

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.3.08 + 519.2

ДИСКРЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ*

А. Л. Резник¹, А. В. Тузиков², А. А. Соловьев¹, А. В. Торгов¹

¹Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,

630090, Россия, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1

²Объединённый институт проблем информатики НАН Беларуси,

220012, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 6

E-mail: reznik@iae.nsk.su

tuzikov@newman.bas-net.by

Представлен комбинаторно-дискретный подход к решению непрерывных вероятностных задач, возникающих при анализе случайных точечных структур. В его основе лежит замена вычислительных схем, базирующихся на расчёте громоздких многомерных интегральных выражений, схемами, не требующими применения аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Ещё одна отличительная особенность исследования — это то, что для ранжирования случайных взаимозависимых числовых последовательностей системно применяются обобщённые числа Каталана, которые являются многомерным расширением классической последовательности Каталана.

Ключевые слова: случайные компактные группировки, компьютерные аналитические выкладки, обобщённые числа Каталана.

DOI: 10.15372/AUT20180501

Введение. Для решения многих задач распознавания образов и анализа изображений требуется знание априорной вероятности того, что в процессе генерации случайного поля, формируемого малоразмерными (в идеале — точечными) сигнальными источниками, не будет образовано ни одного локального сгущения. Под последним в данном случае понимается компактный фрагмент поля, который имеет ограниченный размер и содержит количество сигнальных объектов, превосходящее некое заранее заданное пороговое значение. Потребность в расчёте частоты появления локальных сгущений возникает, например, при регистрации однородных по мощности точечных источников излучения, проводимой с помощью телевизионного сканирования исходного поля одним фотоприёмным устройством либо линейкой фотоприёмников [1], а также при поиске случайных импульсно-точечных источников [2]. В этом случае сбой в определении истинных координат очередного сигнального источника наступает в тот момент, когда суммарное количество источников в текущем окне приёмного устройства превысит число пороговых уровней сканирующей апертуры. В работах [3, 4] показано, как двумерная задача, связанная с отысканием вероятности безошибочной регистрации координат малоразмерных объектов, формирующих случайное пуассоновское изображение, может быть редуцирована к следующей весьма простой по постановке одномерной задаче (которая на сегодняшний день, к сожалению, не имеет общего аналитического решения): какова вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ события, состоящего в том,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства научных организаций (государственная регистрация № АААА-А17-117052410034-6) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-00001).

что при случайном бросании n точек на интервал $(0, 1)$ не будет образовано ни одной ε -группировки, содержащей более k точек?

Ответ на этот вопрос необходимо знать в тех случаях, когда требуется обеспечить заданную надёжность регистрации случайного поля, которая, в свою очередь, зависит от размеров сканирующей апертуры, количества её пороговых уровней и мощности сигнального источника-генератора. Правильный выбор параметров влияет и на общую продолжительность процесса регистрации. Заметим, что сформулированная выше задача-вопрос непрерывна по своей математической постановке, так как функция $P_{n,k}(\varepsilon)$, являющаяся её решением, сама непрерывна и зависит от непрерывного параметра ε . Особенностью данной работы является то, что продвигаться в решении этой непрерывной задачи предлагается поэтапно с использованием нестандартных комбинаторно-дискретных методов.

Постановка задачи. Существующие способы решения проблем, связанных со случайным разбиением интервала [5–8], а именно к ним относится поставленная во введении задача-вопрос, не позволяют найти замкнутые аналитические формулы, по которым вычисляются вероятности $P_{n,k}(\varepsilon)$ при произвольных значениях целочисленных параметров n и k . На сегодняшний день общее аналитическое соотношение, описывающее вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$, известно лишь для случая $k = 1$ [9, 10]:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = (1 - (n - 1)\varepsilon)^n, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1/(n - 1). \quad (1)$$

Вообще, при $k = 1$ формула (1) рассчитывается относительно просто и сделано это может быть несколькими способами. Например, в [9] вероятность получена как результат интегрирования многомерного повторного интеграла:

$$P_{n,1}(\varepsilon) = n! \int_{(n-1)\varepsilon}^1 dx_n \left\{ \int_{(n-2)\varepsilon}^{x_n - \varepsilon} dx_{n-1} \cdots \left\{ \int_{2\varepsilon}^{x_4 - \varepsilon} dx_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{x_3 - \varepsilon} dx_2 \left\{ \int_0^{x_2 - \varepsilon} dx_1 \right\} \right\} \right\} \right\}.$$

Когда параметр $k \neq 1$, получить замкнутую аналитическую зависимость, подобную формуле (1), не удаётся. Для этого случая нами найдены частные формулы $P_{n,k}(\varepsilon)$, справедливые для фиксированных целочисленных параметров n и k в диапазоне значений $k \leq n \leq 14$. Такие формулы были рассчитаны с применением программ, осуществляющих трудоёмкие аналитические выкладки для вычисления многомерных интегралов по выпуклым многогранникам в n -мерном пространстве. Кроме того, в [3, 4] в результате анализа программно рассчитанных частных решений задачи получены замкнутые относительно целочисленного параметра n аналитические соотношения, которыми описывается вероятность $P_{n,k}(\varepsilon)$ в отдельных диапазонах изменения непрерывной переменной ε для случая, когда параметр k равен 2. В частности, для чётных значений n на участке $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2) - 1)$ нами установлена «подсказанная» компьютером формула

$$P_{n,2}(\varepsilon) = (2/n)C_n^{(n/2)-1}(1 - ((n/2) - 1)\varepsilon)^n. \quad (2)$$

Как уже было отмечено, найти общее решение в виде замкнутых аналитических формул для произвольных значений k в отличие от случая $k = 1$ существенно сложнее, и для этого есть несколько причин. Во-первых, при $k > 1$ решение $P_{n,k}(\varepsilon)$ нельзя представить в таком же компактном виде, как формулу (1), поскольку в этом случае оно описывается не одним, а несколькими степенными полиномами от параметра ε , состыкованными в нескольких узловых точках. Такая функция принципиально не может быть описана единственным повторным интегралом (например, уже при $k = 2$ формула $P_{n,k}(\varepsilon)$ видоизменяется в зависимости от чётности n). Во-вторых, при $k > 1$ нахождение закономерностей $P_{n,k}(\varepsilon)$

на каждом из диапазонов изменения параметра ε требует создания для каждого из них индивидуальной вычислительной схемы, что в большинстве случаев приводит к необходимости решения весьма трудоёмких вероятностных подзадач. Усложняет расчёты ещё и то обстоятельство, что во всех таких подзадачах (т. е. во всех диапазонах изменения параметра ε) возникают разные модификации обобщённых чисел Каталана, знание явного вида которых требуется при упорядочении взаимозависимых случайных числовых последовательностей.

Целью данного исследования является разработка нового подхода к отысканию вероятностных зависимостей $P_{n,k}(\varepsilon)$, при котором на заключительной стадии нахождения замкнутых аналитических формул исключается этап проведения трудоёмких вычислений, связанных с расчётом многомерных интегралов, а все необходимые выкладки осуществляются исключительно методами комбинаторно-дискретного анализа. Практическая реализация предлагаемого подхода будет продемонстрирована далее на примере расчёта приведённых выше непрерывных вероятностных формул (1) и (2) с помощью средств дискретной математики и перечислительной комбинаторики, не требующих применения аппарата дифференциального и интегрального исчисления.

Комбинаторно-дискретное доказательство вероятностной формулы (1).

Прежде чем приступить к доказательству формулы (1), приведём уточнённую постановку задачи: требуется найти вероятность $P_{n,1}(\varepsilon)$ того, что при случайном бросании n точек на интервал $(0, 1)$ расстояние между любыми ближайшими соседями будет не менее ε .

Доказательство будем вести по индукции. Сначала (первый этап) установим, что в диапазоне $1/n < \varepsilon < 1/(n - 1)$ вероятность $P_{n,1}(\varepsilon)$ задаётся соотношением (1). На втором этапе обоснуем индукционный шаг, а именно из предположения о справедливости формулы (1) в диапазоне $1/(n+J) < \varepsilon < 1/(n+J-1)$ (здесь J — некое целое неотрицательное число) докажем её справедливость для следующего значения $J = J + 1$ (т. е. для диапазона $1/(n + J + 1) < \varepsilon < 1/(n + J)$). В итоге в соответствии с принципом математической индукции получим формулу (1), справедливую для всех значений $J = \overline{0, \infty}$ и, как следствие, верную во всём диапазоне $0 < \varepsilon < 1/(n - 1)$.

Этап 1. Введём термин «успешное ε -бросание», обозначающий бросание точек на интервал, при котором все ближайшие соседи удалены друг от друга на расстояние, превышающее ε . Заметим (это понадобится нам далее), что в вероятностно-статистическом плане успешное ε -бросание n точек на интервал $(0, L)$ эквивалентно успешному бросанию n точек на интервал $(0, 1)$ — надо лишь параметр ε нормировать на длину интервала L .

Переходя к доказательству утверждения первого этапа, перепишем ограничение $1/n < \varepsilon < 1/(n - 1)$ в эквивалентной форме: $(n - 1)\varepsilon < 1 < n\varepsilon$. При соблюдении этого условия ε -бросание n точек на интервал $(0, 1)$ успешно только тогда, когда оно соответствует схеме, приведённой на рис. 1.

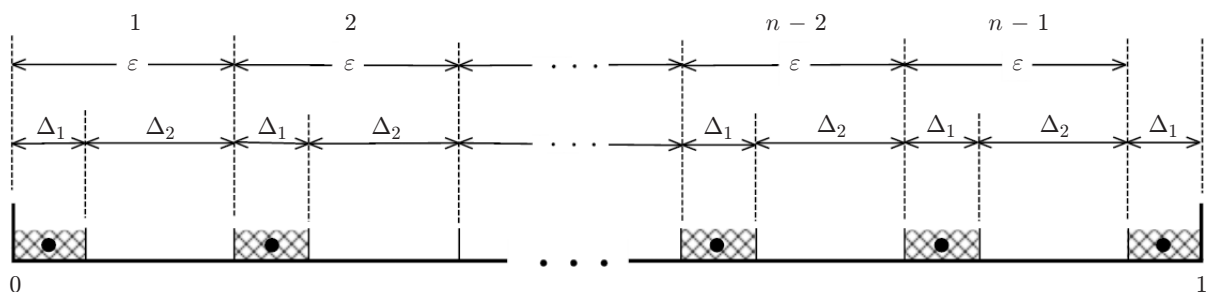


Рис. 1. Схема успешного ε -бросания n точек на интервал $(0, 1)$. Случай $1/n < \varepsilon < 1/(n - 1)$;
 $\Delta_1 = 1 - (n - 1)\varepsilon$, $\Delta_2 = \varepsilon - \Delta_1 = n\varepsilon - 1$

Вероятность $P_{n,1}(\varepsilon)$ такого события есть $P_{n,1}(\varepsilon) = P_1 \times P_2 \times P_3$, где

1) $P_1 = (n\Delta_1)^n$ — вероятность того, что все n брошенных точек попадут в заштрихованную область (см. рис. 1);

2) $P_2 = n!/n^n$ — вероятность того, что при условии попадания всех точек в заштрихованную область все они распределятся по одной в каждом из n подынтервалов Δ_1 ;

3) $P_3 = 1/n!$ — вероятность того, что после упорядочения координат n случайных точек (т. е. после преобразования их в вариационный ряд $0 < x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n} < 1$) и «переформатирования» каждого из значений x_{i_j} в их «остатки по модулю ε » снова будет получена монотонно возрастающая последовательность; выполнение этого условия необходимо и достаточно для того, чтобы все выпавшие точки были удалены друг от друга на расстояние, превышающее ε .

Перемножая вероятности P_1, P_2, P_3 и учитывая, что $\Delta_1 = 1 - (n - 1)\varepsilon$, окончательно получим $P_{n,1}(\varepsilon) = (\Delta_1)^n = (1 - (n - 1)\varepsilon)^n$, т. е. первый этап доказательства завершён.

Этап 2. Теперь перейдём к обоснованию индукционного перехода от J к $J + 1$. Итак, считаем доказанным, что при бросании любого количества точек $n > 1$ на интервал $(0, 1)$ формула (1) соблюдается на J -м шаге, т. е. в диапазоне $1/(n + J) < \varepsilon < 1/(n + J - 1)$ (или, что то же самое, при $(n + J - 1)\varepsilon < 1 < (n + J)\varepsilon$). На $(J + 1)$ -м шаге все успешные ε -бросания n точек на интервал $(0, 1)$ могут быть представлены как совокупность $n + 1$ ($i = \overline{0, n}$) непересекающихся между собой исходов, один из примеров которого показан на рис. 2.

В такой схеме полная вероятность успешного ε -бросания есть

$$P_{n,1}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^n [P_1(i) \times P_2(i) \times P_3(i) \times P_4(i) \times P_5(i)],$$

где

1) $P_1(i) = \left\{ \binom{n}{i} (i\varepsilon)^i (1 - i\varepsilon)^{n-i} \right\}$ — вероятность того, что из n брошенных на интервал $(0, 1)$ точек i попадут в подынтервал $(0, i\varepsilon)$, а оставшиеся $(n - i)$ точек — в подынтервал $(i\varepsilon, 1)$;

2) $P_2(i) = \left\{ \frac{i!}{i^i} \right\}$ — вероятность того, что при условии попадания i точек в подынтервал $(0, i\varepsilon)$ все они распределятся в точности по одной в каждый из i левых ε -дискретов;

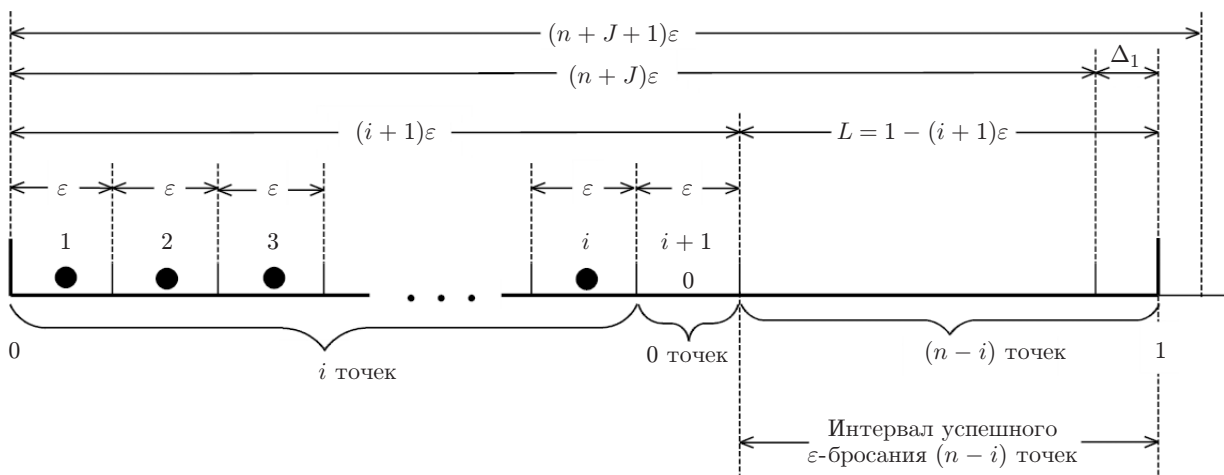


Рис. 2. Пример одного из успешных ε -бросаний n точек на интервал $(0, 1)$: $(J+1)$ -й шаг индукции

3) $P_3(i) = \left\{ \frac{1}{i!} \right\}$ — вероятность того, что внутридискретные (т. е. взятые «по модулю ε ») координаты каждой из i левых точек образуют монотонно возрастающую последовательность (это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы i левых точек были разнесены между собой на расстояние, превышающее ε);

4) $P_4(i) = \left\{ \left(\frac{1 - (i+1)\varepsilon}{1 - i\varepsilon} \right)^{n-i} \right\}$ — вероятность того, что при условии попадания $(n-i)$ точек в подынтервал $(i\varepsilon, 1)$ все они окажутся в подынтервале $((i+1)\varepsilon, 1)$ (или, что то же самое, $(i+1)$ -й ε -дискрет окажется пуст);

5) $P_5(i) = \left\{ \left(1 - (n-i-1) \frac{\varepsilon}{1 - (i+1)\varepsilon} \right)^{n-i} \right\} = \left\{ \left(\frac{1 - n\varepsilon}{1 - (i+1)\varepsilon} \right)^{n-i} \right\}$ — вероятность того, что набор из $(n-i)$ точек, попавших в подынтервал $((i+1)\varepsilon, 1)$, представляет собой удачное ε -бросание.

Справедливость соотношения $P_5(i)$ обеспечена предположением индукции — надо лишь дополнительно нормировать параметр ε на длину интервала $L = 1 - (i+1)\varepsilon$, чтобы привести рассмотрение к интервалу $(0, 1)$. Тот факт, что соотношение $P_5(i)$ верно по предположению индукции, требует небольшого пояснения.

Пояснение к соотношению $P_5(i)$. По допущению индукции формула (1) верна в диапазоне $1/(n+J) < \varepsilon < 1/(n+J-1)$, т. е. при $n+J-1 < 1/\varepsilon < n+J$. Мы рассматриваем индукционный переход $J \Rightarrow J+1$, т. е. анализируем диапазон $1/(n+J+1) < \varepsilon < 1/(n+J)$. Таким образом, на $(J+1)$ -м шаге считается выполненным ограничение

$$n+J < \frac{1}{\varepsilon} < n+J+1. \quad (3)$$

Переходя к $(n-i)$ точкам, попавшим в интервал $(0, L)$, где $L = 1 - (i+1)\varepsilon$, заметим, что для приведения этого случая к интервалу $(0, 1)$ необходимо нормировать параметр ε на длину интервала $\varepsilon_0 = \varepsilon/(1 - (i+1)\varepsilon)$, откуда $1/\varepsilon = 1/\varepsilon_0 + (i+1)$. Подставляя данное соотношение в (3), имеем

$$n+J < \frac{1}{\varepsilon_0} + (i+1) < n+J+1 \quad \text{или} \quad (n-i) + J - 1 < \frac{1}{\varepsilon_0} < (n-i) + J.$$

Это означает, что $(n-i)$ точек, попавших в интервал $((i+1)\varepsilon, 1)$, подпадают под действие индукционного допущения, при котором справедлива формула (1), т. е.

$$P_5(i) = (1 - (n-i-1)\varepsilon_0)^{n-i} = \left(1 - (n-i-1) \frac{\varepsilon}{1 - (i+1)\varepsilon} \right)^{n-i} = \left(\frac{1 - n\varepsilon}{1 - (i+1)\varepsilon} \right)^{n-i}.$$

Пояснение к соотношению $P_5(i)$ завершено.

Перемножая теперь вероятности $P_1(i), P_2(i), P_3(i), P_4(i), P_5(i)$, получаем

$$\begin{aligned} P_{n,1}(\varepsilon) &= \sum_{i=0}^n [P_1(i) \times P_2(i) \times P_3(i) \times P_4(i) \times P_5(i)] = \sum_{i=0}^n \left[\left\{ \binom{n}{i} (i\varepsilon)^i (1-i\varepsilon)^{n-i} \right\} \times \left\{ \frac{i!}{i^i} \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{i!} \right\} \times \left\{ \left(\frac{1 - (i+1)\varepsilon}{1 - i\varepsilon} \right)^{n-i} \right\} \times \left\{ \left(\frac{1 - n\varepsilon}{1 - (i+1)\varepsilon} \right)^{n-i} \right\} \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \binom{n}{i} \varepsilon^i (1 - n\varepsilon)^{n-i} \right\} = (1 - (n-1)\varepsilon)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, индукционный переход от J к $J + 1$ проведён. Поэтому в соответствии с принципом математической индукции формула (1) верна во всех поддиапазонах $1/(n+J) < \varepsilon < 1/(n+J-1)$ при любом значении $J = \overline{0, \infty}$, т. е. она верна во всём диапазоне $0 < \varepsilon < 1/(n-1)$. Доказательство формулы (1) завершено.

Комбинаторно-дискретное доказательство вероятностной формулы (2).

Ещё одним примером успешного применения комбинаторно-дискретных методов к проблеме отыскания замкнутых аналитических формул, описывающих непрерывные вероятностные зависимости $P_{n,k}(\varepsilon)$, является доказательство формулы (2). Важную роль в этом процессе сыграли созданные нами программы машинной аналитики. Их применение позволило не только значительно продвинуться в вычислении частных формул $P_{n,k}(\varepsilon)$, но и установить новые зависимости. Так, по результатам расчётов нами была высказана гипотеза о том, что в случае $k = 2$ при чётных значениях n на одном из участков изменения свободного параметра ε (именно в диапазоне $1/(n/2) < \varepsilon < 1/((n/2) - 1)$) справедлива формула (2). Первое, правда, слишком громоздкое обоснование этого соотношения было представлено в [11]. Далее приводится более компактное доказательство исключительно дискретными методами, не предполагающими использования аппарата дифференциального и интегрального исчисления, но требующими применения классических чисел Каталана [12, 13].

Доказательство компьютерной гипотезы. Итак, требуется доказать, что при случайном бросании $n = 2m$ точек x_1, x_2, \dots, x_{2m} на интервал $(0, 1)$ вероятность того, что внутри него не образуется ни одного подынтервала Ω_ε длиной ε , содержащего более двух точек, на участке $1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$ задаётся формулой

$$P = (C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1})(1 - (m-1)\varepsilon)^{2m}. \quad (4)$$

Заметим, что выражение (4) эквивалентно формуле-гипотезе (2) и отличается от неё лишь формой представления первого сомножителя, который не зависит от параметра ε и является m -м элементом классической последовательности Каталана. Далее будет сформулирован ряд утверждений, прямым следствием которых выступает формула (4).

Утверждение 1. Любое удовлетворяющее условиям задачи размещение $2m$ случайных точек внутри интервала $(0, 1)$ должно подчиняться схеме, изображённой на рис. 3. Иными словами, все заштрихованные подынтервалы Δ_i , каждый из которых имеет фиксированную длину $\Delta = 1 - (m-1)\varepsilon$, обязаны содержать по две точки, а в «зазоры» между ними не может попасть ни одна случайная точка. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно преобразовать неравенство $1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$ в эквивалентную форму $(m-1)\varepsilon < 1 < m\varepsilon$.

Утверждение 2. Вероятность P_1 того, что при случайном бросании $n = 2m$ точек на интервал $(0, 1)$ все они попадут в соответствии со схемой, изображённой на рис. 1,

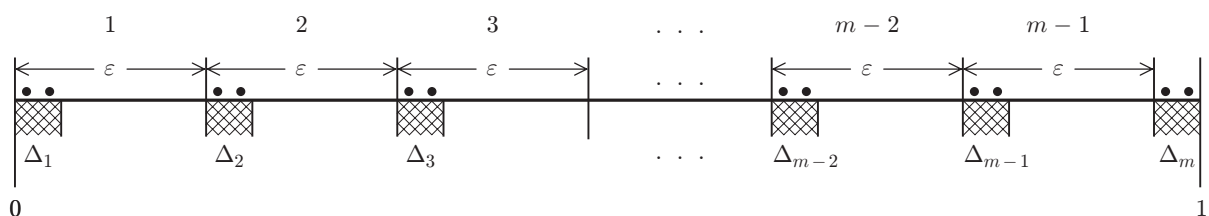


Рис. 3. Схема размещения чётного ($n = 2m$) числа случайных точек на интервале $(0, 1)$, когда ни один подынтервал $\Omega_\varepsilon \subset (0, 1)$ длины ε не содержит более двух точек. Случай $1/m < \varepsilon < 1/(m-1)$

задаётся произведением

$$P_1 = Q_1 \times R_1 = [m(1 - (m - 1)\varepsilon)^{2m}] \times \left[\frac{(2m)!}{m^{2m} 2^m} \right] = (1 - (m - 1)\varepsilon)^{2m} \frac{(2m)!}{2^m}. \quad (5)$$

В этом выражении первый сомножитель Q_1 соответствует вероятности попадания всех $2m$ выброшенных точек в общую зону $\bigcup_{i=1}^{i=m} \Delta_i$, объединяющую m заштрихованных подынтервалов Δ_i , а второй сомножитель R_1 соответствует вероятности того, что при этом в каждом заштрихованном подынтервале окажется ровно по две точки (соотношение для этой вероятности $R_1 = (2m)!/(m^{2m} 2^m)$ проще всего доказать по индукции).

Утверждение 3. Вероятность того, что при соблюдении схемы, приведённой на рис. 1, в вариационном ряду $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{2m}}$ минимальное расстояние между ближайшими нечётными точками и минимальное расстояние между ближайшими чётными точками превысит ε (это условие эквивалентно тому, что ни один из внутренних ε -подынтервалов Ω_ε не содержит более двух точек), задаётся соотношением

$$P_2 = 2^m \frac{C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1}}{(2m)!}. \quad (6)$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (6), сопоставим два эксперимента.

В первом эксперименте проводится $n = 2m$ независимых наблюдений случайной величины ξ . Наблюдённые значения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m}$ (заметим, что они приведены в порядке наблюдения, но не упорядочены по возрастанию) заносятся в таблицу первого рода, которая имеет размеры $2 \times m$.

Во втором эксперименте формируется таблица второго рода размером $2 \times m$.

Требуется ответить на вопросы относительно двух представленных таблиц:

— вопрос № 1: какова вероятность того, что таблица первого рода окажется таблицей Юнга (т. е. таблицей, в которой элементы возрастают в каждой строке и в каждом столбце)?

— вопрос № 2: какова вероятность того, что таблица второго рода окажется таблицей Юнга?

Для первого эксперимента искомая вероятность определяется соотношением

$$P = \frac{C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1}}{(2m)!}. \quad (7)$$

Здесь числитель соответствует количеству различных таблиц Юнга размером $2 \times m$ (известно [12], что число таблиц Юнга совпадает с m -м элементом классической последовательности Каталана, а именно эта величина и представлена в числителе), а знаменатель — общему числу перестановок из $2m$ элементов.

В отношении второго эксперимента следует заметить, что в случае, когда таблица второго рода является таблицей Юнга, то к ней приводит любая из $(C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^m) = 2^m$ таблиц, получающихся перестановкой пары элементов в любом сочетании из m имеющихся столбцов. Поэтому для получения правильного ответа на вопрос № 2 вероятность (7) должна быть умножена на 2^m , т. е. мы доказали формулу (6).

Таблица первого рода

ξ_1	ξ_3	\dots	ξ_{2m-1}
ξ_2	ξ_4	\dots	ξ_{2m}

Таблица второго рода

$\min(\xi_1, \xi_2)$	$\min(\xi_3, \xi_4)$	$l \dots$	$\min(\xi_{2m-1}, \xi_{2m})$
$\max(\xi_1, \xi_2)$	$\max(\xi_3, \xi_4)$	\dots	$\max(\xi_{2m-1}, \xi_{2m})$

Теперь остаётся убедиться в том, что схема на рис. 1 в точности соответствует второму эксперименту. Для этого достаточно ввести переменные $\tilde{x}_{i_j} = x_{i_j} - \varepsilon \times \text{entier}((j-1)/2)$, $j = \overline{1, 2m}$, т. е. заменить координаты случайных точек из вариационного ряда $\{x_{i_j}\}$ их координатами, взятыми по модулю ε . Очевидно, что при соблюдении схемы на рис. 1 две минимальные дистанции: одна внутри совокупности чётных точек, а другая внутри совокупности нечётных точек — одновременно превышают ε тогда и только тогда, когда возрастают обе последовательности $\{y_1 < y_2 < \dots < y_m\}$ и $\{z_1 < z_2 < \dots < z_m\}$, где $y_j = \min(\tilde{x}_{i_{2j-1}}, \tilde{x}_{i_{2j}})$, $j = \overline{1, m}$; $z_j = \max(\tilde{x}_{i_{2j-1}}, \tilde{x}_{i_{2j}})$, $j = \overline{1, m}$. Следовательно, второй эксперимент в точности соответствует схеме, приведённой на рис. 1.

Таким образом, формула (4) справедлива только при одновременном выполнении утверждений 1 и 2. Перемножая между собой вероятности (5) и (6), получаем (4), что свидетельствует о справедливости формулы-гипотезы (2).

Заключение. Разработанные дискретные методы решения задач, связанных с анализом случайных точечных структур, применимы не только при обработке случайных сигналов и изображений, но также в теории надёжности (при поиске неисправностей, проявляющихся в виде перемежающихся отказов), при регистрации ядерных частиц счётчиками, обладающими «мёртвым» временем, при исследовании распределённых вычислительных систем и систем передачи данных, при изучении многоканальных обслуживающих систем с постоянным временем обслуживания и во многих других научно-технических приложениях. Представленные здесь результаты свидетельствуют об эффективности разработанных программно-аналитических и комбинаторно-дискретных методов. Это даёт основание полагать, что их дальнейшее развитие может привести к новым научным результатам. Таким ожидаемым результатом является, в частности, полное решение задачи безошибочной регистрации случайных точечных изображений с использованием сканирующей апертуры с произвольным числом пороговых уровней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов В. М., Искольдский А. М., Лившиц З. А., Крендель Ю. М. О характеристиках различных методов считывания изображений дискретных структур // Автометрия. 1973. № 1. С. 3–7.
2. Резник А. Л., Тузиков А. В., Соловьев А. А., Торгов А. В. Оптимальные по быстродействию алгоритмы поиска случайных импульсно-точечных источников для систем с несколькими приёмными устройствами // Автометрия. 2017. 53, № 3. С. 3–11.
3. Reznik A. L., Solov'ev A. A., Torgov A. V. On the probability of the formation of local groups in random point images // Pattern Recogn. and Image Analysis. 2016. 26, N 4. P. 714–719.
4. Резник А. Л., Тузиков А. В., Соловьев А. А., Торгов А. В. Анализ случайных точечных изображений с использованием программ для символьных вычислений и обобщённых чисел Каталана // Автометрия. 2016. 52, № 6. С. 3–11.
5. Darling D. A. On class problems related to the random division of an interval // Ann. Math. Statist. 1953. 24, N 2. P. 239–253.
6. Barton D. E., David F. N. Combinatorial extreme value distributions // Mathematika. 1959. 6, N 1. P. 63–76.
7. Naus J. I. Some probabilities, expectations, and variances for the size of largest clusters and smallest intervals // Journ. Amer. Statist. Assoc. 1966. 61, N 316. P. 1191–1199.
8. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 336 с.
9. Parzen E. Modern Probability Theory and Its Applications. New York — London: John Wiley and Sons, 1960. 464 p.

10. **Уилкс С.** Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
11. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А.** Компьютерно-аналитический расчёт вероятностных характеристик процесса считывания случайных точечных изображений // Автометрия. 2011. **47**, № 1. С. 10–16.
12. **Stanley R. P.** Enumerative Combinatorics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Vol. 2. 595 p.
13. **Hilton P., Pedersen J.** Catalan numbers, their generalization, and their uses // Math. Intell. 1991. **13**, N 2. P. 64–75.

Поступила в редакцию 4 мая 2018 г.
