrix} \widetilde{K\bar{C}^R}^R & \overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix}$, которая, по определению, является квадратной. Невырожденность матрицы $K^*$ можно доказать от обратного. Пусть $\det K^* = 0$, тогда существует некоторый вектор $v \neq 0$ такой, что $vK^* = 0$. Следовательно, должны выполняться условия $v\widetilde{K\bar{C}^R}^R\widetilde{K\bar{C}^R}^L = 0$, $v\overline{K\bar{C}^R}^R = 0$. С учётом того что матрица $\widetilde{K\bar{C}^R}^L$ квадратная обратимая, первое из приведённых условий эквивалентно условию $v\widetilde{K\bar{C}^R}^R = 0$. Таким образом, определили, что существует ненулевой вектор $v$, удовлетворяющий условию $v\begin{pmatrix} \widetilde{K\bar{C}^R}^R & \overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} = 0$. Но это противоречит свойствам делителей нуля и канонизаторов. Следовательно, сделанное предположение неверно и матрица $K^*$ является квадратной невырожденной.

Применив рассуждения, аналогичные приведённым выше, к самой матрице коэффициентов из правой части уравнения (7), можно показать, что она также будет квадратной невырожденной.

Введём обозначения:

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\widetilde{K\bar{C}^R} & \bar{C}^R\overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix}; \quad V = T^{-1} = \begin{pmatrix} V_1^T & V_2^T & V_3^T \end{pmatrix}^T. \tag{8}$$

Таким образом, получены матрицы преобразования, связывающие вектор состояния динамического объекта с его выходным вектором и двумя неизвестными векторами. При этом только один из упомянутых неизвестных векторов нужен для определения искомого вектора $g$.

**Синтез наблюдающего устройства.** Запишем уравнение динамики объекта (1) в новых координатах, задаваемых соотношением (7):

$$\begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\widetilde{K\bar{C}^R} & \bar{C}^R\overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{C} & \bar{C}^R\widetilde{K\bar{C}^R} & \bar{C}^R\overline{K\bar{C}^R}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} + Bu + Hf.$$

Преобразуем полученную систему уравнений, используя обозначения (8):

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1AT_1 & V_1AT_2 & V_1AT_3 \\ V_2AT_1 & V_2AT_2 & V_2AT_3 \\ V_3AT_1 & V_3AT_2 & V_3AT_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1B \\ V_2B \\ V_3B \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} V_1H \\ V_2H \\ V_3H \end{pmatrix} f. \qquad (9)$$

Выделим из системы (9) второе уравнение и, дополнив его слагаемым, пропорциональным рассогласованию между реальным значением вектора $\mu$ и его оценкой $\hat{\mu}$, по аналогии с работой [5] запишем

$$\dot{\hat{\mu}} = V_2AT_1y + V_2AT_2\hat{\mu} + V_2AT_3\eta + V_2Bu + V_2Hf + L(V_1AT_2\mu - V_1AT_2\hat{\mu}).$$

Определив реальное значение вектора $V_1AT_2\mu$ из первого уравнения системы (9), будем иметь уравнение наблюдающего устройства:

$$\dot{\hat{\mu}} = (V_2 - LV_1)(AT_2\hat{\mu} + AT_1y + AT_3\eta + Bu + Hf) + L\dot{y}. \qquad (10)$$

Используя соотношение (5), найдём оценку вектора $g$:

$$\hat{g} = KT_1y + \hat{\mu}. \qquad (11)$$

Учитывая выражения (5) и (11), вычислим ошибку оценивания вектора $g$:

$$\varepsilon = \hat{g} - g = \hat{\mu} - \mu.$$

Продифференцируем полученное соотношение по времени, после чего подставим в него второе уравнение системы (9) и уравнение (10):

$$\dot{\varepsilon} = (V_2 - LV_1)AT_2\varepsilon.$$

Если пара $\begin{pmatrix} V_2AT_2 & V_1AT_2 \end{pmatrix}$ является полностью наблюдаемой, то выбором матрицы $L$ можно обеспечить желаемые собственные числа матрицы $(V_2 - LV_1)AT_2$, т. е. желаемую динамику процесса оценивания. В частности, расположив все собственные числа в левой полуплоскости комплексной плоскости, можно обеспечить выполнение условия (3).

Следует отметить, что в правой части уравнения (10) имеются слагаемые, зависящие от векторов $f$ и $\eta$. Согласно принятым допущениям эти векторы недоступны непосредственному измерению. Следовательно, соответствующие им коэффициенты уравнения (10) должны быть обнулены.

Таким образом, уравнение наблюдающего устройства будет иметь вид

$$\dot{\hat{\mu}} = (V_2 - LV_1)(AT_2\hat{\mu} + AT_1y + Bu) + L\dot{y}, \qquad (12)$$

если выполняются условия

$$\begin{cases} (V_2 - LV_1)AT_3 = 0, \\ (V_2 - LV_1)H = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

В случае, когда непосредственное дифференцирование выходного сигнала не допускается по тем или иным причинам, можно модифицировать расчётную схему.

Обозначим $w = \hat{\mu} - Ly$. Тогда уравнение (12) запишем как

$$\dot{w} = (V_2 - LV_1)(AT_2w + [AT_1 + AT_2L]y + Bu). \qquad (14)$$

При этом оценка вектора $g$ будет определяться выражением

$$\hat{g} = (K\tilde{C} + L)y + w. \tag{15}$$

Полученное наблюдающее устройство, задаваемое уравнениями (11), (12) или (14), (15), позволяет асимптотически оценивать интересующий нас вектор $g$ при выполнении условий (13). При этом его порядок будет равен размерности вектора $\mu$, который, в свою очередь, равен величине $p$ — размерности вектора $g$, как и требовалось по условию.

**Анализ условий разрешимости.** Рассмотрим условия разрешимости задачи синтеза (13). Объединив оба уравнения системы, запишем

$$(V_2 - LV_1)\begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Используя результаты [9], решим полученное линейное матричное уравнение

$$L = V_2 \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \tilde{M} + \pi \bar{M}^L. \tag{17}$$

Здесь $\pi$ — произвольная матрица, количество строк которой равно $p$, а количество столбцов — числу линейно зависимых строк матрицы $M$, определяемой выражением

$$M = V_1 \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Решение (17) существует, только если выполняется условие разрешимости

$$V_2 \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \bar{M}^R = 0. \tag{19}$$

Рассмотрим соотношение (17) в зависимости от свойств матрицы $M$.

1. Если $\bar{M}^L = \varnothing$, то формула (17) определяет единственную матрицу наблюдения

$$L = V_2 \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \tilde{M}. \tag{20}$$

При этом матрица динамики наблюдающего устройства находится из соотношения

$$A_L = V_2 \left( I - \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \tilde{M} V_1 \right) AT_2. \tag{21}$$

Если все собственные числа матрицы (21) располагаются в требуемой области комплексной плоскости, то можно считать задачу синтеза решённой. В противном случае в рамках предлагаемого подхода решения задачи не существует.

2. Если $\bar{M}^L \neq \varnothing$, то формула (17) задаёт множество допустимых матриц наблюдения, из которого следует выбрать конкретный элемент, обеспечивающий желаемую динамку процесса оценивания. В общем виде матрица динамики наблюдающего устройства будет вычисляться из следующего выражения:

$$A_L = \left( V_2 - V_2 \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \tilde{M} V_1 \right) AT_2 - \pi \bar{M}^L V_1 AT_2. \tag{22}$$

Введём обозначения:

$$A^* = \left[ V_2 \left( I - \begin{pmatrix} AT_3 & H \end{pmatrix} \tilde{M} V_1 \right) AT_2 \right]^T; \quad B^* = [\bar{M}^L V_1 AT_2]^T. \tag{23}$$

Тогда задача обеспечения желаемой динамики процесса оценивания будет эквивалентна заданию желаемого спектра матрицы $A^* - B^* \pi^T$, что является классической задачей модального управления. Решение данной задачи возможно, если пара $(A^*, B^*)$ управляема по Калману. После определения матрицы $\pi$ матрица $L$ может быть найдена по формуле (17).

**Обобщённый алгоритм синтеза наблюдающего устройства.** С учётом полученных соотношений можно сформулировать в общем виде алгоритм аналитического синтеза функционального наблюдателя, инвариантного к действию сигнальных возмущений.

Пусть заданы числовые матрицы коэффициентов из уравнений (1) и (2), а также область комплексной плоскости, в которой должны располагаться собственные числа матрицы динамики наблюдателя.

Решение задачи может быть выполнено в несколько этапов:

1. Вычисление матрицы $K\bar{C}^R$ и нахождение её левого делителя нуля.

2. Вычисление матриц $T$ и $V$ по формулам (8).

3. Вычисление матрицы $M$ по формуле (18) и определение её делителей нуля, делителей единицы и сводного канонизатора.

4. Проверка условия разрешимости задачи (19).

5. Если $\bar{M}^L = \varnothing$ и собственные числа матрицы (21) располагаются в требуемой области, то матрица $L$ находится из формулы (20).

6. Если $\bar{M}^L \neq \varnothing$ и пара $(A^*, B^*)$, определяемая формулами (23), полностью управляема, то вычисляется матрица $\pi$ такая, что все собственные числа матрицы (22) располагаются в требуемой области комплексной плоскости. Матрица $L$ задаётся формулой (17).

7. Если по условиям задачи дифференцирование выходного сигнала допускается, то уравнение наблюдающего устройства вычисляется из формулы (12), а оценка вектора $g$ — из формулы (11). В противном случае уравнение наблюдающего устройства определяется формулой (14), а оценка вектора $g$ — формулой (15).

Если матрица $K\bar{C}^R$ имеет линейно зависимые строки или на четвёртом этапе не выполняется условие (19), или по результатам этапов 5 и 6 не была вычислена матрица $L$, то задача не имеет решения.

**Пример.** Пусть некоторый динамический объект описывается системой уравнений в пространстве состояний вида (1), а подлежащий оцениванию вектор задаётся выражением (2). При этом матрицы коэффициентов принимают следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}072 & 2{,}054 & 3{,}019 & 0 \\ 0 & -6{,}608 & -0{,}100 & 0 & 10{,}207 \\ 0 & -327{,}100 & 0 & -42{,}000 & 0 \\ 0 & 0 & -489{,}900 & 0 & -87{,}500 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18{,}000 & 0{,}117 & 0{,}351 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}792 & 35{,}000 & 0{,}478 \\ 0{,}317 & 0{,}948 & 50{,}000 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}377 \\ 0 \\ -0{,}680 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}100 & 3{,}000 & 170{,}000 & 0,250 & -0{,}500 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить функциональный наблюдатель, инвариантный к действию внешнего возмущения и не допускающий дифференцирования выходного сигнала. Собственные числа наблюдателя должны располагаться на комплексной плоскости левее полюсов объекта.

Для решения поставленной задачи воспользуемся изложенным выше алгоритмом.

1. Вычислим матрицу $K\bar{C}^R$ и найдём её левый делитель нуля (здесь и далее для расчётов использовались программные средства, описанные в работе [10]):

$$K\bar{C}^R = \begin{pmatrix} 3{,}000 & -0{,}500 \end{pmatrix}, \quad \overline{K\bar{C}^R}^L = \varnothing.$$

Так как $\overline{K\bar{C}^R}^L = \varnothing$, то преобразование вектора $x$ по формуле (7) возможно.

2. Определим матрицы преобразования, используя формулы (8):

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}333 & 0{,}167 \\ 0 & 1{,}000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}000 \end{array}\right),$$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccc} 1{,}000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}000 & 0 \\ \hline 0 & 3{,}000 & 0 & 0 & -0{,}500 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}000 \end{array}\right).$$

3. Вычислим по формуле (18) матрицу $M$ и осуществим её канонизацию:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}167 & 0 \\ 9{,}106 & 0 \\ -54{,}517 & -0{,}680 \end{pmatrix}, \quad \bar{M}^R = \varnothing, \quad \bar{M}^L = \begin{pmatrix} -54{,}634 & 1{,}000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}^L = \tilde{M} = \begin{pmatrix} 6{,}000 & 0 & 0 \\ -481{,}030 & 0 & -1{,}471 \end{pmatrix}.$$

4. Так как $\bar{M}^R = \varnothing$, то условие разрешимости (19) выполняется.

5. Так как $\bar{M}^L \neq \varnothing$, то существует множество допустимых матриц наблюдения.

6. Вычислим матрицы $A^*, B^*$ по формулам (23): $A^* = -87{,}500$; $B^* = -20{,}414$. Пара $(A^*, B^*)$ полностью управляема. Расположив полюс наблюдателя в точке с координатой $-100$, вычислим коэффициент $\pi$. Его значение составляет $-0{,}612$. Матрицу наблюдения найдём по формуле (17):

$$L = \begin{pmatrix} 839{,}782 & -0{,}612 & 1{,}663 \end{pmatrix}.$$

7. Так как дифференцирование выходного сигнала не допускается, то уравнение наблюдателя будет определяться соотношением (14):

$$\dot{w} = -100w + \begin{pmatrix} -83978{,}202 & 312{,}283 & -87{,}411 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 52{,}524 & -58{,}336 & -24{,}742 \end{pmatrix} u\,.$$

Оценка вектора $g$ будет вычисляться по формуле (15):

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 839{,}882 & 169{,}388 & 1{,}913 \end{pmatrix} y + w.$$

Для проверки корректности полученных результатов проведено цифровое моделирование процесса оценивания с помощью системы компьютерной математики MATLAB. На

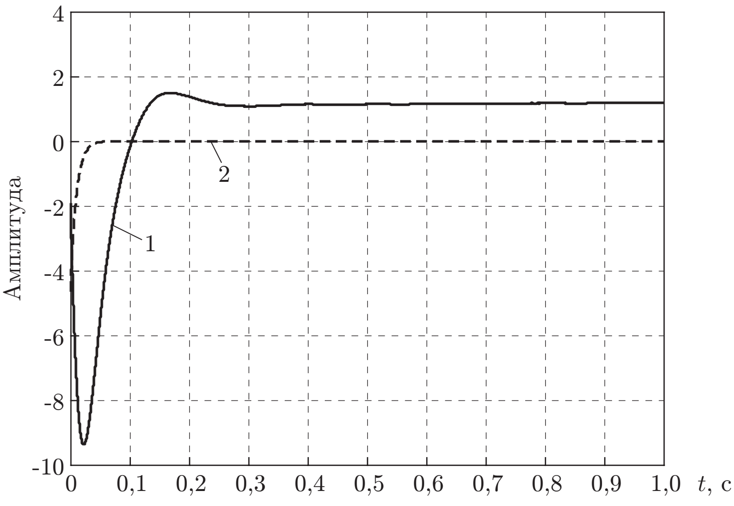


График изменения оцениваемого функционала (кривая *1*) и ошибки оценивания (кривая *2*) с течением времени

вход системы подавался единичный ступенчатый сигнал. В качестве возмущающего воздействия использовалась случайная величина, не превосходящая по модулю единицу. Кроме того, для иллюстрации асимптотического стремления ошибки оценивания к нулю были заданы следующие начальные условия: $x_1(0) = x_3(0) = x_5(0) = 0$; $x_2(0) = 1$; $x_4(0) = -1$.

Результаты моделирования представлены на рисунке. Как видно на графике, даже при ненулевых начальных условиях и наличии внешних неизмеряемых возмущений ошибка оценивания вектора $g$ стремится к нулю.

**Заключение.** В данной работе предложен алгоритм аналитического синтеза функционального наблюдателя на основе невырожденного преобразования вектора состояния с использованием технологии канонизации матриц. Сформулированы условия существования подобного наблюдающего устройства и его инвариантности к внешним сигнальным возмущениям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Белоконь С. А., Золотухин Ю. Н., Мальцев А. С. и др.** Управление параметрами полёта квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автометрия. 2012. **48**, № 5. С. 32–41.
2. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез физически реализуемых регуляторов для многосвязных объектов на основе технологии вложения // Автометрия. 2012. **48**, № 5. С. 42–49.
3. **Мироновский Л. А.** Функциональное диагностирование динамических систем. С.-Пб.: Научное издание, 1998. 256 с.
4. **Асанов А. З.** Синтез наблюдателя нагрузки электромеханической системы // Изв. вузов. Авиационная техника. 2003. № 2. С. 17–21.
5. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. С.-Пб.: Наука, 1999. 467 с.
6. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез инвариантных наблюдателей состояния пониженного порядка // Автометрия. 2013. **49**, № 6. С. 25–32.

7. **Коровин С. К., Фомичев В. В., Медведев И. С.** Синтез минимальных функциональных наблюдателей // ДАН. Теория управления. 2005. **404**, № 3. С. 316–320.
8. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Задание спектра нулей в системах управления с параллельной компенсацией // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 5. С. 54–64.
9. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит. Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
10. **Асанов А. З., Ахметзянов И. З.** Канонизация матриц произвольного размера средствами Matlab // Тр. II Всерос. науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 798–804.

*Поступила в редакцию 19 декабря 2013 г.*