

УДК 519.876.5

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ОПЕРАЦИЙ В СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ СРЕДАХ

Я. А. Мостовой

*Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С. П. Королёва,  
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34  
E-mail: jakob.mostovoi@yandex.ru*

Рассматривается статистическое моделирование распределённых совокупностей объектов, связанных в большую сеть и образующих операционную среду. Моделирование осуществляется на квадратных матрицах со случайным заполнением с привлечением методов теории перколяции. Анализируются статистические особенности возникающих при этом кластеров объектов. Наряду с известной стохастической перколяцией вводится понятие управляемой перколяции операционной среды, которая реализуется в две фазы: на первой создаётся стохастическая основа с относительно небольшой концентрацией объектов, а на второй в межкластерные интервалы вводятся дополнительные объекты в целях получения кратчайшего перколяционного пути при минимизации общих затрат на подобную двухфазную операцию. С этих позиций рассматривается планирование навигационного обеспечения подвижных объектов по визуальным наземным ориентирам, случайным образом распределённым в операционной среде.

*Ключевые слова:* статистическое моделирование, большие сети, кластеры объектов, порог перколяции, управляемая перколяция, навигация по визуальным ориентирам.

**Введение.** Множество практических задач приводит к исследованию прохождения потока информации, энергии или материи через случайную операционную среду. Дискретная модель этой среды может быть представлена в виде большой сети связанных между собой узлов, каждый из которых с определённой вероятностью обладает заданными свойствами.

Большая квадратная матрица со случайным заполнением может служить моделью случайной операционной среды большой сети: либо информационно-вычислительной, либо сети обслуживания, либо социальной.

В работах [1–3] рассматривалась концепция получения информации дистанционного зондирования земли из космоса одновременно большим количеством простых сверхмалых спутников — наноспутников, существующих на орбите и объединённых в большую сеть для решения задачи глобального дистанционного зондирования распределённым образом. Подобные наноспутники не имеют двигательной установки, не обладают возможностью управления движением центра масс и с течением времени под действием возмущений образуют случайную операционную среду.

В [4] рассматриваются большие компьютерные сети, в которых хорошо защищённые узлы образуют кластеры «островков безопасности». Статистическое моделирование на матрицах со случайным заполнением позволяет и в этом случае оценить необходимую среднюю концентрацию защищённых узлов для оптимальной прокладки безопасных путей передачи сообщений.

В предлагаемой работе методы статистического моделирования оптимальных двухфазных операций развиваются применительно к планированию навигационного обеспечения подвижных объектов по визуальным ориентирам, распределённым случайным образом

в операционной среде в случаях, когда GPS-сигнал недоступен в силу различных обстоятельств.

**Некоторые статистические особенности образования кластеров объектов в больших сетях и методы их исследования.** В обычной постановке теория перколяции рассматривает решётку из узлов и связей или квадратную матрицу с числом строк  $L$ , случайная часть ячеек которой чёрная, проводящая поток (содержащая заданный объект), а остальные ячейки белые, не проводящие поток (не содержащие заданный объект). Соприкасающиеся рёбрами чёрные ячейки создают случайные проводящие кластеры, которые растут вместе с концентрацией чёрных ячеек. Необходимо найти концентрацию чёрных ячеек — концентрацию порога перколяции (КПП), при которой стохастически образуется сквозной путь по чёрным ячейкам через всю матрицу в заданном направлении — путь перколяции.

При этом концентрация  $K$  — относительная доля чёрных ячеек при случайном заполнении матрицы — является вероятностью появления чёрной ячейки [5, 6] при равномерном распределении вероятности их появления по матрице. Поэтому здесь и далее наряду с выражением «вероятность наличия объекта в ячейке матрицы» употребляется более краткий термин «концентрация».

Теория перколяции позволяет определить порог перколяции и имеет много точных аналитических результатов, но основной используемый ею метод — численное статистическое моделирование на решётках, матрицах или деревьях [5–7].

Статистическим моделированием на таких квадратных матрицах можно обнаружить и исследовать несколько статистических особенностей образующихся кластеров, имеющих практическое значение. Первая особенность — наличие порога стохастической перколяции как «пробоя» матрицы проводящим перколяционным кластером (ПК) — описана в [5, 6]. Вторая особенность, рассмотренная в [1, 2, 4], — наличие значения концентрации объектов, при котором среднее число образовавшихся кластеров имеет максимум.

Применительно к решаемым практическим задачам использование порога стохастической перколяции для определения требуемого числа объектов в сети для реализации факта пробоя приводит к их избыточному количеству. При этом стохастический ПК получается «рыхлым и ветвистым» с большим количеством «мёртвых» ветвей.

Поэтому в [2–4] рассмотрены двухфазные операции в больших сетях. На первой фазе создаётся стохастическая основа из распределённых случайным образом объектов при значениях их концентрации гораздо ниже порога стохастической перколяции, а на второй фазе обеспечивается «управляемая» перколяция за счёт внедрения (установки) дополнительных объектов в имеющиеся межкластерные интервалы. При этом концентрация стохастической основы выбирается таким образом, что суммарные затраты на двухфазную операцию минимизируются. В результате концентрация объектов при управляемой перколяции становится в 2 раза меньше порога стохастической перколяции и находится в окрестности концентрации, характерной для среднего максимального числа образующихся кластеров.

В данной работе рассматривается также средняя длина пути управляемой перколяции  $L(K)$ , которая растёт вплоть до порога стохастической перколяции, после чего начинает уменьшаться. Наличие максимума средней длины пути управляемой перколяции, связанное с ростом его извилистости, является третьей статистической особенностью при моделировании процесса образования случайных кластеров объектов, образующих большую сеть. Средняя длина пути управляемой перколяции участвует в формировании оптимального значения концентрации стохастической основы в двухфазных операциях.

Предлагаемый подход к статистическому моделированию случайных операционных сред (больших сетей) состоит из ряда последовательных этапов, повторяющихся для каждой из матриц со случайным заполнением и для каждого значения концентрации:

- заполнение матрицы объектами случайным образом в соответствии с заданным законом распределения вероятностей и значением концентрации;
- выделение и анализ образующихся кластеров объектов;
- вычисление по выделенным кластерам характеристик распределения их размеров, межкластерных интервалов и т. п.;
- анализ интервалов между стохастически образованными кластерами и прокладка кратчайшего пути искусственной перколяции с определением среднего его значения по матрице.

**Результаты статистического моделирования случайных операционных сред и двухфазных операций на них.** Нами рассматривались несколько тысяч матриц различных размеров, ячейки которых заполнялись случайным образом с учётом равномерного распределения объектов по ячейкам. В [1, 2] описаны и модальные законы распределения объектов по ячейкам матрицы. По полученным случайным матрицам были распознаны алгоритмом Хошена — Кошпельмана [5–7] все кластеры, определены их статистические характеристики и построены графики для их средних значений.

Зависимости среднего количества образовавшихся кластеров на матрице от вероятности наличия объекта в ячейке  $K$  отражены на рис. 1. По мере увеличения этой вероятности до значения  $\sim 0,25$  матрица заполняется объектами и количество кластеров растёт. При дальнейшем увеличении концентрации кластеры начинают сливаться, их среднее количество падает, а размеры растут.

На рис. 1 по вертикальной оси отложено среднее число образовавшихся кластеров, а по горизонтальной — вероятность нахождения объекта в ячейке. Физические соображения подсказывают, что количество кластеров, образовавшихся на матрице при определённой концентрации, зависит от числа ячеек матрицы  $L^2$ . Длины путей на матрице зависят от линейного размера матрицы  $L$ . Таким образом, от влияния размеров матрицы на численные результаты статистического моделирования можно избавиться, если результаты нормировать путём их деления соответственно на  $L$  или  $L^2$ . Рассмотренные результаты позволяют оценивать порог стохастической перколяции средним значением  $0,59$  [6], что даёт среднее число объектов в перколяционном кластере равное  $N_{ПК} = 0,59L^2$ .

Однако такое количество объектов будет явно избыточным для решения практических задач, так как структура ПК ветвиста и рыхла [5–7].

Снижения необходимой концентрации объектов и, следовательно, их количества для реализации перколяции зоны обслуживания можно достичь, если использовать вместо

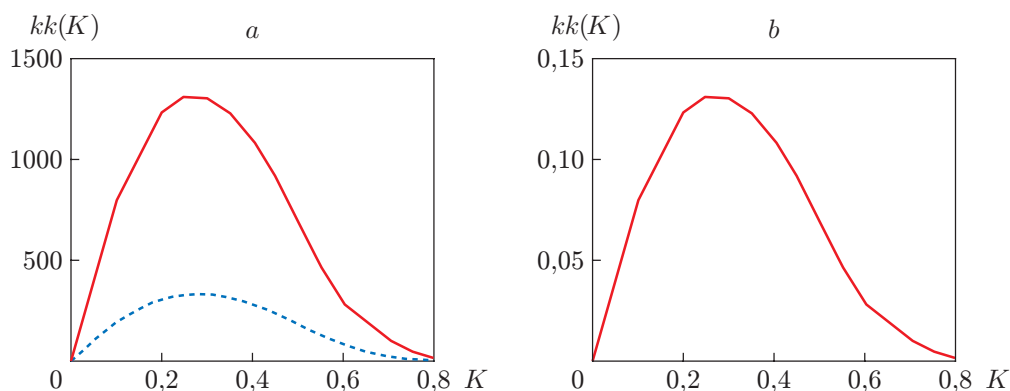


Рис. 1. Зависимости среднего количества кластеров от вероятности наличия объекта в ячейке: *a* — для матриц размера  $50 \times 50$  (пунктирная кривая) и  $100 \times 100$  (сплошная кривая); *b* — нормированная по площади матрицы

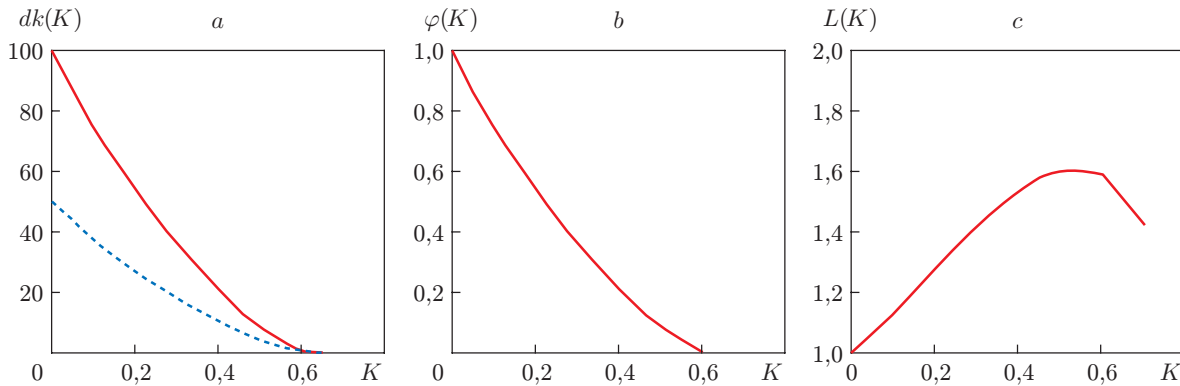


Рис. 2. Зависимости среднего числа добавленных объектов  $\varphi(K)$  и средней нормированной длины пути управляемой перколяции  $L(K)$  от вероятности наличия объекта в ячейке  $K$

классической стохастической перколяции предложенную управляемую перколяцию с применением оптимальной двухфазной операции.

Учитывая различную стоимость объектов первого рода, распределённых случайным образом и образующих стохастическую основу, и объектов второго рода, внедряемых в определённые места зоны обслуживания для достижения программируемой управляемой перколяции с минимальной длиной пути, можно найти концентрацию объектов стохастической основы, при которой общие расходы на создание пути управляемой перколяции будут иметь минимум.

При этом можно полагать, что во всех приложениях данной теории каждый из объектов стохастической основы дешевле объекта, внедряемого в определённое место матрицы операционной среды, благодаря наличию у последнего средств управления, позволяющих установить его в требуемый межкластерный интервал, и стоимости самой операции внедрения объекта в конкретное место операционной среды.

Нами был разработан алгоритм и проведено статистическое моделирование второй фазы подобной двухфазной операции. На рис. 2 приведены обработанные результаты этого моделирования: среднее число добавленных объектов для получения управляемой перколяции при различных значениях концентрации объектов стохастической основы и для матриц различных размеров. На рис. 2, а по вертикальной оси отложено среднее число добавленных объектов для матриц размером  $50 \times 50$  (пунктирная кривая) и  $100 \times 100$  (сплошная). На рис. 2, б данные зависимости нормированы по размеру матрицы (после чего графики совпали). Средняя длина нормированного по размеру матрицы пути управляемой перколяции показана на рис. 2, с.

На рис. 3 представлено несколько реализаций случайных матриц для различных значений вероятности  $K$  наличия объекта в ячейке. На рисунках чёрным отмечены ячейки, в которых содержится объект. Соприкасающиеся рёбрами чёрные ячейки образуют кластеры рассматриваемых объектов. Здесь также отмечены кратчайшие пути управляемой перколяции, проходящие через стохастически образовавшиеся кластеры и реализованные путём добавления минимального количества объектов в межкластерные интервалы. Виден рост извилистости пути управляемой перколяции с увеличением концентрации — вероятности нахождения объекта в ячейке матрицы  $K$ .

**Оптимальные двухфазные операции в случайной навигационной среде — сети наземных ориентиров.** Навигация подвижных объектов в настоящее время часто реализуется с использованием сигналов спутниковых навигационных систем. Однако есть необходимость в резервной системе навигации, которая позволит подвижному объекту, например беспилотному летательному аппарату (БЛА), ориентироваться на местности,

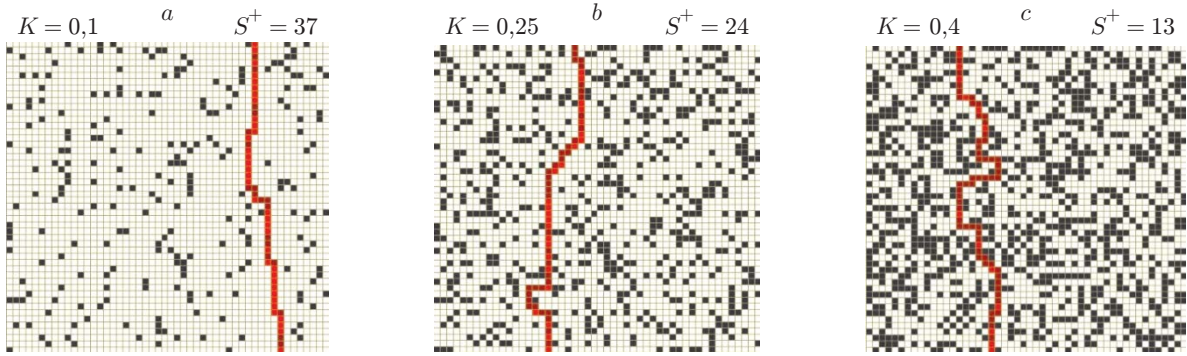


Рис. 3. Визуализация кластеров и кратчайшего пути управляемой перколяции на случайных матрицах размером  $50 \times 50$  при указанных концентрациях  $K$ . Число добавленных объектов  $S^+$  (красные ячейки) относится к кратчайшему пути управляемой перколяции

когда GPS-сигнал недоступен в силу различных обстоятельств. В [8] приведено описание системы навигации для БЛА, работающей по наземным ориентирам. Наличие рассматриваемой системы позволяет БЛА вернуться домой или долететь до цели, пользуясь только визуальными ориентирами на земле.

Перелёт между смежными ориентирами может осуществляться БЛА на автономной инерциальной системе управления, например, с приборным и алгоритмическим составом, приведённым в [9]. Точность выдерживания траекторных параметров этой системой управления и определяет необходимый шаг размещения ориентиров — размер ячейки матрицы как модели операционной среды. Подготовка операционной среды для навигации по наземным ориентирам связана с заблаговременным выбором их количества и размещения — создания базовой системы ориентиров, поскольку конкретный маршрут в операционной среде заранее не известен и определяется оперативно. При этом для конкретного маршрута необходимо при планировании операции формирование ориентиров, дополнительных к базовым. Очевидно, что их число должно быть минимальным. Данная задача может быть решена с помощью предложенного аппарата статистического моделирования.

При постановке навигационной задачи базовая система ориентиров рассматривается на матрице со случайным заполнением с определённой в соответствии с приведёнными материалами вероятностью наличия ориентира в ячейке равной 0,25.

Обозначим стоимость подготовки каждого из распределённых случайным образом базовых ориентиров (объектов)  $\alpha$ , а стоимость одного дополнительного ориентира, выбираемого (подготавливаемого) в определённом месте операционной среды на второй фазе  $\theta(K)$ . Тогда суммарную стоимость двухфазной операции  $P$  [3] запишем как

$$P = \alpha KL^2 + \theta(K)\varphi(K)L, \quad \theta(K) = \theta_0\varphi(K)L/L(k), \quad (1)$$

$$P = \alpha KL^2 + \theta_0\varphi(K)^2L^2/L(K). \quad (2)$$

В общем случае  $\theta_0 \geq \alpha$ . Рассмотрим относительную стоимость двухфазной операции, для чего разделим левую и правую части полученного уравнения (2) на  $P_0 = \alpha K\varphi(K)L^2$  — стоимость чисто стохастической однофазной операции:

$$P_{\text{отн}} = P/P_0 = 1,7K + 1,7(\theta_0\varphi(K)^2)/(\alpha L(K)) = 1,7(K + R\varphi(K)^2/L(K)),$$

где  $R = \theta_0/\alpha$  — отношение стоимости дополняющего объекта к стоимости объекта стохастической основы.

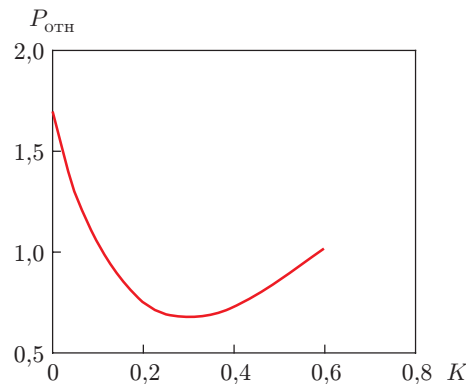


Рис. 4. Зависимость относительных затрат на проведение двухфазной операции от концентрации объектов стохастической основы

Полученная по данному выражению с учётом зависимостей  $\varphi(K)$  и  $L(K)$ , приведённых на рис. 2, зависимость относительной стоимости двухфазной операции от концентрации стохастической основы  $K$  приведена на рис. 4 для  $R = 1$ . Анализ рисунка показывает, что при реализации двухфазных операций оптимальное значение вероятности наличия объекта-ориентира в ячейке стохастической основы с точки зрения минимизации общих затрат составляет  $\sim 0,3$ , что в 2 раза меньше, чем для чисто стохастической однофазной операции. Представленные выше результаты получены при равномерном распределении вероятности нахождения объекта в ячейке по операционной среде — матрице. Однако приведённые в [1, 2] результаты статистического моделирования больших сетей при модальных распределениях вероятностей нахождения объектов в ячейке по матрице показывают, что все рассмотренные статистические особенности справедливы и в этих случаях.

**Заключение.** Наряду с исследованным в теории перколяции явлением порога стохастической перколяции имеются два других особенных значения вероятности нахождения объекта в ячейке матрицы, имитирующей случайную операционную среду: значение вероятности максимальной кластеризации и значение вероятности, при которой средняя кратчайшая длина пути управляемой перколяции имеет максимум.

При моделировании операционных случайных сред на матрицах со случайным заполнением предложено понятие управляемой перколяции и рассмотрены двухфазные операции на больших сетях — операционных средах. При этом разработан алгоритм, обеспечивающий кратчайший путь управляемой перколяции в заданном направлении.

Рассмотрено создание операционной среды в результате двухфазной операции для системы навигации БЛА по наземным визуальным ориентирам в случаях, когда GPS-сигнал недоступен в силу различных обстоятельств. При планировании оптимальной двухфазной операции число требуемых ориентиров в 2 раза меньше числа ориентиров, обеспечивающих стохастическую перколяцию в заданной зоне обслуживания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мостовой Я. А. Статистические феномены больших распределённых кластеров наноспутников // Вестн. СГАУ. 2011. № 2(26). С. 80–90.
2. Мостовой Я. А. Двухфазные операции в больших сетях наноспутников // Компьютерная оптика. 2013. 37, № 1. С. 120–130.
3. Мостовой Я. А. Управляемая перколяция и оптимальные двухфазные операции в больших сетях наноспутников // Вестн. СГАУ. 2014. № 1(43). С. 253–266.

4. **Мостовой Я. А.** Управляемая перколяция в больших сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2013. **11**, № 1. С. 53–62.
5. **Ландэ Д. В., Снарский А. А., Безсуднов И. В.** Интернетика. Навигация в сложных сетях. Модели и алгоритмы. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 264 с.
6. **Тарасевич Ю. Ю.** Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учеб. пособие. М.: УРСС, 2002. 109 с.
7. **Москалев П. В., Шитов В. В.** Математическое моделирование пористых структур. М.: Физматлит, 2007. 120 с.
8. **Система** навигации БЛА по наземным визуальным ориентирам // Беспилотная авиация / Интервью. URL: [http://uav.ru/s\\_porov.php](http://uav.ru/s_porov.php) (дата обращения: 12.09.2014).
9. **Белоконь С. А., Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю. и др.** Использование фильтра Калмана в системе управления траекторным движением квадрокоптера // Автометрия. 2013. **49**, № 6. С. 14–24.

*Поступила в редакцию 12 сентября 2014 г.*

---