

УДК 535.411.854

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗОВОЙ ИНФОРМАЦИИ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПОШАГОВОГО ФАЗОВОГО СДВИГА  
ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ  
МЕЖДУ ИНТЕРФЕРИРУЮЩИМИ ПУЧКАМИ\***

**В. И. Гужов, С. П. Ильиных, С. В. Хайбуллин**

*Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: vig@edu.nstu.ru*

Предложен метод восстановления цифровых голограмм, получаемых при малых углах между интерферирующими волновыми полями. Рассматривается способ получения информации о фазе волнового фронта, отражённого от объекта.

*Ключевые слова:* голограмма, цифровая голография, пошаговый фазовый сдвиг.

DOI: 10.15372/AUT20170313

**Введение.** Методы цифровой голографии, наряду с другими оптическими методами [1], широко используются для исследования рельефа различных объектов и основаны на регистрации голограммы непосредственно на матрице фотоприёмников и их расшифровке с помощью компьютерных систем. В работе [2] был впервые предложен цифровой метод восстановления поверхности. Большой вклад в эту область внесли российские учёные [3]. Дальнейшее развитие цифровая голография получила после открытия способа непосредственной записи голограмм на фотоматрице [4]. Цифровая голография существенно повышает производительность и технологичность методов, в частности методов голографической интерферометрии.

Целью данной работы является исследование методов восстановления фазового профиля волнового фронта на основе методов пошагового фазового сдвига при небольших углах между интерферирующими пучками.

**Моделирование голографического процесса.** Обычно для разделения дифракционных пучков применяется схема, предложенная в [5], с внесением довольно большого угла между интерферирующими пучками. На практике используются углы более  $30^\circ$ . При регистрации голограмм по схеме [5] требуются материалы с пространственным разрешением порядка 2000–4000 линий/мм. Цифровые матрицы для регистрации интенсивности в настоящее время имеют разрешение менее 250 линий/мм. Поэтому при цифровом голографическом восстановлении приходится уменьшать угол между интерферирующими пучками [6, 7]. Небольшие углы неизбежно приводят к перекрытию спектров в разных дифракционных порядках и к искажению фазовой информации, необходимой для создания высокоточных измерительных систем.

Рассмотрим основные шаги процессов получения и расшифровки цифровых голограмм. На рис. 1 показаны координатные плоскости, соответствующие их главным этапам. Плоскость  $(x, y)$  — плоскость, касательная к объекту или достаточно близкая к нему

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-08-00565).

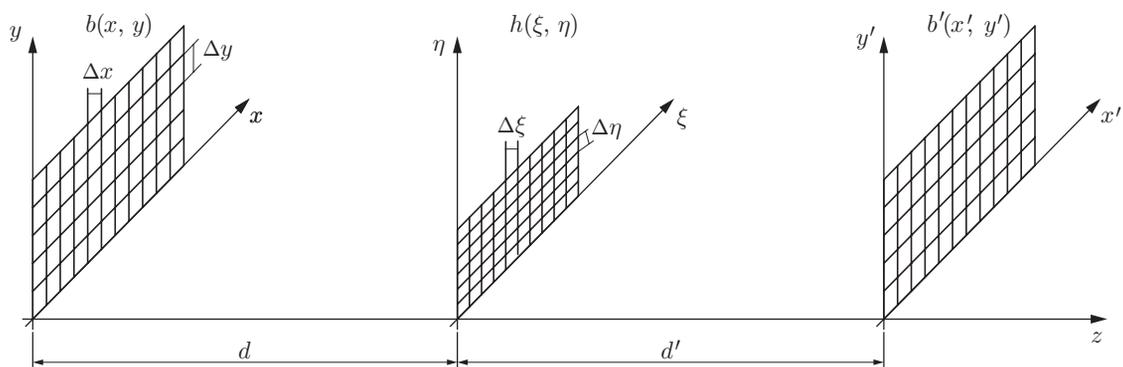


Рис. 1. Координатная система получения голограмм и голографического восстановления

и параллельная плоскости наблюдения. Распределение амплитуды и фазы волны на поверхности объекта аппроксимируется по законам геометрической оптики распределением амплитуды и фазы на плоскости. Плоскость  $(\xi, \eta)$  — плоскость формирования голограммы. Плоскость  $(x', y')$  — плоскость наблюдения.

Для получения изображения объекта производится преобразование Френеля или Фурье над голограммой в зависимости от расстояния  $d'$  (см. рис. 1).

Шаг 1. В плоскости, касательной к объекту, зададим комплексный массив  $b_1(k, l)$  размером  $N_x \times N_y$  пикселей (рис. 2).

Шаг 2. Для пересчёта волнового фронта из плоскости объекта в плоскость голограммы в зависимости от расстояния  $d$  (см. рис. 1) необходимо выполнить преобразование Френеля или Фурье. Дискретное преобразование Френеля можно записать в следующем виде:

$$\Gamma(r, s) = \frac{1}{i\lambda d} \exp\left[i\frac{2\pi d}{\lambda}\right] \cdot \exp\left[i\frac{\pi[(r\Delta\xi)^2 + (s\Delta\eta)^2]}{\lambda d}\right] \mathfrak{F}\left(b_1(k, l) \exp\left[i\frac{\pi(k^2\Delta\xi^2 + l^2\Delta\eta^2)}{\lambda d}\right]\right), \quad (1)$$

где  $\Gamma(r, s)$  — комплексный волновой фронт в плоскости голограммы;  $\mathfrak{F}$  — преобразование Фурье;  $(k, l)$  — отсчёты в плоскости объекта;  $(r, s)$  — отсчёты в плоскости голограммы;  $\Delta\xi = \lambda d/N_x \Delta x$ ,  $\Delta\eta = \lambda d/N_x \Delta y$  — шаги дискретизации в плоскости голограммы;  $\Delta x = X_{\max}/N_x$ ,  $\Delta y = Y_{\max}/N_y$  — шаги дискретизации в плоскости объекта ( $(X_{\max}, Y_{\max})$  — размер объекта в области формирования). В общем случае размеры  $(\Delta x, \Delta y)$  и  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$  различаются. Комплексная амплитуда  $\Gamma(r, s)$  может рассматриваться как объектный пучок, используемый для формирования голограммы.

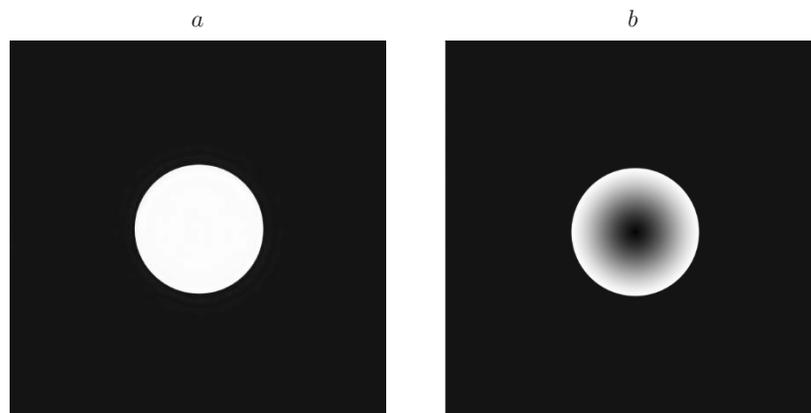


Рис. 2. Распределение комплексных амплитуд в плоскости, касательной к объекту:  
 a — амплитуда, b — фаза объекта в диапазоне от  $-\pi$  до  $\pi$

Шаг 3. Для формирования голограммы к объектному пучку необходимо добавить опорный волновой фронт

$$U_r(r, s) = a_r \exp \left( i \frac{2\pi}{\lambda} \left( \sin \theta_x \frac{X_{\max}}{N_x} r + \sin \theta_y \frac{Y_{\max}}{N_y} s \right) \right), \quad (2)$$

где  $\theta_x, \theta_y$  — углы наклона опорного волнового фронта с нормалью к регистрирующей плоскости. При использовании выражения (2) не возникает фазовых искажений при любых расстояниях  $d$  между плоскостью объекта и плоскостью голограммы [8]. В результате получим цифровую голограмму

$$G(r, s) = \Gamma(r, s) + U_r(r, s). \quad (3)$$

В плоскости голограммы помещается камера для регистрации картины интенсивности. Амплитуда суммы двух волновых фронтов (3) пропорциональна интенсивности регистрируемой голограммы.

Шаг 4. Формируем волновое поле сразу же за голограммой умножением поля голограммы на волну, соответствующую опорной.

Шаг 5. Для пересчёта в плоскость изображения опять проводим преобразование Френеля над волновым полем сразу же за голограммой. В плоскости изображения определяем комплексную амплитуду волнового фронта.

**Расшифровка цифровых голограмм.** В отличие от восстановления классических голограмм, содержащих информацию только об интенсивности, при использовании цифровой голографии можно получить математическую (комплексную) голограмму, которая содержит амплитуду и фазу объектного поля [3]:

$$G(r, s) = a_p(r, s) \exp(\varphi_p(r, s)). \quad (4)$$

Значения амплитуды  $a_p(r, s)$  и разности фаз  $\Delta\varphi = \varphi_p(r, s) - \varphi_r(r, s)$  между объектным  $\varphi_p(r, s)$  и опорным  $\varphi_r(r, s)$  пучками можно рассчитать по нескольким цифровым голограммам с помощью методов пошагового фазового сдвига [8–11]. В нашем случае фазовый сдвиг задаётся смещением опорного пучка.

Недостатком существующих алгоритмов является применение конкретных фазовых сдвигов  $\delta_i$ . Например, в [12] предлагается находить фазу и амплитуду при фиксированных сдвигах  $\delta_0 = 0^\circ$ ,  $\delta_1 = \pi/2$ ,  $\delta_2 = \pi$ ,  $\delta_3 = 3\pi/2$ . Наиболее просто фазовый сдвиг устанавливается перемещением зеркала, закреплённого на пьезокерамике. Однако пьезокерамика обладает существенным гистерезисом, и неточность установки сдвигов приводит к фазовым ошибкам.

В [13–16] получена обобщённая схема алгоритма расшифровки интерферограмм для различного числа произвольных фазовых сдвигов. Фазовая разность  $\Delta\varphi$  может быть определена как

$$\Delta\varphi = \arctan \left( \frac{\mathbf{I}^\perp \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{I}^\perp \cdot \mathbf{S}} \right), \quad (5)$$

где  $\mathbf{I} = (I_0, \dots, I_{m-1})^T$  — вектор интенсивностей, рассчитанных при различных углах фазовых сдвигов;  $\mathbf{C} = (\cos \delta_0, \dots, \cos \delta_{m-1})^T$ ,  $\mathbf{S} = (\sin \delta_0, \dots, \sin \delta_{m-1})^T$  — векторы синусов и косинусов для данных углов;  $\mathbf{I}^\perp$  — вектор, ортогональный вектору  $\mathbf{I}$ .

Ортогональный вектор можно найти с помощью матричного уравнения

$$\mathbf{I}^\perp = M\mathbf{I}. \quad (6)$$

При  $m$  измерениях матрица  $M$  будет иметь вид

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}. \quad (7)$$

Для формирования математической голограммы (4) необходимо также определить и амплитуду исходной волны. Наиболее просто это можно сделать, если в качестве опорного пучка использовать плоскую волну с постоянной амплитудой. В этом случае достаточно найти величину  $B(x, y) = 2a_p(x, y)a_r(x, y)$  (здесь  $a_p(x, y)$  — амплитуда объектного поля,  $a_r(x, y)$  — амплитуда опорного поля), которая вычисляется по формуле

$$B = \frac{1}{|\mathbf{C} \cdot \mathbf{S}^\perp|} \sqrt{(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}^\perp)^2 + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{C}^\perp)^2} \quad \text{или} \quad B = \frac{1}{|\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^\perp|} \sqrt{(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}^\perp)^2 + (\mathbf{I} \cdot \mathbf{C}^\perp)^2}. \quad (8)$$

Если при восстановлении голограммы определить значение амплитуды опорного поля  $a_r(x, y)$ , то, зная  $B(x, y)$ , найдём и  $a_p(x, y)$ .

Рассчитав  $a_p(x, y)$  и  $\varphi_p(x, y)$ , можно записать выражение для математической голограммы  $G(r, s)$  (2). Зная разность фаз  $\Delta\varphi$  и фазу опорной волны  $\varphi_r(x, y)$ , найдём и исходное фазовое распределение  $\varphi_p(x, y)$ . Однако фазовое распределение опорного пучка (2) зависит от углов  $\theta_x, \theta_y$  между интерферирующими пучками. Ошибка при определении этих углов приводит к искажению искомой фазы. При небольших углах сдвига их точное значение в экспериментальной установке измерить сложно. Поэтому для нахождения фазы используем разность фаз  $\Delta\varphi$ , которая вычисляется по алгоритму (5). Запишем волновое поле сразу же за голограммой как

$$G_1(r, s) = a_p(r, s) \exp(\Delta\varphi(r, s)). \quad (9)$$

Данное волновое поле получается умножением волнового поля голограммы на волну, соответствующую опорной (2). Умножение проводится в цифровом виде, следовательно, значения углов  $\theta_x, \theta_y$  можно менять произвольно.

Фазовое распределение имеет наклон, обусловленный положением опорного пучка, который приводит к смещению изображения амплитуды относительно центра (рис. 3, *a*). Тогда в плоскости наблюдения получим распределение восстановленных фаз (рис. 3, *b*).

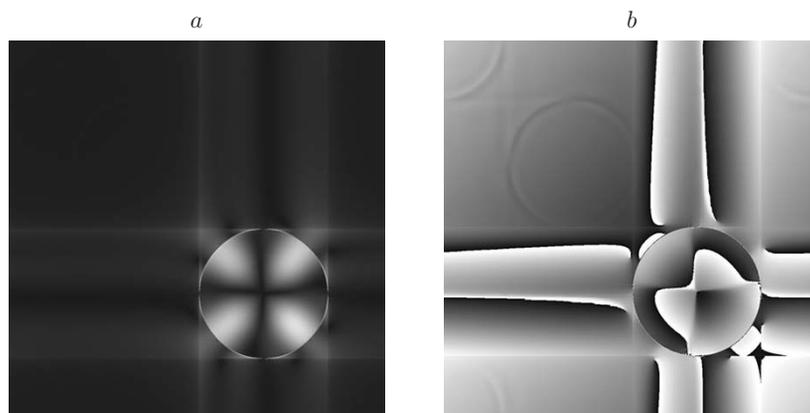


Рис. 3. Распределение комплексных амплитуд в плоскости изображения при углах наклона опорных пучков  $\theta_x = 0,5^\circ, \theta_y = 0,5^\circ$ : *a* — амплитуда, *b* — фазовая разность  $\Delta\varphi$

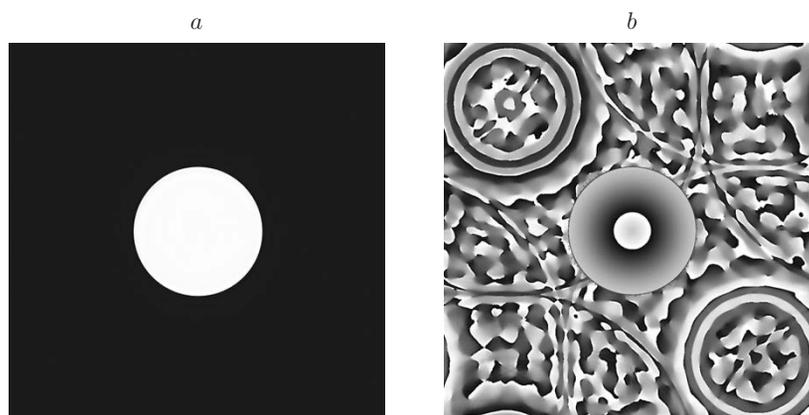


Рис. 4. Распределение комплексных амплитуд в плоскости изображения после восстановления цифровой голограммы при углах наклона опорных пучков  $\theta_x = 0,5^\circ$ ,  $\theta_y = 0,5^\circ$ :  $a$  — амплитуда,  $b$  — фаза

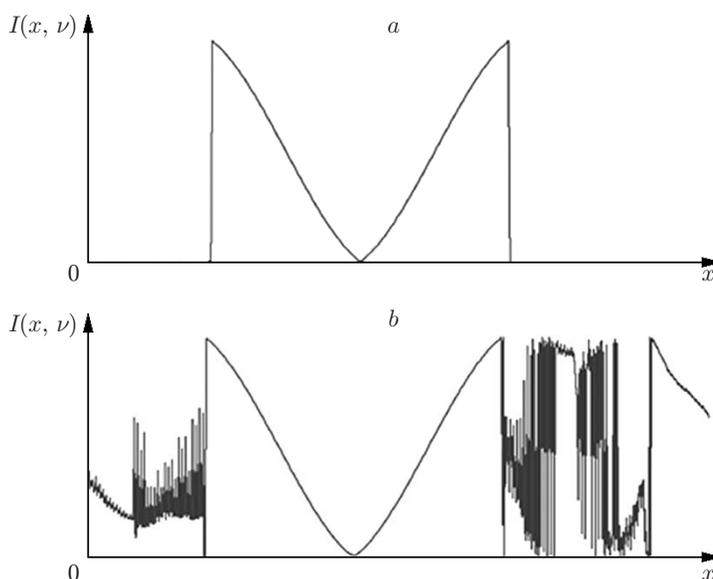


Рис. 5. Графики фазового распределения по центральному сечению:  $a$  — исходного изображения,  $b$  — восстановленного

В отличие от изображений из классических голограмм центральный пучок не оказывает влияния на качество восстановления.

При умножении поля голограммы на волну, соответствующую опорной, углы  $\theta_x$  и  $\theta_y$  выбираются таким образом, чтобы центр масс действительного изображения оказался точно в центре плоскости изображения (рис. 4). В этом случае исходное фазовое распределение объекта восстанавливается без искажений.

На рис. 5 показаны графики по центральному сечению восстановленного и исходного фазовых распределений. По нашим оценкам, погрешность восстановления фазы составляет не более  $2\pi/50$ .

**Заключение.** Предложен метод расшифровки голограмм фазовых объектов на основе формирования математической голограммы. Фазовые значения и поле амплитуд в плоскости голограммы определяются с помощью метода пошагового фазового сдвига для произвольных углов. Формирование математической голограммы даёт возможность избежать влияния центрального пучка, который не позволяет выделять фазовые значения в плоскости изображения при расшифровке классических голограмм при небольших углах

сдвига. Данный метод хорошо работает при малых углах между интерферирующими пучками и центральным опорным пучком, благодаря чему регистрировать голограммы можно с помощью цифровых матриц, имеющих сравнительно невысокое пространственное разрешение. Проведено математическое моделирование процессов получения и восстановления фазовой информации, результаты которого показывают возможность применения предлагаемого метода в экспериментальных голографических измерительных системах при изучении фазовых объектов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чугуй Ю. В.** Трёхмерные оптико-электронные измерительные системы и лазерные технологии для научных и промышленных применений // *Автометрия*. 2015. **51**, № 4. С. 76–91.
2. **Goodman J. W., Lawrence R. W.** Digital image formation from electronically detected holograms // *Appl. Phys. Lett.* 1967. **11**, N 3. P. 77–79.
3. **Ярославский Л. П., Мерзляков Н. С.** Цифровая голография. М.: Наука, 1982. 219 с.
4. **Schnars U., Jueptner W.** Direct recording of holograms by a CCD-target and numerical reconstruction // *Appl. Opt.* 1994. **33**, N 2. P. 179–181.
5. **Leith E. N., Upatnieks J.** Reconstructed wavefronts and communication theory // *JOSA*. 1962. **52**, N 10. P. 1123–1130.
6. **Балтийский С. А., Гуров И. П., Де Никола С. и др.** Современные методы цифровой голографии // *Проблемы когерентной и нелинейной оптики* / Под ред. И. П. Гурова, С. А. Козлова. С.-Пб.: СПбГУ ИТМО, 2004. С. 91–117.
7. **Гусев М. Е., Воронин А. А., Гуревич В. С. и др.** Методы цифровой голографической интерферометрии и их применение для измерения наноперемещений // *Наносистемы: физика, химия, математика*. 2011. **2**, № 1. С. 23–39.
8. **Hariharan P., Oreb B. F., Brown N.** Digital phase-measurement system for real-time holographic interferometry // *Opt. Commun.* 1982. **41**, N 6. P. 393–398.
9. **De Groot P.** Phase-shift calibration errors in interferometers with spherical Fizeau cavities // *Appl. Opt.* 1994. **34**, N 16. P. 2856–2863.
10. **Wyant J. C., Creath K.** Recent advances in interferometric optical testing // *Laser Focus*. 1985. **21**, N 11. P. 118–132.
11. **Wyant J. C.** Interferometric optical metrology: Basic system and principles // *Laser Focus*. 1982. **18**, N 5. P. 65–71.
12. **Fujigaki M., Nishitani R., Morimoto Y.** Strain measurement using phase-shifting digital holography with two cameras // *EPJ Web of Conferences. Proc. of the 14th Intern. Conf. on Experimental Mechanics*. Poitiers, France, 2010. Vol. 6. ID 30001. DOI: 10.1051/epjconf/20100630001.
13. **Гужов В. И., Ильиных С. П.** Компьютерная интерферометрия. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 252 с.
14. **Гужов В. И., Ильиных С. П., Хайдуков Д. С., Вагизов А. Р.** Универсальный алгоритм расшифровки // *Науч. вестн. НГТУ*. 2010. № 4(41). С. 51–58.
15. **Guzhov V., Pinykh S., Kuznetsov R., Haydukov D.** Generic algorithm of phase reconstruction in phase-shifting interferometry // *Opt. Eng.* 2013. **52**, N 3. 030501.
16. **Гужов В. И., Ильиных С. П., Хайдуков Д. С., Вагизов А. Р.** Устранение ошибок фазового сдвига в интерферометрии // *Автометрия*. 2011. **47**, № 1. С. 96–101.

*Поступила в редакцию 5 мая 2016 г.*