

## ОПТИЧЕСКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 535.411.854

### КВАЗИГЕТЕРОДИННЫЙ МЕТОД ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ\*

**В. И. Гужов, С. П. Ильиных, И. А. Сажин, Е. Н. Денежкин,  
Е. С. Кабак, Д. С. Хайдуков**

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: vig@edu.nstu.ru*

Предложен метод измерения разности фаз двух интерферирующих волновых фронтов на основе анализа траекторий, образованных значениями интенсивности пар точек в серии интерферограмм с различными фазовыми сдвигами. В данном методе не требуется априорного знания фактических значений фазовых сдвигов.

*Ключевые слова:* интерферометрия, пошаговый фазовый сдвиг.

**Введение.** При анализе интерференционных картин методом пошагового фазового сдвига [1–5] неточное задание величины внесённых фазовых сдвигов приводит к возникновению ошибки измерения разности фаз между предметным и опорным волновыми фронтами. Поэтому в настоящее время большое внимание уделяется анализу погрешностей измерений, обусловленных неточностью задания фазовых сдвигов [6–11]. Существует два основных подхода к решению этой проблемы. Первый подход требует калибровки устройства внесения фазовых сдвигов [11], что приводит к усложнению интерферометрической системы. Второй подход использует самокалибрующиеся алгоритмы измерения набега фаз интерферограмм, однако при этом значительно снижается эффективность вычислительных алгоритмов [10–12].

Целью предлагаемой работы является создание метода измерения набега фаз, который не требует априорных сведений о параметрах вносимых фазовых сдвигов. Суть метода заключается в измерении разности фаз между произвольно выбираемой опорной точкой и пространственными точками интерферограммы (набег фазы). На рис. 1 точка  $A$  — опорная, относительно неё вычисляется набег фазы в точке  $B$ . Все остальные значения набега фаз в других точках интерферограммы измеряются относительно той же опорной точки. Выбор той или иной опорной точки влияет на постоянное смещение набега фазы во всех точках интерферограммы, которое не является принципиальным при измерении разности фаз интерферирующих волновых фронтов.

Предлагаемый подход основан на принципах известных методов гетеродинирования [13] (в нашем случае реализуемых алгоритмически) и получил название квазигетеродинного.

**Математическое описание метода.** Уравнение поля яркости в каждой точке интерферограммы  $I(x, y)$  при различных величинах вносимых фазовых сдвигов можно представить в виде

$$I_i(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \delta_i], \quad (1)$$

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-01100).

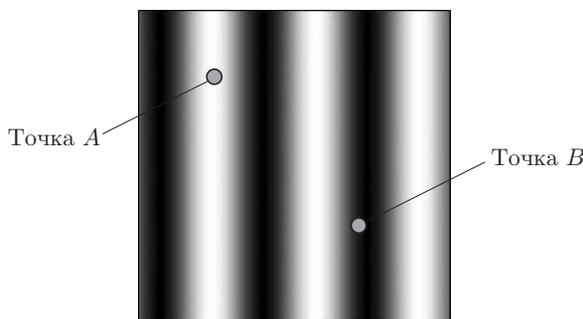


Рис. 1. Опорная и произвольная точки на интерферограмме, между которыми вычисляется набег фазы

где  $a(x, y)$  — средняя яркость;  $b(x, y)$  — амплитуда интерференционных полос;  $\phi(x, y)$  — разность фаз интерферирующих волновых фронтов;  $\delta_i$  —  $i$ -й фазовый сдвиг;  $i = 0, 1, \dots, N$  ( $N$  — количество фазовых шагов). В уравнении (1) предполагается, что фазовый сдвиг одинаковый по всему полю интерферограммы [3].

Если взять две произвольные точки на интерферограмме с координатами  $(x_A, y_A)$  и  $(x_B, y_B)$ , то при пяти фазовых сдвигах получим систему из десяти уравнений вида (1) с десятью неизвестными [12, 13].

Для упрощения изложения изменим обозначения яркости точек в системе уравнений (1). Обозначим яркости  $I_1(x_A, y_A), \dots, I_5(x_A, y_A)$  и  $I_1(x_B, y_B), \dots, I_5(x_B, y_B)$  как  $x_1, \dots, x_5$  и  $y_1, \dots, y_5$  соответственно, а уровни средней яркости в точках  $(x_A, y_A)$  и  $(x_B, y_B)$  — как  $x_0$  и  $y_0$ . С учётом принятых обозначений система уравнений (1) примет следующий вид:

$$x_i = x_0 + b_1 \cos(\phi_1 + \delta_i); \quad y_i = y_0 + b_2 \cos(\phi_2 + \delta_i), \quad i \in [0, 1, \dots, 4]. \quad (2)$$

Отсюда можно однозначно определить набег фаз между двумя произвольно выбранными точками интерференционной картины. Решение системы уравнений (2) — достаточно сложная задача, поскольку является трансцендентной. Однако заметим, что данная система может быть представлена уравнением эллипса [10]. Это позволяет упростить решение.

Для наглядности отобразим координаты точек  $(x, y)$  на плоскости (рис. 2). Первый фазовый сдвиг без ограничения общности примем равным нулю ( $\delta_0 = 0$ ). Если выполняется условие  $\delta_0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_N$ , то первая точка переходит в положение второй точки, затем в третье положение и т. д. — происходит поступательное движение точки по эллиптической траектории. Очевидно, что при произвольных величинах фазовых сдвигов движение точки имеет хаотический характер. В этом случае анализ поведения траектории и вычисление её параметров будут затруднены. Предложим следующий способ решения данной проблемы: ранжирование точек по разности углов векторов, образованных разностью координат каждой из точек и координат условного центра траектории, который в простейшем случае может быть получен путём усреднения координат всех точек.

Отметим, что любая точка на плоскости, удовлетворяющая системе уравнений (2), принадлежит некоторому эллипсу. Тогда (2) перепишем в виде

$$x_i = x_0 + b_1 \cos(\delta_i); \quad y_i = y_0 + b_2 \cos(\delta_i + \phi_2 - \phi_1), \quad (3)$$

где  $\phi_2 - \phi_1$  — набег фазы в двух различных точках интерферограммы.

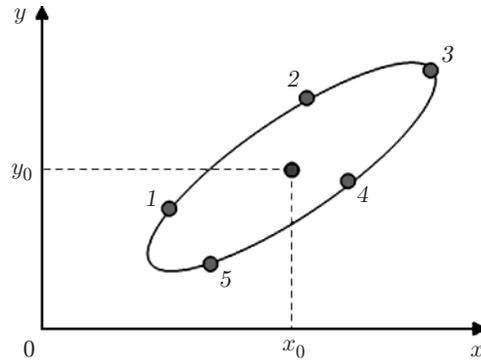


Рис. 2. Положения точек интенсивностей на плоскости при различных вносимых фазовых сдвигах

Уравнение эллипса, соответствующее системе (3), имеет вид

$$\frac{(x_i - x_0)^2}{b_1^2} + \frac{(y_i - y_0)^2}{b_2^2} - 2 \frac{(x_i - x_0)(y_i - y_0)}{b_1 b_2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1). \quad (4)$$

Однако прямое нахождение коэффициентов уравнения (4) сложно, так как необходимо определять неизвестные параметры средних яркостей и амплитуд или их оценки [14]. С другой стороны, общее уравнение эллипса может быть представлено как [15]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (5)$$

где  $a_{ij}$  — коэффициенты уравнения второго порядка, описывающие эллипс.

Учитывая инвариантность старших коэффициентов уравнения (5) к плоскопараллельному переносу эллипса, получим косинус разности фаз  $\phi_2 - \phi_1$  из его старших коэффициентов:

$$a_{11} = \frac{1}{b_1^2}; \quad a_{12} = \frac{1}{b_1 b_2} \cos(\phi_2 - \phi_1); \quad a_{22} = \frac{1}{b_2^2}. \quad (6)$$

Определение перечисленных коэффициентов уравнения (6) с использованием пучка кривых второго порядка представлено на рис. 3.

Пучок кривых второго порядка можно образовать из комбинаций произведений кривых первого порядка (прямых линий) [16]:

$$f_1(x, y)f_2(x, y) = \alpha f_3(x, y)f_4(x, y). \quad (7)$$

Здесь  $f_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i$  — уравнение  $i$ -й прямой линии, а  $\alpha$  выбирается так, чтобы взятая из пучка кривая проходила через свободную точку 3 на рис. 4.

Тогда для точек, указанных на рис. 4, имеем следующие коэффициенты уравнений прямых:

$$\begin{aligned} A_1 &= y_2 - y_1, & B_1 &= x_1 - x_2, & C_1 &= x_2 y_1 - x_1 y_2; \\ A_2 &= y_5 - y_4, & B_2 &= x_4 - x_5, & C_2 &= x_5 y_4 - x_4 y_5; \\ A_3 &= y_5 - y_1, & B_3 &= x_1 - x_5, & C_3 &= x_5 y_1 - x_1 y_5; \\ A_4 &= y_4 - y_2, & B_4 &= x_2 - x_4, & C_4 &= x_4 y_2 - x_2 y_4; \end{aligned}$$

$$\alpha = -(A_1 x_3 + B_1 y_3 + C_1)(A_2 x_3 + B_2 y_3 + C_2) / [(A_3 x_3 + B_3 y_3 + C_3)(A_4 x_3 + B_4 y_3 + C_4)].$$

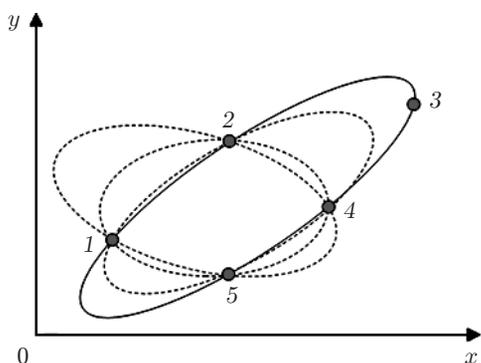


Рис. 3. Пучок кривых, используемый для определения коэффициентов эллипса

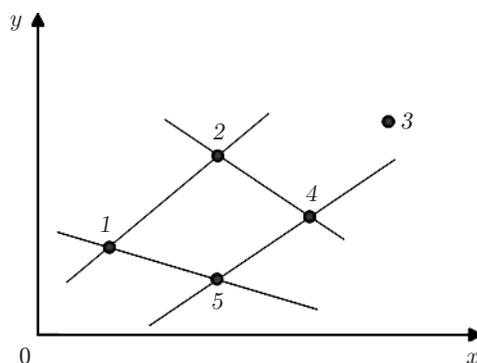


Рис. 4. Порядок соединения точек, образующих пучок кривых

Подставляя найденные коэффициенты в выражение (7), запишем требуемые коэффициенты уравнения эллипса:

$$a_{11} = A_1 A_2 + \alpha A_3 A_4; \quad a_{12} = \frac{1}{2}[A_1 B_2 + A_2 B_1 + \alpha(A_3 B_4 + A_4 B_3)]; \quad (8)$$

$$a_{22} = B_1 B_2 + \alpha B_3 B_4.$$

Далее, из коэффициентов эллипса (7) получаем набег фаз  $\Delta\phi$ :

$$\cos(\Delta\phi) = -\frac{a_{12}}{\sqrt{|a_{11}|}\sqrt{|a_{22}|}}, \quad (9)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \arccos\left(-\frac{a_{12}}{\sqrt{|a_{11}|}\sqrt{|a_{22}|}}\right). \quad (10)$$

Функция  $\arccos$  определена в пределах от 0 до  $\pi$ , однако можно расширить диапазон измерения до  $2\pi$ , найдя значение поправочного коэффициента  $k$ :

$$\Delta\phi = \Delta\phi + k\pi. \quad (11)$$

Это можно сделать, отслеживая ориентацию главной оси эллипса и направление изменения траектории движения точки относительно нулевого фазового сдвига при различных величинах фазовых сдвигов (см. рис. 2). На рис. 5 показаны траектории точки на комплексной плоскости, полученные при непрерывном изменении фазового сдвига для различных значений начальной разности фаз  $\Delta\phi$ . Из рисунка следует, что направление перемещения точки изменяется, если начальная разность фаз превышает  $\pi$ . Таким образом, определяя направление движения точки, расширяем диапазон измерения разности фаз до  $2\pi$ . Установить направление перемещения (по или против часовой стрелки) можно, вычисляя знак

векторного произведения векторов:  $V_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $V_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}$ , тогда знак направления движения находится по формуле

$$S = \text{sign}\left(\sum S_i/N\right), \quad (12)$$

где  $S_i = \text{sign}(V_i \times V_{i+1})$ .

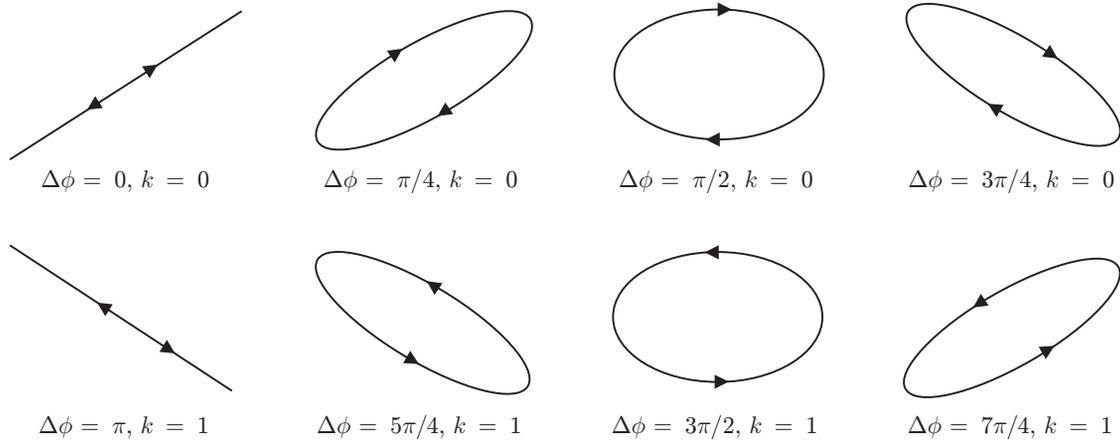


Рис. 5. Траектории точки на плоскости в зависимости от начальной разности фаз

**Экспериментальные результаты.** Экспериментальная проверка метода осуществлялась путём измерения набега фаз серии из пяти интерферограмм с различными фазовыми сдвигами (рис. 6).

Поскольку коэффициенты уравнения эллипса  $a_{ij}$  находятся с некоторой погрешностью, возникают сбойные точки (рис. 7), в которых значения косинуса, определяемые по формуле (10) (см. рис. 6, *b*), могут быть по модулю больше единицы.

На рис. 8 показаны результаты измерения набега фаз в одном из сечений интерферограмм с заданными фазовыми сдвигами  $\delta \in [0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3]$  (см. рис. 6, *a*) по предлагаемому (квазигетеродинному) и известному [1] алгоритмам. На рисунке видно, что при измерении набега фаз по алгоритму [1] наблюдается волнистость профиля фазы интерференционных полос (кривая 1), обусловленная неточностью задания фазовых сдвигов. Профиль фазы этих же полос при измерении набега фаз по предлагаемому алгоритму (кривая 2) менее подвержен данному эффекту. Для дальнейшего подавления этого эффекта можно изменить опорную точку и повторить вычисления.

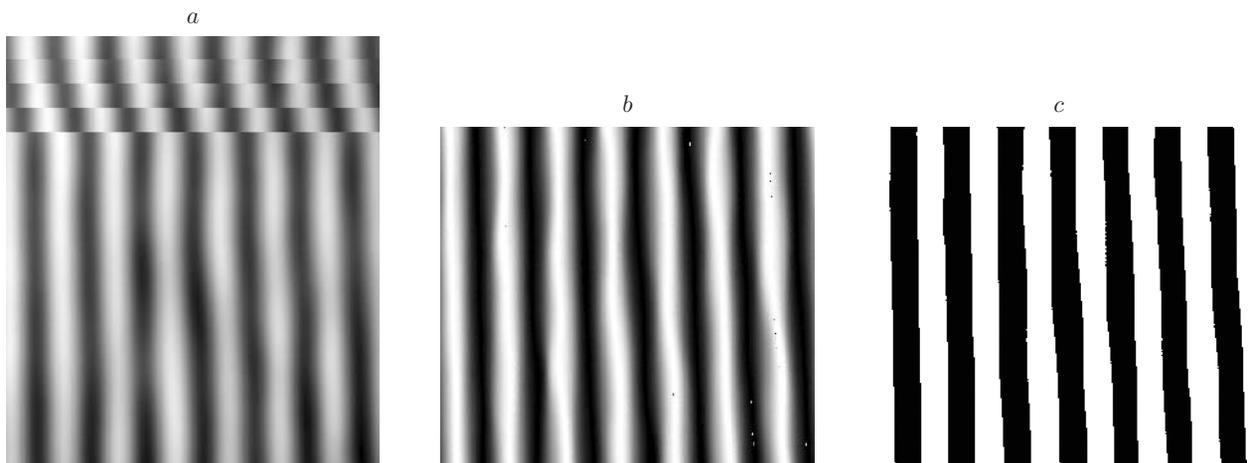


Рис. 6. Этапы определения направления движения точек: *a* — пять интерферограмм с различными фазовыми сдвигами; *b* — косинус разности фаз, вычисленный по предложенному алгоритму; *c* — направление движения точек (вращения их радиусов-векторов) при внесении фазовых сдвигов (светлые участки — направление вращения по часовой стрелке, тёмные — против часовой стрелки)

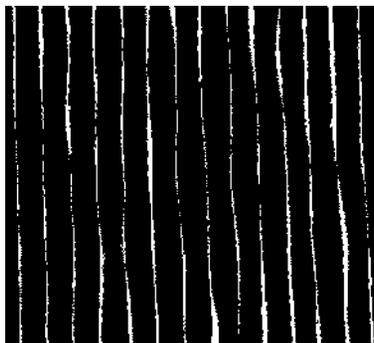


Рис. 7. Области сбойных точек (светлые участки)

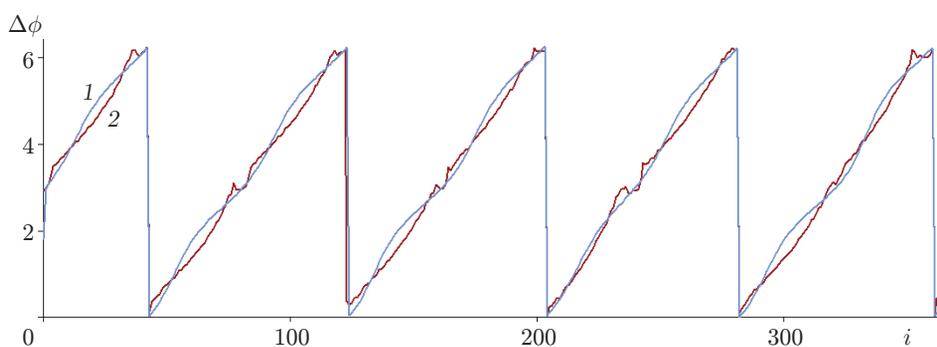


Рис. 8. Сравнение результатов измерения набега фаз по алгоритму [1] (кривая 1) и квазигетеродинному (2)

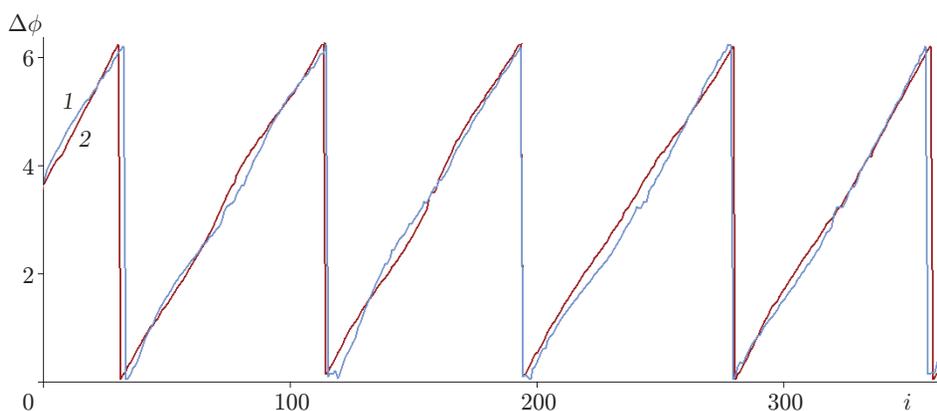


Рис. 9. Усреднение результатов измерения набега фаз по строке

На рис. 9 показано сравнение результатов измерения набега фаз с одной опорной точкой (кривая 1) и с усреднением по строке, когда опорная точка пробегает все значения по строке, а результаты усредняются (кривая 2).

Полученная максимальная погрешность определения набега фаз  $\Delta\phi$  по предложенному алгоритму составила 0,006 рад при усреднении по 256 строкам.

**Заключение.** В данной работе предложен метод определения набега фаз в двух произвольных точках интерферограммы. Зафиксировав одну из точек, можно найти распределение поля фазовых разностей интерферирующих волновых фронтов по всему полю интерферограммы. Этот метод позволяет использовать измерительные системы с априорно неизвестными или случайными вносимыми фазовыми сдвигами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Guzhov V., Ilinykh S., Kuznetsov R., Haydukov D.** Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry // Opt. Eng. 2013. **52**, N 3. 030501.
2. **Гужов В. И., Ильиных С. П., Хайдуков Д. С., Вагизов А. Р.** Универсальный алгоритм расшифровки // Науч. вестн. НГТУ. 2010. № 4(41). С. 51–58.
3. **Wyant J. C., Creath K.** Recent advances in interferometric optical testing // Laser Focus. 1985. **21**, N 11. P. 118–132.
4. **Wyant J. C.** Interferometric optical metrology: basic principles and new systems // Laser Focus. 1982. **18**, N 5. P. 65–67.
5. **Creath K.** Phase-shifting speckle interferometry // Appl. Opt. 1985. **24**, N 18. P. 3053–3058.
6. **Greivenkamp J. E., Bruning J. H.** Phase shifting interferometry // Optical Shop Testing /Ed. D. Malacara. N. Y.: Wiley, 1992. Ch. 14. P. 501–598.
7. **De Groot P.** Phase-shift calibration errors in interferometers with spherical Fizeau cavities // Appl. Opt. 1994. **34**, N 16. P. 2856–2863.
8. **De Groot P.** 101-frame algorithm for phase shifting interferometry // Proc. SPIE. 1997. **3098**. P. 283–292.
9. **Millerd J., Brock N., Hayes J. et al.** Modern approaches in phase measuring metrology // Proc. SPIE. 2004. **5856**. P. 14–22.
10. **Gao P., Yao B., Lindlein N. et al.** Phase-shift extraction for generalized phase-shifting interferometry // Opt. Lett. 2009. **34**, N 22. P. 3553–3555.
11. **Гужов В. И., Ильиных С. П., Хайдуков Д. С., Вагизов А. Р.** Устранение ошибок фазового сдвига в интерферометрии // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 96–101.
12. **Гужов В. И., Ильиных С. П.** Развитие методов анализа в фазосдвигающей интерферометрии // Междунар. науч. конф. «СибОптика-2013». Новосибирск: СГГА, 2013. С. 3–6.
13. **Teleshevskii V. I., Grishin S. G.** A heterodyne laser interferometer with digital phase conversion // Measur. Techn. 2006. **49**, N 6. P. 526–529.
14. **Schmit J., Creath K.** Extended averaging technique for derivation of error-compensating algorithms in phase-shifting interferometry // Appl. Opt. 1995. **34**, N 19. P. 3610–3619.
15. **Kimbrough B., Brock N., Millerd J.** Dynamic surface roughness profiler // Proc. SPIE. 2011. **8126**. 81260H.
16. **Korn G. A., Korn T. M.** Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference. N. Y.: Dover, 2000. 1130 p.

*Поступила в редакцию 21 апреля 2014 г.*

---