

УДК 681.519.5 : 518.95

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ РЕКУРРЕНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ P-СПЛАЙНОВ

Е. А. Кочегурова, А. И. Кочегуров, Н. Е. Рожкова

*Томский политехнический университет,
634050, г. Томск, просп. Ленина, 30
E-mail: kocheg@mail.ru*

Получены частотные характеристики процедуры сплайн-сглаживания информации, поступающей в режиме реального времени. Рекуррентный сплайн исследован с позиции теории линейных динамических систем. Рассмотрены вопросы оценки качества и устойчивости рекурсивного сплайн-фильтра. Выявленные при частотном анализе закономерности сплайн-преобразования подтверждены показателями качества сглаживания во временной области.

Ключевые слова: рекуррентный алгоритм, сплайн-фильтр, штрафной сплайн, вариационный сплайн, системная функция, аппаратная функция.

DOI: 10.15372/AUT20170608

Введение. Компьютерная интерпретация экспериментальных данных основана на предварительной обработке измерительной информации. Наряду с алгоритмами удаления недостоверных значений и компенсации нелинейности датчика, предварительная обработка включает фильтрацию высокочастотной (реже широкополосной) помехи, известную как задача сглаживания данных, что возможно аппаратным или алгоритмическим способом. В первом случае производится коррекция аппаратной функции (АФ) измерительного преобразователя [1] корректирующим звеном с заданной передаточной функцией. Алгоритмическое сглаживание основано на использовании математических методов цифровой фильтрации [1–3]. Каждый из подходов к сглаживанию обладает определёнными временными затратами и показателями точности. Однако требования к этим характеристикам в подходах различны. Так, при аппаратном решении критичным является запаздывание, т. е. время получения измеренного значения Θ при ограничении на погрешность сглаживания σ . И наоборот, алгоритмическое сглаживание минимизирует погрешность сглаживания σ , а ограничение на запаздывание результата Θ накладывается требованиями режима реального времени.

Для сглаживания в системе компьютерной интерпретации данных часто используются вейвлет- или сплайн-функции. Наличие математического базиса таких функций эффективно для требуемой задачи интерпретации (дифференцирование, прогноз, восстановление тренда и др.).

Аппарат сплайн-функций обладает развитыми теоретическими основами и широтой прикладных областей, однако недостаточно проработан с точки зрения применения в системах реального времени [4–8]. Алгебраические сплайны приводят к значительным временным затратам. В базисных B-сплайнах вычислительная нагрузка снижена за счёт локальности их определения, но только при условии оптимального выбора узлов, что является самостоятельной нетривиальной задачей [9–12]. Альтернативный вариационный подход к сплайн-аппроксимации в виде штрафных сплайнов также нередко [13–17] реализует избыточную схему — совмещение узлов и отсчётов, что также повышает вычислительную нагрузку.

Цель предлагаемой работы — на основе метода штрафных полиномиальных сплайнов (Р-сплайнов) вывести расчётные формулы рекуррентного сглаживающего сплайна (РСС) для данных, объединённых в группы, алгоритмически и программно реализовать возможные режимы функционирования сплайна, исследовать частотные и временные характеристики сплайн-преобразования с позиции цифровой фильтрации.

Вычислительная схема и режимы функционирования РСС. Для реализации режима реального времени в [18] получена рекуррентная форма расчёта коэффициентов сплайна для каждого i -го звена на основании h отсчётов, собранных в группы [19] между t_0^i, t_h^i :

$$S_i(\tau) = a_0^i + a_1^i \tau + a_2^i \tau^2 + a_3^i \tau^3, \quad -q \leq \tau \leq h - q, \quad (1)$$

где q — номер отсчёта t_j^i внутри i -го звена ($j = \overline{0, h}$; $q = \overline{0, h - 1}$), в котором сопряжены непрерывные производные сплайна; $\tau = t_j^i - t_0^i$ — номер отсчёта t_j^i внутри i -го звена, в котором сплайн вычисляется как $\tau = \overline{-q, h - q}$; $h = (t_h^i - t_0^i)/\Delta t$ — количество отсчётов в i -м звене сплайна (в группе). В общем случае h может быть различным в разных звеньях сплайна. В данной работе $h = \text{const}$ для любого i и при интервале дискретизации $\Delta t = 1$ однозначно совпадает с длиной звена.

Коэффициенты i -го звена сплайна (1) найдены [17] на основе минимизации функционала

$$J(S) = (1 - \rho)(h\Delta t)^2 \int_{t_0^i}^{t_h^i} [S''(t)]^2 dt + \rho \sum_{j=0}^h [S(t_j^i) - y(t_j^i)]^2, \quad (2)$$

который является модификацией известного экстремального функционала штрафного метода наименьших квадратов и адаптирован нами для каждого звена сплайна.

В функционале (2) весовой коэффициент ρ по аналогии с [6] нормирован: $\rho \in [0, 1]$, что сужает диапазон и наполняет процедуру его выбора физическим смыслом. Множитель $(h\Delta t)^2$ введён здесь для компенсации размерности между слагаемыми функционала. В (2) $S''(t)$ — вторая производная сплайна $S(t)$, повышающая его гладкость в функционале.

Модель дискретного сигнала (отсчёты) $y(t_j) = f(t_j) + \xi(t_j)$ включает низкочастотный полезный сигнал $f(t_j)$ и широкополосную помеху $\xi(t_j)$. При этом $M\{\xi(t)\} = 0$, $M\{\xi^2(t)\} = \sigma_\xi^2$, $M\{f(t), \xi(t)\} = 0$.

Рекуррентные формулы расчёта коэффициентов сплайна a_j^i , $j = \overline{0, 3}$, $i = 1, 2, \dots$, даны в [18].

Особенностями приведённого сплайна является рекуррентность оценок коэффициентов относительно звеньев и локальность относительно группы измерений. Далее рассмотрен сплайн дефекта 2 из [4]. В зависимости от расположения точки q для i -го звена и требуемых моментов вычисления сплайна τ возможно несколько режимов функционирования сплайна для аппроксимации в режиме реального времени: последовательный, текущий, многократного сглаживания (рис. 1).

Последовательный режим (рис. 1, а). Предполагается, что измерения $y(t_j)$ поступают для обработки группами из h наблюдений. Обработка также ведётся для всей группы $\tau \in [0, h]$. Сопряжение непрерывных производных сплайна осуществляется в момент времени $t_h^{i-1} = t_0^i$. Время запаздывания результата Θ для момента времени t_τ^i , $\tau \in [0, h]$, складывается в этом случае из двух слагаемых: собственного времени вычисления сплайна Θ_0 и времени окончания сбора h наблюдений i -го звена, т. е. $\Theta = \Theta_0 + (h - \tau)\Delta t$, $\tau = \overline{0, h}$.

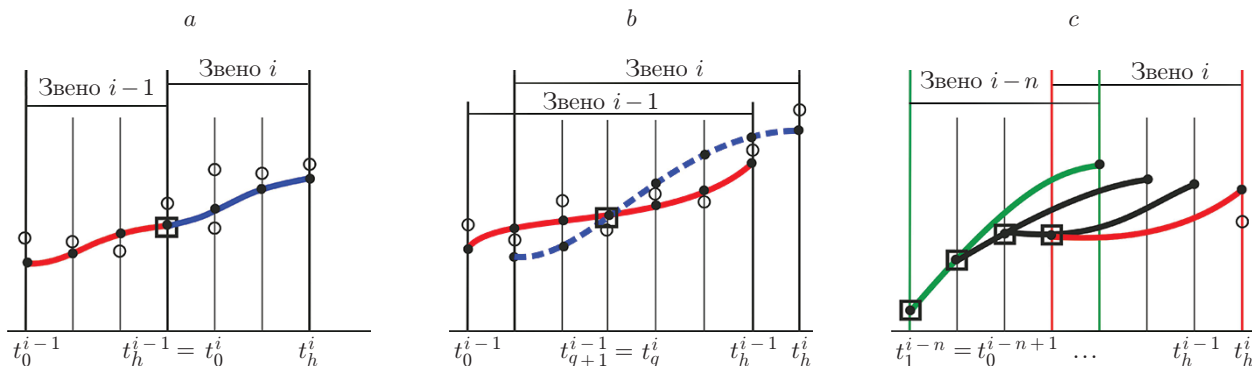


Рис. 1. Режимы функционирования РСС (○ — отсчёты наблюдаемого процесса, ● — вычисленные значения сплайна, □ — моменты сопряжения звеньев РСС)

Текущий режим (рис. 1, b). Вычисление РСС производится при поступлении каждого измерения с использованием $(h - 1)$ предыдущих измерений. В этом случае сопряжение осуществляется в момент времени $t_{q+1}^{i-1} = t_q^i$, $\tau = 1, h - q$. Запаздывание $\Theta = \Theta_0 + (h - q - \tau)\Delta t$, $\tau = 0, h - q$. Минимальное запаздывание $\Theta = \Theta_0 + 1$ при $\tau = h - q + 1$.

Режим многократного сглаживания (рис. 1, c). Как и в текущем режиме, вычисления производятся при поступлении каждого измерения, но с использованием $(h - 1)$ значений сплайна, вычисленных в моменты времени $t_{h-q}^{i-1}, t_{h-q}^{i-2}, \dots, t_{h-q}^{i-(h-1)}$. Запаздывание такое же, как в текущем режиме. Параметр h в этом случае может служить параметром регуляризации, исключаяющим эффект «переглаживания» данных.

Наиболее ясно природу сглаживающих и интерполирующих свойств сплайн-преобразования выявляют его частотные характеристики.

Разностное уравнение РСС. Представим РСС как цифровой фильтр (ЦФ), преобразующий входную последовательность измерений $\{y(t_j^i)\}$, $j = 0, \bar{h}$, $i = 1, 2, \dots$, в выходное значение сплайна $S(t_\tau^i)$. Пусть $\tau = q + 1$, $q = 0, \bar{h} - 1$.

Введём обозначение $S_i = S(t_\tau^i)$. Это позволяет определить единый отсчёт времени, совпадающий с моментом вычисления сплайна τ на каждом i -м звене. Тогда $S_{i-1} = S(t_\tau^{i-1}) = a_0^i$, $S'_{i-1} = S'(t_\tau^{i-1}) = a_1^i$. А входящие в (2) суммы измерений $\sum_{k=0}^h y(t_k^i)$ обозначены в

данном случае как $\sum_{k=i}^{i+h} y_k$, т. е. $\sum_{k=0}^h y(t_k^i) = \sum_{k=i}^{i+h} y_k$. Последовательность $\{S_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, представляет собой решётчатую функцию, интервал дискретизации которой совпадает с интервалом дискретизации измерений Δt . Значения $\{S_i\}$ объединены общими динамическими свойствами в силу того, что моменты сопряжения q и вычисления τ для текущего режима ($\tau = q + 1$) отличаются на один такт измерения Δt .

С учётом введённых обозначений и допущений перепишем уравнение сплайна (1) в виде разностного уравнения РСС:

$$\alpha_0 S_i - \alpha_1 S_{i-1} - \alpha_2 S'_{i-1} = \alpha_3 \sum_{k=i}^{i+h} y_{k-1} (k-1)^2 + \alpha_4 \sum_{k=i}^{i+h} y_{k-1} (k-1)^3, \quad (3)$$

где

$$\alpha_0 = BC - A^2; \quad \alpha_1 = \alpha_0 + \rho(AH_3 - CH_2) + \rho(AH_2 - BH_3);$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \rho(AH_4 - CH_3) + \rho(AH_3 - BH_4); \quad \alpha_3 = \rho(C - A); \quad \alpha_4 = \rho(B - A);$$

$$A = 6(1 - \rho)h^4 + \rho H_5; \quad B = 4(1 - \rho)h^3 + \rho H_4;$$

$$C = 12(1 - \rho)h^5 + \rho H_6; \quad H_n = \sum_{k=0}^h k^n.$$

Полученное уравнение (3) соответствует разностному уравнению первого порядка с постоянными (относительно звена сплайна) коэффициентами α_j , $j = \overline{0, 4}$. Объединённые в группы h измерения являются входными данными ЦФ.

Линейность выражения (3) относительно измерений y_k очевидна, что делает возможным исследование РСС методами линейных динамических систем. Характерно, что коэффициенты разностного уравнения α_j , $j = \overline{0, 4}$, для выбранного текущего режима зависят только от варьируемых параметров сплайна ρ, h .

Частотные характеристики РСС. Разностное уравнение (3) позволяет рассматривать РСС как линейный рекурсивный ЦФ с постоянными параметрами или с бесконечной импульсной характеристикой. Особый интерес для таких систем представляет их описание в частотной области [20–24], так как для многих задач обработки сигналов частотные характеристики нагляднее, чем временные, отражают суть преобразования.

Известно, что для описания непрерывных динамических систем наиболее общими характеристиками являются частотная передаточная функция системы или комплексный коэффициент передачи $W(j\omega)$.

Для нахождения передаточной (или системной) функции дискретного сплайн-преобразования $W(q) = S(q)/Y(q)$ использовано D -преобразование уравнения (3). Здесь $S(q)$ и $Y(q)$ — D -изображения входного дискретного сигнала y_k и дискретного отклика $S_i = S(t_i^*)$ на выходе сплайн-фильтра.

Частотная передаточная функция сплайн-фильтра по аналогии с непрерывными системами определена из соотношения $\dot{W}(\omega) = W(e^{j\omega\Delta t})$ и для уравнения (3) имеет вид дробно-рациональной функции

$$\dot{W}(\omega) = \sum_{k=0}^h e^{(k-1)\omega} (k^2\alpha_3 + k^3\alpha_4) / (\alpha_0 - \alpha_1 e^{-\omega} - \alpha_2 \omega e^{-\omega}). \quad (4)$$

В (4) и далее $\Delta t = 1$.

Числитель частотной характеристики определён нерекурсивной частью сплайн-фильтра, знаменатель — рекурсивной.

Частотная характеристика (4) имеет периодический характер, обусловленный периодичностью функции $e^{j\omega\Delta t}$ [3]. При этом спектры входного и выходного сигналов и частотная характеристика имеют одинаковый период равный $2\pi/\Delta t$. И в области главных частот $[-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t]$ спектральные характеристики непрерывной и дискретной систем совпадают.

Для исследования амплитудных и фазовых характеристик сплайн-фильтра целесообразно представить РСС в виде $A(\omega) = |\dot{W}(\omega)|$ — амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и $\varphi(\omega) = \arg[\dot{W}(\omega)]$ — фазочастотной характеристики (ФЧХ):

$$\dot{W}(\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}.$$

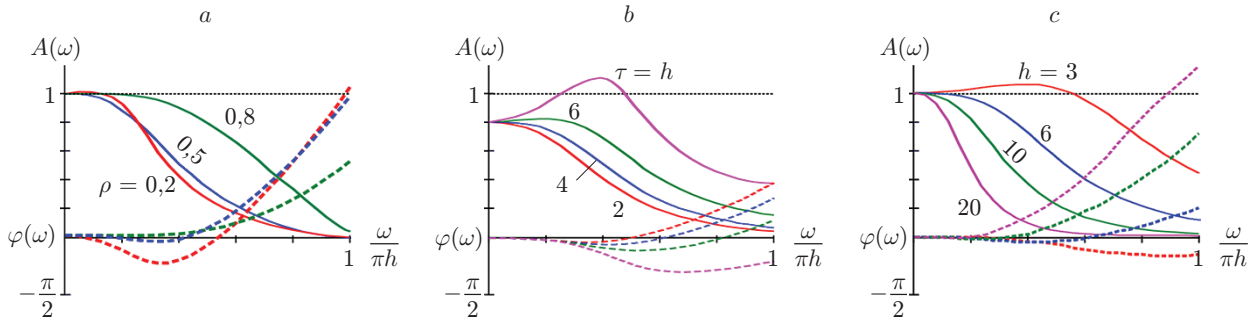


Рис. 2. Амплитудно-частотные (сплошные кривые) и фазочастотные характеристики (штриховые кривые) рекуррентного сплайн-фильтра при изменении настроечных параметров: *a* — $h = 8, \tau = 1$; *b* — $h = 8, \rho = 0,5$; *c* — $\tau = 1, \rho = 0,5$

При численном анализе цифровых фильтров для исключения эффекта наложения частот имеет смысл исследовать лишь один период частотной характеристики. Соответствующие (4) АЧХ и ФЧХ сплайна представлены на рис. 2. Изменяя сглаживающий множитель ρ , длину звена h и момент вычисления τ , в широких пределах можно варьировать фильтрующие свойства сплайна. В области изменения параметров вид АЧХ соответствует АЧХ низкочастотного фильтра, коэффициент передачи которого $\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} |\dot{W}(\omega)|^2 d\omega$ растёт с увеличением параметров τ и ρ ($\rho = 1$ соответствует интерполяционному сплайну).

Характерно, что при увеличении момента вычисления τ возникает и усиливается резонансный пик АЧХ. Вероятно, это объясняется разбалтыванием правого конца сплайна вследствие того, что закреплён только левый конец полинома на отдельном звене [25]. Если момент нахождения сплайна выбран ранее момента сопряжения $\tau < h - q$, то ФЧХ имеет опережающий характер, что соответствует системе с запаздыванием или системе с накопленными данными [18, 19] при обработке информации группами. И лишь при $\tau = h - q$, когда вычисляемая точка совпадает по времени с последним замером, ФЧХ имеет отстающий характер. Отметим, что для идеального фильтра $A(\omega) = 1$ и $\varphi(\omega) = 0$ в заданной полосе частот.

Более очевидно влияние длины звена (группы) h на коэффициент передачи и частотные свойства фильтра. Существенное воздействие размер группы оказывает на полосу пропускания сигнала, которая закономерно уменьшается при увеличении h , так как полученный сплайн становится более гладким. Минимальное значение $h = 3$ (соответствует использованию четырёх измерений) для сплайна 3-го порядка даёт максимально возможную полосу пропускания и приближается к АЧХ интерполяционного сплайна даже для случая $\rho = 0,5$ (рис. 2, *c*).

Выявленное влияние параметров сплайна подтверждается и АФ фильтра (рис. 3, *b*), ширина которой находится в прямой зависимости от частотных характеристик фильтра. Аппаратная функция — аналог импульсной весовой функции непрерывной системы

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{5}$$

Семейства АФ на рис. 3 демонстрируют её затухающий во времени характер для фиксированных значений ρ и h .

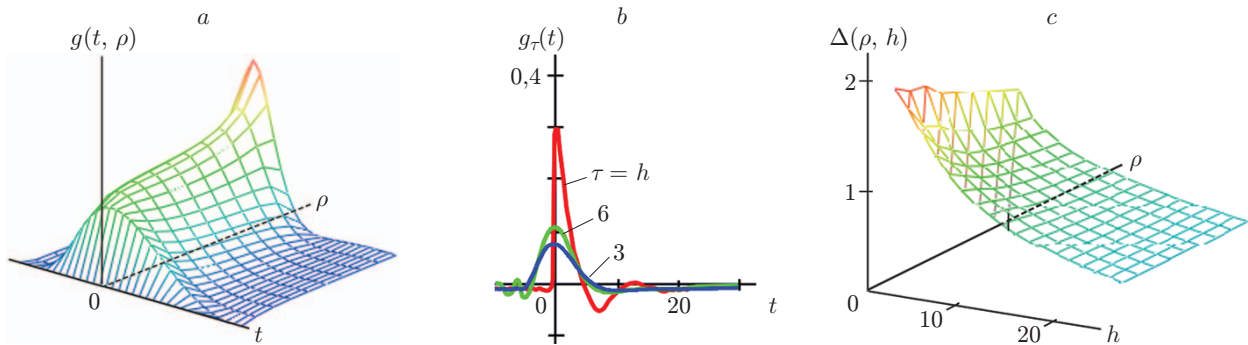


Рис. 3. Аппаратная функция рекуррентного сплайн-фильтра при изменении настроечных параметров: *a* — $h = 8$, $\tau = 1$; *b* — $h = 10$, $\rho = 0,5$; *c* — $\rho \in (0, 1)$, $h \in (3, 20)$

Аппаратная функция, точнее её ширина, определяет системную ошибку восстановления произвольной функции $f(t)$ с помощью цифрового сплайн-фильтра. Часто под шириной сплайн-фильтра понимают полосу абсцисс, дающих половинное уменьшение ординаты АФ. Для количественной оценки ширины АФ, изменение которой показано на рис. 3, *c* при изменении параметров ρ и h , можно воспользоваться соотношением [26]

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt / g(0).$$

Ширина АФ визуально уменьшается с ростом сглаживающего параметра ρ и минимальна для интерполяционного сплайна ($\rho = 1$), что согласуется с АЧХ сплайн-фильтра, приведённой на рис. 2, *a*. Физическая интерпретация ширины АФ корректно может быть проведена лишь по аналогам в частотной области. При уменьшении сглаживающего параметра ρ либо при росте числа отсчётов звена h полоса пропускания сигнала АЧХ сужается и соответственно ширина АФ увеличивается. Сплайн на выходе фильтра в этом случае становится довольно гладким, но значительно удалённым от линии регрессии, что и приводит к росту систематической погрешности.

Следует отметить, что условие причинности ($g(t) = 0$ при $t < 0$) выполняется лишь для $\tau = h - q$, когда сплайн вычисляется без запаздывания. В остальных случаях, т. е. для $\tau < h - q$, функция $g(t) = 0$ при $t < h - \tau$. На рис. 3, *b* это видно для $\tau = 3$ и $\tau = 6$.

Работоспособность ЦФ определяется требованиями к устойчивости и к установившемуся и переходному процессам (ПП) [2, 3]. Устойчивость является необходимым условием работоспособности фильтра и означает, что переходная составляющая решения $S_{\text{переход}}(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Однако характер затухания обуславливает качество системы.

Качество ЦФ невысокого порядка, реализованного программно, может быть оценено прямыми методами как реакция сплайн-преобразования на единичное ступенчатое возмущение. На рис. 4 приведены кривые переходного процесса $H(nT)$ сплайн-фильтра, а в таблице — основные показатели качества ПП при изменении соответствующих параметров сплайна h, ρ, τ .

По характеру затухания кривая ПП $H(nT)$ имеет колебательный характер. Причём колебательность появляется и возрастает при уменьшении запаздывания получения результата $h - \tau$, т. е. при вычислении значения сплайна в правом конце звена $\tau \rightarrow h$. Кроме того, особенность сплайн-фильтра состоит в ухудшении и других показателей качества ПП (перерегулирование, длительность переходного процесса) при отсутствии запаздывания. Так, при изменении $\tau \in 1, h$ перерегулирование возрастает в 3–6 раз при любом значении ρ , хотя повышение гладкости сплайна ($\rho \rightarrow 0$) также ухудшает все показатели качества.

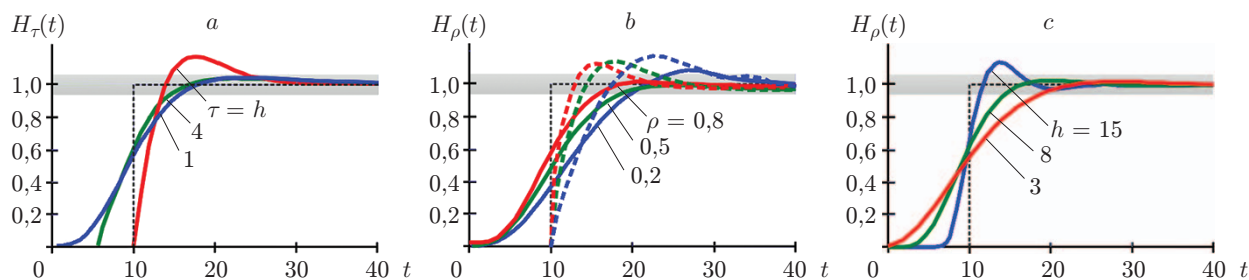


Рис. 4. Переходная функция рекуррентного сплайн-фильтра при изменении параметров: *a* — $h = 10, \rho = 0,5$; *b* — $h = 10, \tau = 1$ (сплошные кривые), $\tau = h$ (штриховые кривые); *c* — $\tau = h, \rho = 0,5$

Параметр сплайн-фильтра	Показатели качества ПП		
	перерегулирование $\sigma, \%$	длительность ПП $t_{п}, \Delta t$	колебательность μ
$h = 10, \tau = 1$			
$\rho = 0,2$	5,54408	29	1,05522
$\rho = 0,5$	2,42179	18	1,0242
$\rho = 0,8$	2,22641	17	1,02225
$h = 10, \tau = h$			
$\rho = 0,2$	18,69437	30	1,18611
$\rho = 0,5$	17,05828	25	1,17038
$\rho = 0,8$	14,97393	21	1,14957
$\rho = 0,5, \tau = 1$			
$h = 3$	13,60326	19	1,13253
$h = 8$	2,9287	17	1,02925
$h = 15$	2,19927	22	1,02198
$\rho = 0,5, h = 10$			
$\tau = 1$	2,421	18	1,024
$\tau = 4$	2,245	18	1,022
$\tau = h$	17,058	25	1,170

Несколько иной характер поведения кривой ПП наблюдается при изменении длины звена сплайна h . С ростом h перерегулирование значительно снижается, а длительность ПП увеличивается. Наиболее быстродействующим является интерполяционный сплайн ($\rho = 1$). В частности, при $h = 2$ он идеально воспроизводит единичную ступенчатую функцию, т. е. переходный процесс отсутствует.

Очевидно, длительность ПП — один из основных показателей качества систем реального времени. Устойчивая работа сплайна гарантирована лишь по истечении ПП и выхода ЦФ в установившийся режим. Длительность переходного процесса для основной области варьируемых параметров весьма невелика и составляет $(15-20)\Delta t$, что перспективно при обработке информации в режиме реального времени. И только для сплайна максимальной гладкости ($\rho = 0,1$) время регулирования повышается до $30\Delta t$.

Заключение. Рекуррентный сплайн-фильтр с позиции линейных динамических систем обладает следующими свойствами.

1. Разностное уравнение РСС позволяет рассматривать сплайн-фильтр как линейный рекурсивный ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой. В зависимости от режима

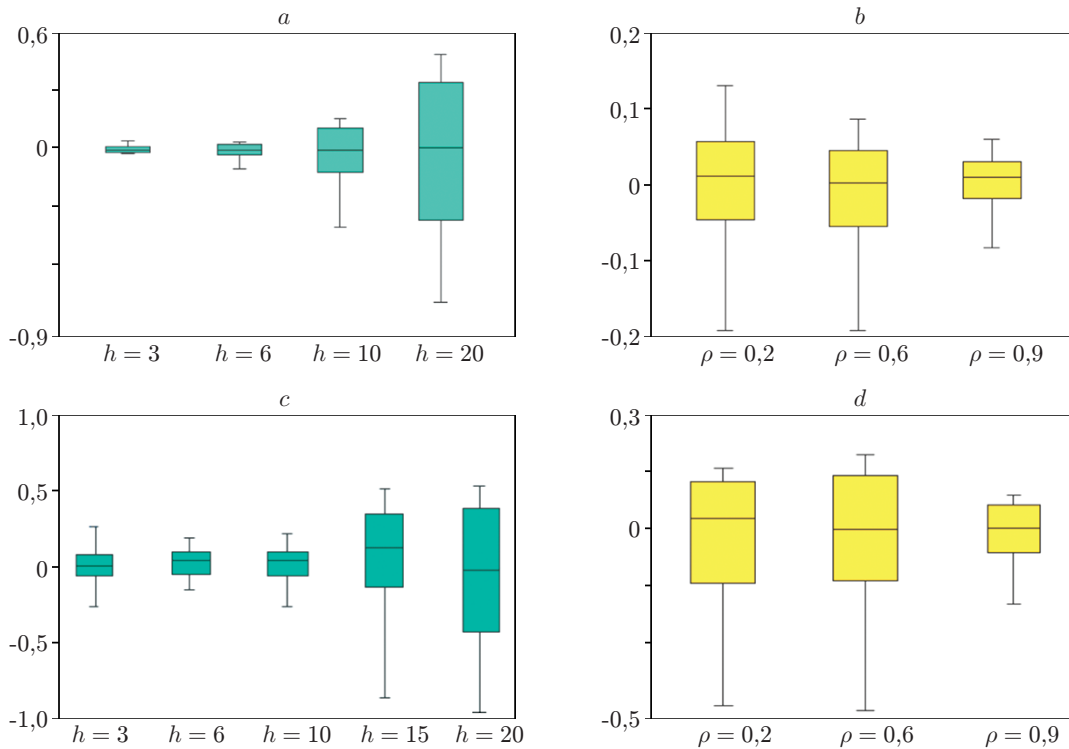


Рис. 5. Гистограмма остатков восстановления функции $f(t) = 10 \sin(2\pi t/100)$: a, b — без помехи; c, d — с аддитивной помехой $N(0, 1^2)$

функционирования сплайн может быть отнесён к цифровым фильтрам с постоянными или переменными параметрами.

2. На основании аналитически найденной передаточной (системной) функции сплайн-фильтра проведён численный анализ его частотных характеристик. В диапазоне изменения варьируемых параметров сплайна АЧХ и ФЧХ показали, что рекурсивный сплайн-фильтр остаётся низкочастотным.

3. Частотные характеристики сплайн-фильтра более очевидно выявили влияние его параметров на избирательные свойства преобразования. В этом плане показательной характеристикой является полоса пропускания сплайн-фильтра (обратно пропорциональная ширине аппаратной функции). Полоса пропускания возрастает либо при увеличении сглаживающего множителя ρ или момента вычисления τ , либо при уменьшении числа рекурсивных членов (группы отсчётов) h . Именно её величина определяет сглаживающие и интерполирующие свойства сплайн-фильтра.

Выявленные при частотном анализе закономерности подтверждены экспериментальными исследованиями во временной области. На рис. 5 этот результат хорошо демонстрируют гистограммы остатков восстановления функции $f(t) = 10 \sin(2\pi t/100)$ без помехи и в смеси с 10 %-ной случайной помехой.

Систематическая погрешность (рис. 5, a, b), обусловленная технологией сплайн-преобразования, пропорциональна ширине аппаратной функции.

Сопоставление рис. 5, a, c и b, d показывает, что случайная погрешность в меньшей степени, чем систематическая, влияет на результирующую погрешность сплайн-преобразования.

И наконец, весьма перспективным в системах реального времени для компьютерной интерпретации измерительной информации является использование комбинированного влияния параметров сплайн-фильтра и вышеприведённых режимов его функционирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куликовский К. Л., Ланге П. К.** Коррекция динамической погрешности инерционных измерительных преобразователей с передаточной функцией второго порядка // Вестн. СамГТУ. Сер. Технические науки. 2011. **32**, № 4. С. 62–68.
2. **Оппенгейм А., Шафер Р.** Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2007. 856 с.
3. **Сергиенко А. Б.** Цифровая обработка сигналов. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2013. 756 с.
4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 382 с.
5. **Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н.** Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск: Наука, 1988. 102 с.
6. **De Boor C.** A Practical Guide to Splines. N. Y.: Springer-Verlag, 2001. 348 p.
7. **Wahba G.** Spline Models for Observational Data. Philadelphia: SIAM Press, 1990. 169 p.
8. **Ruppert D., Wand M. P., Carroll R. J.** Semiparametric Regression. N. Y.: Cambridge University Press, 2003. 386 p.
9. **Гетманов В. Г.** Алгоритмы вычисления аппроксимационных сплайновых функций с учётом оптимизации расположения сплайновых узлов // Автометрия. 2013. **49**, № 1. С. 26–41.
10. **Rozhenko A. I.** A new method for finding the optimal smoothing parameter for the abstract smoothing spline // Journ. Approxim. Theory. 2010. **162**, N 6. P. 1117–1127.
11. **Aydin D., Memmedli M.** Optimum smoothing parameter selection for penalized least squares in form of linear mixed effect models // Optimization. 2012. **61**, N 4. P. 459–476.
12. **Walker C. G., Mackenzie M. L., Donovan C. R., O’Sullivan M. J.** SALSA — A spatially adaptive local smoothing algorithm // Journ. Stat. Comput. and Simul. 2011. **81**, N 2. P. 179–191.
13. **Yang L., Hong Y.** Adaptive penalized splines for data smoothing // Comput. Stat. and Data Analys. 2017. **108**. P. 70–83.
14. **Krivobokova T., Crainiceanu C. M., Kauermann G.** Fast adaptive penalized splines // Journ. Comput. and Graph. Stat. 2008. **17**, N 1. P. 1–20.
15. **Tharmaratnam K., Claeskens G., Croux C., Salibián-Barrera M.** S-estimation for penalized regression splines // Journ. Comput. and Graph. Stat. 2010. **19**, N 3. P. 609–625.
16. **Шпынев Б. Г., Воронов А. Л.** Минимизация нелинейного функционала невязки в задачах потоковой обработки экспериментальных данных // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2013. **14**, № 1. С. 503–515.
17. **Кочегурова Е. А., Gorokhova E. S.** Current derivative estimation of non-stationary processes based on metrical information // Lect. Notes Comput. Sci. 2015. **9330**. P. 512–519.
18. **Кочегурова Е. А., Горохова Е. С.** Текущее оценивание производной нестационарного процесса на основе рекуррентного сглаживающего сплайна // Автометрия. 2016. **52**, № 3. P. 79–85.
19. **Хуторцев В. В., Федоренко О. С.** Использование метода сплайн-функций при синтезе цифровых алгоритмов фильтрации с группированием наблюдений // Радиотехника. 2010. № 2. С. 4–15.
20. **Mihajlovic Z., Goluban A., Zagar M.** Frequency domain analysis of B-spline interpolation // Proc. of the IEEE Intern. Symp. on Industrial Electronics. 1999. Vol. 1. P. 193–198.
21. **Guo W., Dai M., Ombao H. C., Von Sachs R.** Smoothing spline ANOVA for time-dependent spectral analysis // Journ. Amer. Stat. Assoc. 2003. **98**, N 463. P. 643–652.
22. **Kukushkin Y. A., Maistrov A. I., Bogomolov A. V.** Rhythmocardiogram approximation methods for calculation of spectral parameters of cardiac rhythm variability // Biomed. Eng. 2010. **44**, N 3. P. 92–103.

23. **Просочкин А. С.** Исследование спектра полиномиальных сплайнов // Цифровая обработка сигналов. 2008. № 4. С. 41–43.
24. **Злочевский М. С.** Об использовании априорной информации при восстановлении зависимости по эмпирическим медико-биологическим сигналам // Автоматика и телемеханика. 1987. Вып. 5. С. 179–182.
25. **Shumilov B. M., Esharov E. A., Arkabaev N. K.** Construction and optimization of predictions on the basis of first-degree recurrence splines // Numer. Analys. and Appl. 2010. **3**, N 2. P. 186–198.
26. **Воскобойников Ю. Е., Колкер А. Б.** Аппроксимация изолиний изображений сглаживающими сплайнами // Автометрия. 2003. **39**, № 4. С. 3–12.

Поступила в редакцию 30 марта 2017 г.
