

УДК 004.925.8

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КУСОЧНО-ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

А. В. Смурыгин, И. В. Журбин

Физико-технический институт УрО РАН,

426000, г. Ижевск, ул. Кирова, 132

E-mail: a.sturygin@mail.ru

zhurb@udm.ru

Предлагается метод оптимизации геометрических объектов: ломаных линий и триангулированных кусочно-плоских поверхностей — в целях большей детализации и обеспечения визуальной гладкости их изображений. Исходный объект рассматривается как геометрическая реализация симплициальной схемы. Метод заключается в измельчении симплициальной схемы и бигармонической интерполяции функции вложения подразделения симплициальной схемы в евклидово пространство.

Ключевые слова: симплициальная схема, подразделение симплициальной схемы, функция вложения, бигармоническая интерполяция, дискретный оператор Лапласа на графе.

Введение. В различных областях науки объекты морфологических исследований аппроксимируются триангулированными кусочно-плоскими поверхностями с измеренными координатами вершин. Примерами таких исследований служат: реконструкция образа погребённого объекта по данным электротомографии (малоглубинная электроразведка), оценка параметров залежей полезных ископаемых (разведочная геофизика), формирование цифровой модели местности на участках со сложным рельефом (картографирование). Однако не всегда представляется возможным произвести достаточное количество измерений. Так, в условиях грубой аппроксимации поверхности трёхмерного тела, заведомо имеющего плавные очертания, возникает задача оптимизации. Оптимизация заключается в более детальном описании поверхности для более полного представления об объекте, например более точного вычисления объёма, площади поверхности, визуального восприятия объекта по более гладкому его изображению, построения виртуальных сечений и т. д.

Немалое количество программных систем трёхмерного моделирования (3ds Max, LightWave 3D, MODO 3D и др.) успешно решают задачу детализации и визуализации поверхности с применением методов представления поверхности в виде, удобном для текстурзации, желаемой деформации, анимации. Используемые методы эффективны при концептуальном построении поверхности по существующему образцу. Однако целью предлагаемой оптимизации является детерминированное построение поверхности, оптимальной в смысле минимальности некоторого функционала, при отсутствии априорных сведений об объекте.

Триангулированная кусочно-плоская поверхность рассматривается как геометрическая реализация симплициальной схемы [1, 2]. Предлагаемая оптимизация заключается в измельчении симплициальной схемы — добавлении новых вершин и согласованном разбиении рёбер и граней, а также в интерполяции функции вложения подразделения симплициальной схемы в евклидово пространство — вычислении координат новых вершин. Одномерный остов подразделения симплициальной схемы рассматривается как граф, а

*Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН (грант № 12-М-26-2005).

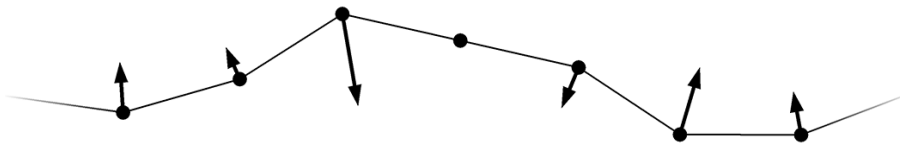


Рис. 1. Векторы оценки кривизны

функция вложения $\mathbf{r}(v)$ — как вектор-функция, определённая на вершинах графа. При интерполяции от функции требуется выполнение условия бигармоничности $(\Delta^2 \mathbf{r})(v) = 0$ для любой новой вершины v , где Δ — дискретный оператор (матрица) Лапласа на графе.

Обоснование метода на примере оптимизации ломаной. Вектором кривизны регулярной кривой в точке является вектор второй производной по натуральному параметру (длине дуги) в данной точке. Кривизна кривой в точке — норма вектора кривизны в данной точке [3]. Проведём аналогию между натурально-параметризованной регулярной кривой и ломаной линией, имеющей рёбра равной длины. Пусть $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, N\}$ — множество радиусов-векторов последовательно пронумерованных вершин плоской ломаной. Полагая равенство единице длин рёбер ломаной, используем аппроксимацию второй производной центрально-разностным оператором Δ : $(\Delta \mathbf{r})_i = \mathbf{r}_{i-1} - 2\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}$. Всё это даёт основание рассматривать вектор $(\Delta \mathbf{r})_i = (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}, y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$ как вектор оценки кривизны, а его длину — как оценку кривизны в вершине $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ ломаной, имеющей рёбра равной длины (рис. 1).

Пусть задана плоская (для определённости замкнутая) ломаная без точек самопересечения и требуется аппроксимировать её более плавной ломаной линией, обладающей большим количеством вершин и проходящей через вершины исходной ломаной (рис. 2, *b*). Разобьём рёбра ломаной на минимальное количество отрезков (рис. 2, *a*), длины которых не превышают некоторой заданной величины (условной единицы).

Пусть $\{\mathbf{r}_i = (x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, N\}$ — множество радиусов-векторов вершин ломаной после процедуры разбиения рёбер, при этом старые и новые вершины имеют общую последовательную нумерацию. Полагая неизвестными координаты новых вершин, определим их из условия минимальности некоторой суммарной оценки кривизны ломаной в вершинах. Избегая нелинейности, рассмотрим положительный функционал $F = \sum \{ \|(\Delta \mathbf{r})_i\|^2 \mid i = 1, \dots, N \}$:

$$F = \sum \{ (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N \},$$

$$F = \sum \{ (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N \} + \sum \{ (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N \}.$$

Функционал F есть сумма положительных функционалов $F_x = \sum \{ (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N \}$ и $F_y = \sum \{ (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N \}$. Тем самым исполь-

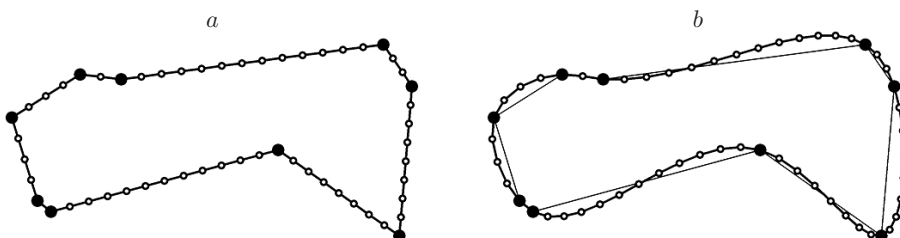


Рис. 2. Ломаные линии: *a* — исходная, разбиение рёбер; *b* — оптимизированная

зование квадратов оценок кривизны позволяет свести решение оптимизационной задачи $F \rightarrow \min$ к решению задач $F_x \rightarrow \min$ и $F_y \rightarrow \min$ независимо по координатам. Решение этих задач, в свою очередь, сводится к решению двух систем линейных уравнений $\{\partial F_x / \partial x_i = 0 \mid i = 1, \dots, N\}$ и $\{\partial F_y / \partial y_i = 0 \mid i = 1, \dots, N\}$:

$$\partial \sum \{(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N\} / \partial x_i = 2(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}),$$

$$\partial \sum \{(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})^2 \mid i = 1, \dots, N\} / \partial y_i = 2(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}).$$

Каждое уравнение каждой системы принимает вид

$$x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \quad \text{или} \quad y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0$$

с учётом цикличности индексации.

Обратим внимание на то, что матрицей каждой из систем уравнений является квадрат матрицы Лапласа, соответствующей графу рассматриваемой ломаной:

$$\Delta^2 X = 0, \quad \Delta^2 Y = 0.$$

В приведённой записи векторы-столбцы X и Y содержат как известные координаты вершин исходной ломаной, так и неизвестные. Пусть $N_{\text{н}}$ — количество новых вершин, а N — общее количество вершин. При условии сохранения координат старых вершин каждая из приведённых систем имеет избыточное количество N уравнений с $N_{\text{н}}$ неизвестными. Ограничимся рассмотрением совместных систем, составленных лишь из уравнений, соответствующих новым вершинам. Решение этих систем обеспечивает бигармоничность ломаной в новых вершинах. После переноса в правую часть известных координат старых вершин с соответствующими коэффициентами можно говорить о системе $N_{\text{н}}$ линейных уравнений с $N_{\text{н}}$ неизвестными, имеющей два столбца свободных членов (соответствующих координатам x и y).

Независимость по координатам доказывает применимость бигармонической оптимизации и к неплоским ломаным. При этом количество столбцов свободных членов решаемой системы равно размерности объемлющего пространства.

Оптимизация замкнутой поверхности. В рассмотренном примере ломаной последовательная нумерация вершин играет роль параметра кривой. Это позволяет использовать дискретный дифференциальный оператор для оценки кривизны в вершинах ломаной. Триангулированная кусочно-плоская поверхность (далее просто поверхность) в общем случае лишена криволинейной системы координат, и невозможно явное или неявное применение дискретного дифференциального оператора при интерполяции. Проблема параметризации поверхности может быть решена с помощью алгоритма Кэтмулла — Кларка подразделения поверхности [4] при преобразовании в uv -поверхность. Однако предлагается иной подход к решению задачи оптимизации поверхности, который заключается в формальном обобщении приведённой оптимизации ломаных на случай поверхностей. Альтернативой использования дискретного дифференциального оператора второго порядка для uv -поверхности предлагается дискретный оператор Лапласа на графе для произвольного подразделения симплицальной схемы.

Пусть замкнутая поверхность (поверхность без края) задана описанием симплицальной схемы и координатами вершин. Выбор того или иного подразделения симплицальной схемы определяет элементы матрицы Лапласа Δ . В общем случае граф, соответствующий

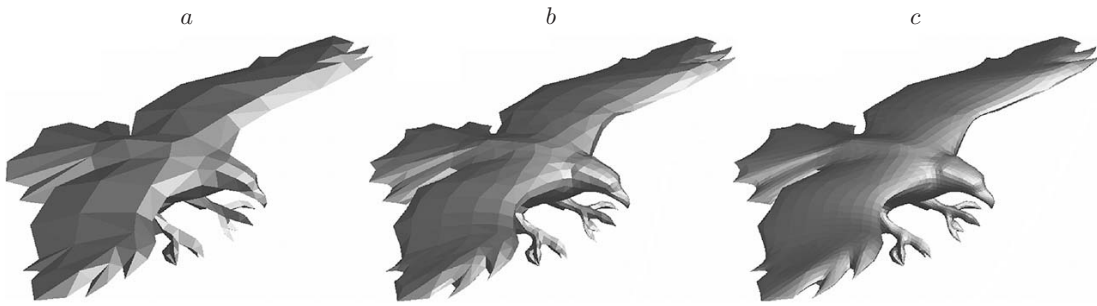


Рис. 3. Поверхности при подразделениях различной степени измельчения: исходная (a) и оптимизированные (b, c)

одномерному остову симплициальной схемы, не является регулярным (в отличие от рассмотренного примера ломаной), поэтому используем следующее определение дискретного оператора Лапласа на графе:

$$(\Delta \mathbf{r})(v) = \sum \{\mathbf{r}(w) \mid \text{вершина } w \text{ смежная с } v\} / \text{deg}(v) - \mathbf{r}(v),$$

где $\text{deg}(v)$ — степень вершины v .

При оптимизации поверхности, как и при оптимизации ломаной, после выбора и построения подразделения симплициальной схемы вычисляются элементы матрицы $\Delta^2 = \Delta \Delta$, формируется и решается система линейных уравнений для определения координат новых вершин — система с тремя или более столбцами свободных членов в зависимости от размерности объемлющего пространства. Тот факт, что матрицу Лапласа определяет одномерный остов подразделения, доказывает независимость метода от размерности симплициальной схемы и применимость его к симплициальным схемам большой (>2) размерности.

На рис. 3 приведены оптимизированные поверхности для различных подразделений симплициальной схемы исходной поверхности. Отметим, что результатом оптимизации поверхности являются триангулированные кусочно-плоские поверхности — сохранена симплициальность подразделений.

Оптимизация поверхности с краем не всегда приводит к желаемому результату, если не обрабатывать вершины края особым образом. Рассмотрим, например, цилиндрическую поверхность (рис. 4, a), имеющую край, каждая компонента связности которого является плоской ломаной. После оптимизации без учёта особенностей края поверхность теряет это свойство (рис. 4, b). Однако при оптимизации края поверхности как ломаной каждая компонента связности оставалась бы плоской.

Для того чтобы при оптимизации поверхности сохранялось указанное свойство, любая поверхность сначала подвергается процедуре распознавания края (рис. 4, c). Ребро поверхности является ребром линии края, если оно инцидентно единственной грани. Вершину поверхности выделяем как вершину края, если она инцидентна ребру края. Если множество вершин края не пусто, то либо предварительно оптимизируем линии края и при оптимизации поверхности полагаем новые вершины края старыми — вершинами с известными координатами, либо решаем общую систему уравнений, построенную с использованием изменённой матрицы Δ . Изменение матрицы Δ касается строк, соответствующих новым вершинам края, и заключается в том, что в их формировании участвуют лишь вершины края.

Приведённые на рис. 4 исходная (d) и оптимизированная (e) поверхности иллюстрируют использование оптимизации при визуальном распознавании объекта.

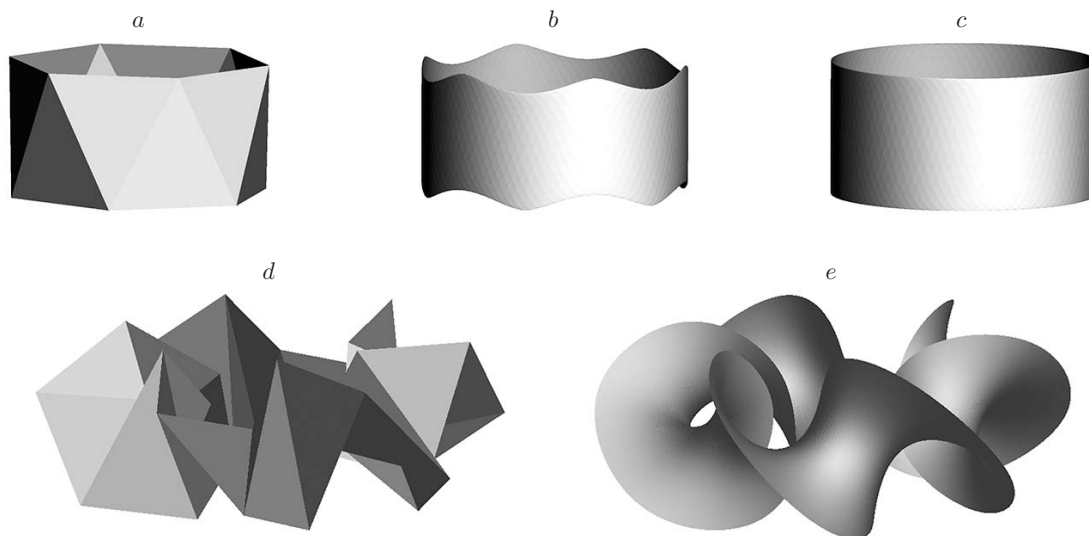


Рис. 4. Поверхности: исходные (*a, d*), оптимизированные без учёта края (*b*) и с учётом края (*c, e*)

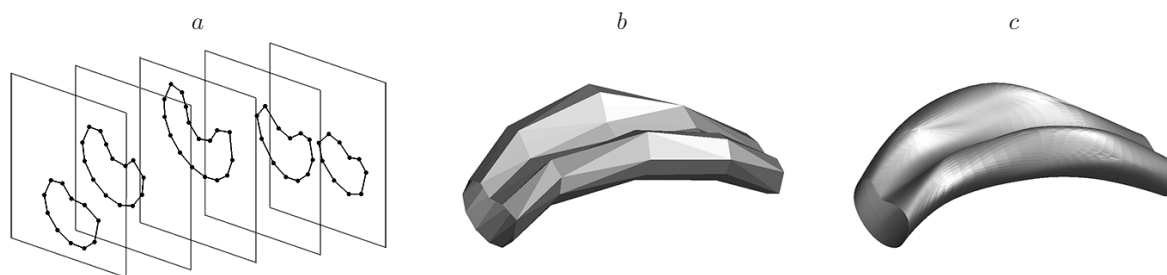


Рис. 5. Построение и оптимизация поверхности: *a* — контуры параллельных разрезов пласта при большом расстоянии между соседними разрезами; *b* — склейка боковых поверхностей призматоеидов, построенных по парам соседних контуров; *c* — оптимизированная поверхность

Актуальность оптимизации можно показать и на примере фрагмента поверхности пласта грунта по данным малоглубинной электроразведки (рис. 5). Построение боковых поверхностей призматоеидов проводилось по методу выпуклых оболочек [5]. Визуальная гладкость изображения поверхности (рис. 5, *c*) достигнута бигармонической оптимизацией, обеспечивающей более детальное описание поверхности.

Заключение. Предлагаемый в работе метод оптимизации отличается простотой и универсальностью и без каких-либо изменений применим к сетям ломаных линий, к поверхностям, имеющим линии самопересечения, например к объединению поверхностей разделения сред, а также к сложным пространствам — склейкам симплицальных комплексов больших и разных размерностей. Метод может быть использован в любой предметной области, где оптимизируемый объект представим в виде геометрической реализации симплицальной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рохлин В. А., Фукс Д. Б.** Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977. 488 с.

2. **Яковлев Е. И.** Вычислительная топология: Учебник. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2003. 198 с. URL: <http://find-book.org/reader?file=444412> (дата обращения: 31.03.2014).
3. **Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.
4. **Catmull E., Clark J.** Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes // Computer-Aided Design. 1978. **10**, N 6. P. 350–355.
5. **Смурыгин А. В., Журбин И. В.** Комбинированный метод выпуклых оболочек восстановления многогранника по заданным плоским сечениям // Геоинформатика. 2012. № 1. С. 64–67.

Поступила в редакцию 31 марта 2014 г.
