

УДК 621.391.63-503.57 : 519.237.5

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ПРИВОДОВ ДЛЯ КВАДРАТНЫХ ЗЕРКАЛ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Д. М. Ляхов

*Научно-исследовательский институт «Научно-производственное объединение "ЛУЧ"»,
142100, г. Подольск Московской обл., ул. Железнодорожная, 24
E-mail: LDM@luch.podolsk.ru*

Показано, что задачу оптимального расположения приводов для адаптивных квадратных зеркал можно свести к аналитическому решению, применяя элементы теории несмещённых планов для собственных колебаний квадратной пластины со свободными краями. Предложена стохастическая модель волнового фронта, созданная с использованием регрессионного анализа. Приведены формулы расчёта систематической погрешности при отработке нужной геометрии оптической поверхности адаптивного зеркала.

Ключевые слова: собственные колебания, несмещённый план, регрессионный анализ, адаптивная оптика, систематическая погрешность, волновой фронт.

DOI: 10.15372/AUT20160109

Введение. Адаптивная оптика находит широкое применение в различных областях науки и техники — от космических телескопов и термоядерного синтеза [1] до офтальмологии. В работе [2] доказан основной принцип нахождения оптимального расположения приводов, но открытым остаётся вопрос конкретных предложений для квадратных зеркал со свободными краями.

В данной работе с применением теории из [2] решалась задача оптимального расположения приводов для зеркал такого вида, а также расчёта с помощью аналитической формулы систематической погрешности отработанной геометрии оптической поверхности адаптивного зеркала.

Использование собственных колебаний пластины для описания оптической поверхности. Размещение приводов будем считать оптимальным, когда интеграл вида

$$\Phi = \int_X [W(\mathbf{x}) - Wz(\mathbf{x})]^2 dx \quad (1)$$

минимален при их конкретном количестве. Здесь $Wz(\mathbf{x})$ — заданная функция геометрии оптической поверхности; $W(\mathbf{x})$ — функция, соответствующая оптической поверхности зеркала, полученной в результате воздействия приводов; X — область интегрирования. Для упрощения решения задачи будем считать, что действие приводов на зеркало эквивалентно действию сил в заданных точках, приложенных в перпендикулярном направлении к упругой квадратной пластине со свободными краями [2, 3]. Введём обозначения: h — толщина пластины, $D = \frac{Eh^3}{(1-\mu^2)12}$ — цилиндрическая жёсткость, где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

В [3] перечисленные функции представлены в виде многочленов, состоящих из собственных колебаний пластины:

$$W(x, z) = \sum_i \sum_j a_{i,j} f(k_i x) f(k_j z), \quad (2)$$

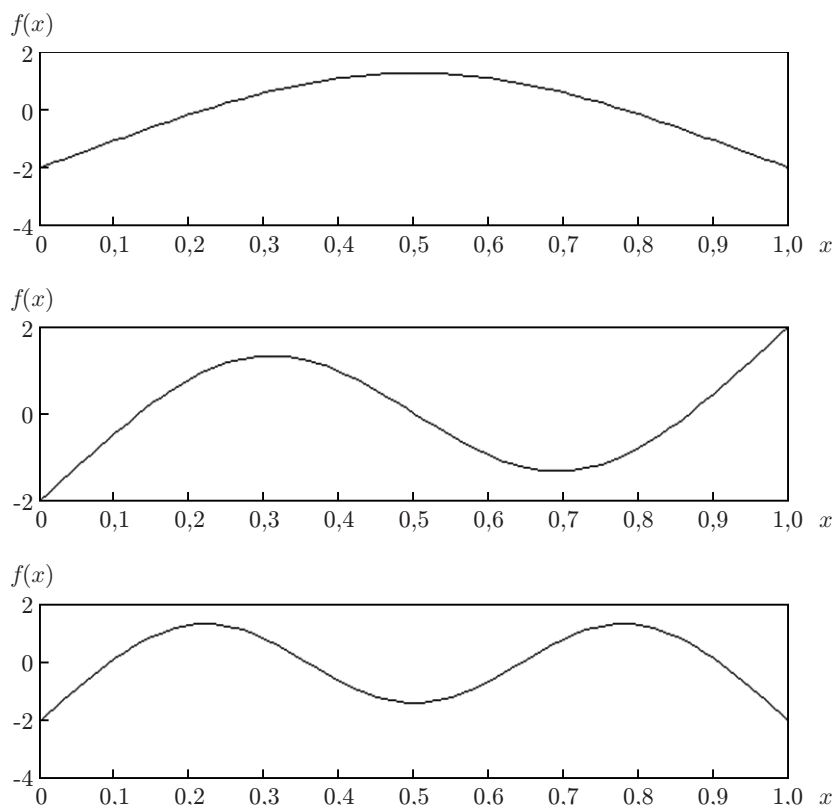


Рис. 1

где $a_{i,j}$ — коэффициенты полинома; $f(k_i x)$ и $f(k_j z)$ — функции, описывающие собственные колебания стержней со свободными краями; x, z — нормированные координаты ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$); k_i, k_j — безразмерные нормированные пространственные частоты собственных колебаний;

$$f(0, x) = 1, \quad \text{если } i = 0;$$

$$f(1, x) = (x - 0,5)\sqrt{12}, \quad \text{если } i = 1; \quad (3)$$

$$f(k_i, x) = -\left(\frac{-\sin(k_i) + \sinh(k_i)}{-\cos(k_i) + \cosh(k_i)}\right)(\cos(k_i x) + \cosh(k_i x)) + (\sin(k_i x) + \sinh(k_i x)), \quad \text{если } i > 1.$$

Данные функции ортонормированы в области от 0 до 1. Вторые и третьи производные на краях равны нулю. Эти условия следуют из граничных условий стержней со свободными краями [3]. Согласно (2) такие условия справедливы и для функции $W(x, z)$. Назовём функции (3) базисными. Коэффициенты k_i являются корнями уравнения $\cos(k) \cdot \cosh(k) - 1 = 0$.

На рис. 1 показаны графики собственных колебаний стержней 2-, 3- и 4-го порядков соответственно.

Расчёт формы оптической поверхности. Используя методы суперпозиции и виртуальных перемещений [2], можно найти связь между приложенными силами \mathbf{P} и коэффициентами полинома (2), обозначив их как вектор-столбец

$$\boldsymbol{\theta} = 2D^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FAP}, \quad (4)$$

где \mathbf{F} — матрица значения амплитуд собственных колебаний в заданных точках; \mathbf{A} — матрица размера $n \times (n - 3)$ (n — количество строк, $(n - 3)$ — столбцов); $\mathbf{MD}/2$ —

диагональная матрица энергий собственных колебаний. Эти энергии быстро возрастают с повышением их порядка $st = (i + j)$. Матрица \mathbf{A} такова, что вектор сил \mathbf{AP} всегда соблюдает условия равенства суммы сил и их моментов по обеим осям нулю. Данные требования следуют из условий равновесия пластины со свободными краями.

В силу ортонормированности базисных функций (3) величина (1) примет вид

$$\Phi = (\boldsymbol{\theta}_z - \boldsymbol{\theta})^T (\boldsymbol{\theta}_z - \boldsymbol{\theta}), \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\theta}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$; \mathbf{B} — вектор-столбец, состоящий из коэффициентов полинома, аппроксимирующего известную абберацию, которую надо компенсировать изменением формы оптической поверхности; $\mathbf{0}$ — вектор-столбец нулей, его размер стремится к бесконечности, но на практике достаточно несколько сот элементов. Исходя из уравнений (4) и (5) и используя метод наименьших квадратов (МНК), определим силы, при которых величина (5) минимальна. С учётом (4) выражение (5) запишем в виде

$$(\boldsymbol{\theta}_z - 2D^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FA}\mathbf{P})^T (\boldsymbol{\theta}_z - 2D^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FA}\mathbf{P}) \rightarrow \min.$$

Для поиска экстремума в последнем выражении частные производные по элементам вектора \mathbf{P} приравняем к нулю: $(2D^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FA})^T (\boldsymbol{\theta}_z - 2D^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{FA}\mathbf{P}) = 0$. Отсюда следует, что $(\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\theta}_z - \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} D^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{FA} \mathbf{P}) = 0$. Решая данную систему уравнений относительно вектора \mathbf{P} , получим

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{FA})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\theta}_z D. \quad (6)$$

Применяя формулу (6) на практике, будем иметь хорошие результаты. Большое количество примеров сравнения расчётных результатов с практическими приведено в [4].

Согласно (4) и (6) определим систематическую погрешность коэффициентов $\boldsymbol{\theta}$ и соответственно погрешность полученной поверхности, используя найденные силы:

$$\Phi = \text{tr}(\boldsymbol{\theta}_z - \mathbf{SS}\boldsymbol{\theta}_z)(\boldsymbol{\theta}_z - \mathbf{SS}\boldsymbol{\theta}_z)^T, \quad (7)$$

где tr — след; $\mathbf{SS} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{FA}(\mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{FA})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T \mathbf{M}^{-1}$.

Преобразуем выражение (7) к виду

$$\Phi = \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{E} - \mathbf{SS})^T, \quad (8)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица. Матрицу $\mathbf{DS} = (\mathbf{E} - \mathbf{SS})$ назовём матрицей смещений.

Если коэффициенты $\boldsymbol{\theta}$ поделить на их максимальное значение, то получим относительную систематическую погрешность. При этом предположим, что для множества волновых фронтов коэффициенты независимы, их значения равновероятны, математическое ожидание равно нулю. Известно, что в интервале (d, b) дисперсия равновероятных случайных величин составляет $(d - a)^2/12$. Для нашего случая $a = -1$, $d = 1$. Следовательно, дисперсия будет равна $1/3$. Запишем диагональную дисперсионную матрицу заданных коэффициентов \mathbf{K} со значениями диагональных элементов $1/3$. Выражение (8) примет вид

$$\Phi = \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})^T. \quad (9)$$

Если даже точно отработать несколько первых коэффициентов \mathbf{B} , то из матрицы \mathbf{SS} и формулы (7) получаются отличные от нуля и более старшие коэффициенты. Из вида матрицы \mathbf{SS} вытекает, что $\text{tr}(\mathbf{SS}) = n - 3$, а значит, приводы надо располагать так,

чтобы несколько первых диагональных элементов матрицы \mathbf{SS} стремились к единицам, при этом остальные будут уменьшаться. Тогда мы наиболее точно отработаем нужные коэффициенты и получим минимальными остальные.

В работе [2] показано, что для собственных колебаний пластин, если ограничить максимальный порядок полинома (3) величиной $st2$, может существовать несмещённый план расположения сил, при котором матрица \mathbf{SS} имеет вид

$$\mathbf{SS} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{E1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{SM} \end{array} \right\|. \quad (10)$$

Соответственно матрица смещения

$$\mathbf{DS} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E2} - \mathbf{SM} \end{array} \right\|. \quad (11)$$

При этом $\mathbf{E} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{E1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E2} \end{array} \right\|$.

Единичная матрица $\mathbf{E1}$ имеет размер $n1 \times n1$, $n1 \leq n$. Для данного случая величину n можно оценить по формуле [2]

$$n = \left[\frac{\left(\frac{st1 + st2 + 2}{2} \right) \left(\frac{st1 + st2 + 2}{2} + 1 \right)}{2} + 1 \right].$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть, $st1$ — порядок полинома, коэффициенты которого необходимо определить. В такой ситуации при любом значении коэффициентов \mathbf{B} , если их количество $\leq n1$, систематическая погрешность оптической поверхности равна нулю. Находится оптимальный план расположения приводов. При этом надо учитывать, что мы искусственно ограничили порядок полинома, состоящего из собственных колебаний. Такой случай будет соответствовать реальности, если порядок $st1$ полинома, содержащего коэффициенты \mathbf{B} , примерно в 2 раза меньше $st2$. В общем случае порядок $st2$ надо увеличивать до тех пор, пока элементы матрицы смещений при заданном количестве сил перестанут значимо меняться. Сходимость этого процесса объясняется тем, что энергии собственных колебаний

$$\begin{aligned} M_{i,j} = & \int_0^1 \int_0^1 [f(k_i, x)''_x f(k_j, z) + f(k_i, x) f(k_j, z)''_z]^2 dx dz + \\ & + 2(1 - \mu) \int_0^1 \int_0^1 [f(k_i, x)'_x f(k_j, z)'_z]^2 dx dz \end{aligned} \quad (12)$$

в зависимости от i и j согласно [2] быстро растут примерно пропорционально $(i^2 + j^2)^2$. Соответственно их обратные значения стремятся к нулю. При этом исходя из формулы (6) стремятся к нулю веса \mathbf{M}^{-1} базисных функций высокого порядка. Следовательно, их роль падает и они перестают влиять на геометрию поверхности пластины. Условие (11) строго не выполняется, если мы не ограничиваем степень $st2$. Посмотрим, какие значения приобретают диагональные элементы матрицы \mathbf{DS} , так как согласно [2, 5] они определяют смещение получаемых коэффициентов.

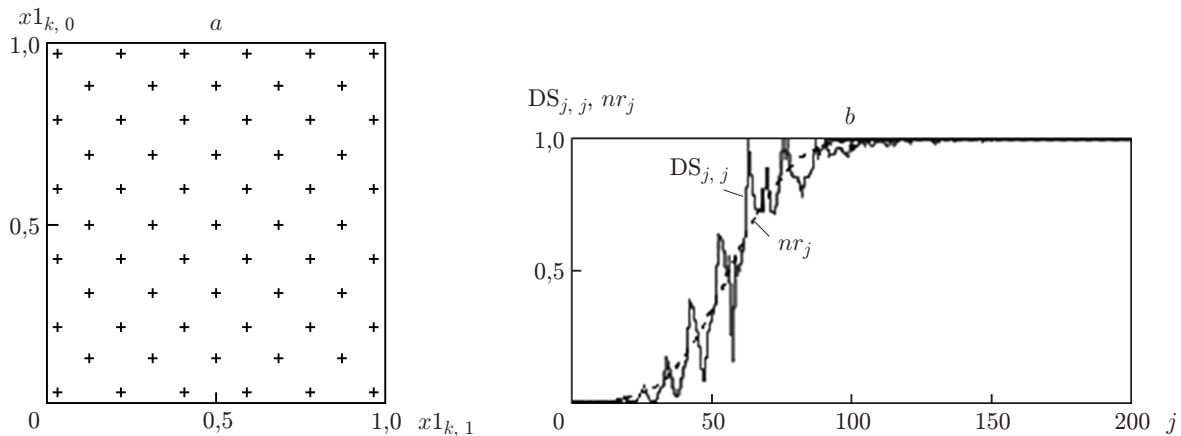


Рис. 2

Для наглядности на рис. 2, *a* показано шахматное расположение сил в относительной системе координат для 61 привода. Отступление от края 0,02.

Найденное расположение сил выполняет условие (10), образует оптимальный несмещённый план для случая $st2 = 11$, $st1 = 8$. Систематическая погрешность при этом равна нулю. Уточнение координат шахматного размещения приводов проводилось с помощью программы, написанной на базе алгоритма, изложенного в [5], который минимизирует систематическую погрешность коэффициентов полинома заданной степени — диагональные элементы матрицы \mathbf{DS} . В нашем случае этот алгоритм только уточняет отступление от края. Все программы, используемые в предлагаемой работе, написаны в Mathcad. Применяя одну из программ, можно показать, что шахматное расположение при любых соотношениях $t1$ и $t2$ даёт несмещённый план, но с разным значением n . Таким образом, были определены оптимальные планы размещения приводов для квадратных зеркал со свободными краями.

Если силы находятся в узлах регулярной решётки и их количество примерно соответствует шахматному расположению, систематическая погрешность значительно возрастает. Это объясняется тем, что энергия собственных колебаний, как уже упоминалось выше, быстро растёт пропорционально $(i^2 + j^2)^2$. Равенство погрешностей происходит тогда, когда в регулярной решётке узлов примерно в 2 раза больше, чем при шахматном расположении.

При значениях $st2 > n$ условие (11) строго не выполняется. Рассмотрим случай, когда $st2 = 30$. При большем значении $st2$ матрица смещений значимо не меняется. На рис. 2, *b* показаны вычисленные j -е значения диагональных элементов матрицы \mathbf{DS} для предлагаемого плана. Из рисунка видно, что несколько первых элементов находятся на уровне нуля. Например, $\mathbf{DS}_{0,0} = 1 - 0,99999985$. Однако затем начинается постепенное их увеличение. Полученные значения диагональных элементов для различных планов, соответствующих шахматному расположению сил, хорошо аппроксимируются нормальным распределением вида

$$nr(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^j \exp\left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] dt, \quad (13)$$

где $m = -3,48 + 0,98n$; $\sigma = -1,843 + 0,304n$; n — количество сил ($12 \leq n$). Зависимость (13) показана на рис. 2, *b* при $n = 61$. Количество коэффициентов полинома степени $t1$

(коэффициенты, подлежащие оценке) вычисляется по формуле

$$Nk = \frac{(t1 + 1)(t1 + 2)}{2} - 3. \tag{14}$$

Здесь вычитается величина 3, так как метод виртуальных перемещений не может определять наклоны и смещения, для них не существует потенциальной энергии упругости изогнутой пластины со свободными краями. Используя теорию кубатурных формул [2], несмещённые планы можно найти в [5, 6]. Количество приводов, расположенных в шахматном порядке, рассчитывается по формуле

$$Np = (Nn^2 + 1), \tag{15}$$

где Nn — нечётное число.

Априорная оценка дисперсионной матрицы коэффициентов. Для уточнённой оценки матрицы \mathbf{K} с использованием МНК были найдены коэффициенты регрессии полиномиальных моделей нескольких десятков различных по геометрии волновых фронтов. При этом базисными функциями являлись упомянутые собственные колебания пластины [1, 2]. Данный подход связан с тем, что реально оптическая поверхность пластины может соответствовать только многочленам такого вида. На рис. 3 для нескольких фронтов показаны зависимости от порядка многочлена логарифмов средних значений квадратов коэффициентов текущих степеней, делённых на максимальное среднеквадратическое значение коэффициентов некоторого порядка данного многочлена. Эти значения обозначены символами $s, s1$ и т. д.

Суммируя квадраты коэффициентов, находим их среднее значение. С точки зрения теории вероятности определяем оценку дисперсии коэффициентов, её значение будет иметь вид

$$Em \left\{ \sum_i (b_i + \Delta)^2 \right\} \frac{1}{nn} = \left(\sum_i Em \{ b_i^2 \} + \sum_i Em \{ \Delta^2 \} \right) \frac{1}{nn}. \tag{16}$$

Здесь Em — символ математического ожидания; b — истинные значения коэффициентов; Δ — случайная погрешность коэффициентов; nn — количество коэффициентов при усреднении. Выражение $\sum_i Em \{ \Delta^2 \}$ в (16) — это сумма дисперсий случайных погрешностей из

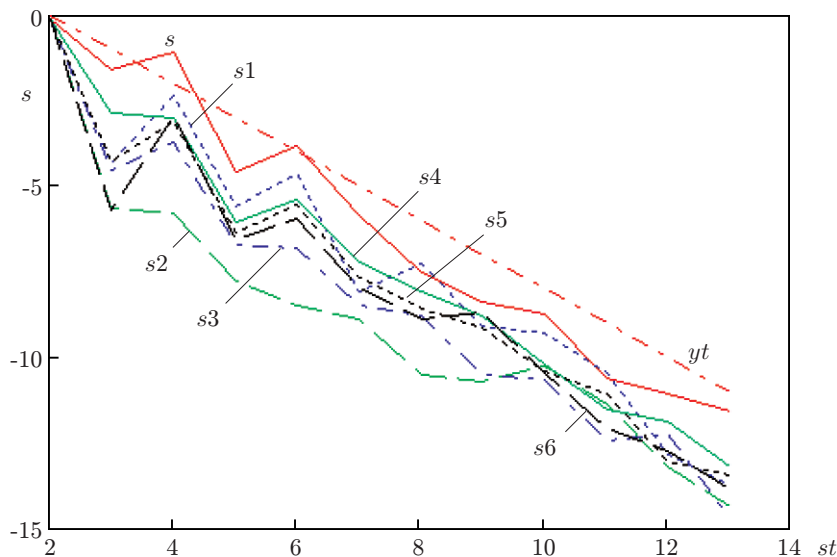


Рис. 3

мерений соответствующих коэффициентов регрессии. При построении графиков на рис. 3 данная величина вычиталась. Для анализируемого многочлена вычислялись оценки дисперсии его коэффициентов для каждого порядка в отдельности, результаты делились на максимальное значение оценки при определённом порядке. Обычно это второй порядок. Получалась дисперсия относительных коэффициентов. Из рисунка видно, что их теоретические значения ($yt = 2 - st$) в основном больше экспериментальных. Символом st задан порядок многочлена. Из последней формулы следует, что дисперсия относительных значений коэффициентов

$$\sigma^2(b_{st}) = \exp(2 - st). \quad (17)$$

Далее теоретическое значение будет служить оценкой дисперсии коэффициентов регрессии на множестве волновых фронтов.

Расчёт систематической погрешности. Зная аналитическую зависимость (17), найдём диагональные элементы матрицы \mathbf{K} . При этом надо учитывать, что для получения величин, изображённых на рис. 4, мы делили результаты расчётов не на максимальное значение квадрата коэффициентов, а на максимальное среднеквадратическое значение коэффициентов некоторой степени, увеличивая согласно вышеприведённым рассуждениям результат в 3 раза. Поэтому, используя (8), далее расчёт систематической погрешности будем проводить по формуле

$$\Phi r = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\mathbf{K}} \frac{1}{\sqrt{3}} b_{\max}, \quad (18)$$

где b_{\max} — максимальное значение коэффициента регрессии. В (18) учтено свойство

$$\text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T(\mathbf{E} - \mathbf{SS})^T = \text{tr}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^T.$$

Из формулы (18) следует, что чем больше значения отклонений волнового фронта от нуля, тем больше систематическая погрешность. На практике вместо b_{\max} можно взять СКО волнового фронта. Для первичной оценки этого будет вполне достаточно.

Используя теоретическое значение матрицы \mathbf{K} и формулу (18) при $b_{\max} = 1$, проследим изменение систематической погрешности при разном числе приводов, расположенных в шахматном порядке (см. рис. 4). Полученные результаты с погрешностью $\pm 0,005$ аппроксимируются функцией вида

$$st = \exp(0,857 - 0,326\sqrt{2n - 1}). \quad (19)$$

График зависимости (19) показан на рис. 4.

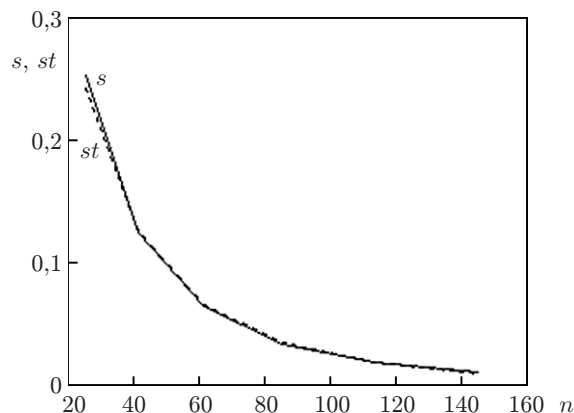


Рис. 4

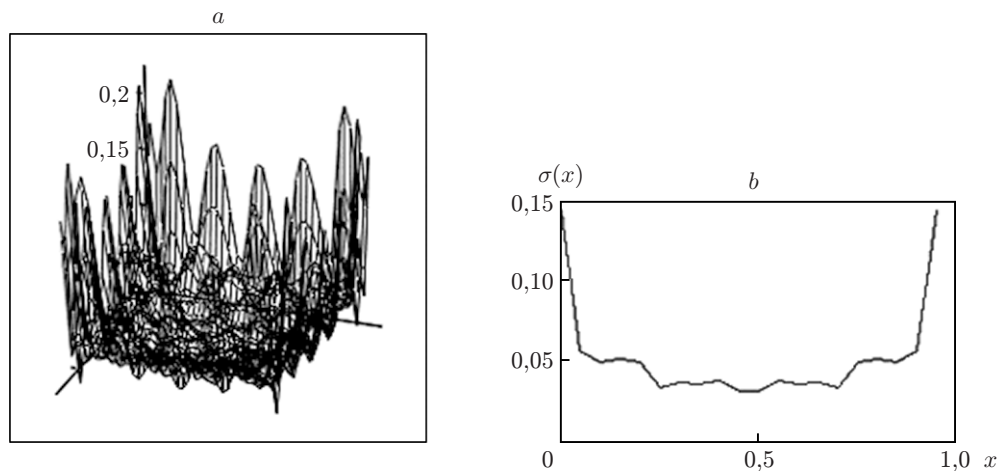


Рис. 5

Согласно (7) систематические погрешности коэффициентов \mathbf{B} будут вычисляться по формуле $\Delta \mathbf{B} = (\boldsymbol{\theta}_z - \mathbf{SS}\boldsymbol{\theta}_z)$. Следовательно, в некоторой точке \mathbf{x} систематическая погрешность функции будет вычисляться по выражению $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\boldsymbol{\theta}_z$, где $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — вектор-столбец, состоящий из значений базисных функций в точке \mathbf{x} . Учитывая [7] и формулу (9), найдём выражение для расчёта среднеквадратической систематической погрешности в заданной точке:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{f}^T(\mathbf{x})(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\mathbf{K}(\mathbf{E} - \mathbf{SS})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})}. \quad (20)$$

При этом используется стандартная форма записи дисперсии:

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = Em\{\mathbf{f}^T(\mathbf{x})(\mathbf{E} - \mathbf{SS})\boldsymbol{\theta}_z\boldsymbol{\theta}_z^T(\mathbf{E} - \mathbf{SS})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Коэффициенты $\boldsymbol{\theta}$ рассматриваются как независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием: $Em\{\boldsymbol{\theta}_z\boldsymbol{\theta}_z^T\} = \mathbf{K}$. При расчёте матрицы \mathbf{K} применяется формула (16). Следовательно, мы получаем СКО относительной погрешности в заданной точке.

На рис. 5 приведена полученная зависимость $\sigma(\mathbf{x})$ для 61 привода (приводы расположены согласно рис. 2, а). Вид погрешности для всей поверхности зеркала представлен на рис. 5, а, сечение в центре данной поверхности показано на рис. 5, б. Из результатов видно, что зона, в которой формируется геометрия отражённого волнового фронта, должна быть меньше зоны расположения приводов.

Заключение. В данной работе определены оптимальные планы расположения приводов для квадратных зеркал со свободными краями. Найдены формулы, позволяющие вычислить систематическую погрешность при отработке адаптивным зеркалом заданных форм волнового фронта. Приведена формула для расчёта СКО систематической погрешности адаптивного зеркала в заданной точке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бокало С. Ю., Гаранин С. Г., Григорович С. В. и др. Деформируемое зеркало на основе пьезоэлектрических приводов для адаптивной системы установки «Искра-6» // Квантовая электроника. 2007. **37**, № 8. С. 691–696.

2. **Ляхов Д. М.** Оптимальное управление формой оптической поверхности пластин с точечными связями // Оптический журнал. 1994. № 7. С. 30–33.
3. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
4. **Шанин О. И.** Адаптивные оптические системы в импульсных мощных лазерных установках. М.: Техносфера, 2012. 199 с.
5. **Ляхов Д. М., Щетников А. А.** Планирование эксперимента при экспрессном анализе волновых полей // Автометрия. 1985. № 3. С. 3–9.
6. **Мысовских И. П.** Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 333 с.
7. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. 257 с.

Поступила в редакцию 10 марта 2015 г.
