

УДК 531.749.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЛОГАБАРИТНОГО ТРЁХКОМПОНЕНТНОГО ФЕРРОЗОНДОВОГО ДАТЧИКА АЗИМУТА

Д. Г. Миловзоров, В. Х. Ясовеев

*Уфимский государственный авиационный технический университет,
450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12
E-mail: dgmilovzorov@yandex.ru*

Рассматриваются задачи определения параметров пространственной ориентации твёрдых тел. Выполняется анализ известных результатов математического моделирования трёхкомпонентного феррозондового датчика азимута. Осуществляется разработка и анализ математических моделей подобного датчика азимута с произвольно ориентированными феррозондами.

Ключевые слова: феррозондовый магнитометр, акселерометр, датчик азимута, математическое моделирование, трёхкомпонентный феррозондовый датчик.

DOI: 10.15372/AUT20180506

Введение. Как известно, для определения параметров пространственной ориентации твёрдых тел используются первичные преобразователи, регистрирующие физические величины различной природы. Так, для измерения направления движения объекта в горизонтальной плоскости часто применяются магнитометрические измерительные преобразователи, или магнитометры, к которым относятся и трёхкомпонентные феррозондовые датчики.

Традиционные трёхкомпонентные феррозондовые датчики ориентированы в корпусе аппаратуры по трём взаимно перпендикулярным осям, что ограничивает минимальный внешний размер корпуса такого конструктивного исполнения ввиду значительного линейного размера самих феррозондов. В данной работе предлагается размещение феррозондовых датчиков внутри аппаратуры произвольно относительно базовой системы координат, связанной с корпусом. При этом возникает необходимость алгоритмического учёта неортогональной установки первичных преобразователей с использованием соответствующих математических моделей.

Задача математического моделирования трёхкомпонентного феррозондового датчика азимута (ТФДА) непосредственно связана с преобразованиями базисов — правых ортонормированных систем координат при их поворотах вокруг собственных осей на углы Эйлера — Крылова [1, 2]. При выполнении моделирования приняты следующие положения.

Основной (исходный) базис $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$ связан с двумя неколлинеарными векторами: \mathbf{G} — вектором ускорения свободного падения (или силы тяжести) и \mathbf{M} — вектором напряжённости (или индукции) геомагнитного поля (рис. 1).

Исходный базис образован таким образом, что его ось $0z_0$ совпадает с направлением вектора ускорения свободного падения \mathbf{G} , ось $0x_0$ лежит в горизонтальной плоскости и направлена на север магнитного меридиана Земли, а ось $0y_0$, также располагающаяся в горизонтальной плоскости, перпендикулярна плоскости $0x_0z_0$ и дополняет правую ортогональную систему координат [3].

Полный вектор индукции геомагнитного поля \mathbf{M} находится в плоскости $0x_0z_0$ исходного базиса и раскладывается на две составляющие: \mathbf{H} — горизонтальную и \mathbf{Z} — верти-

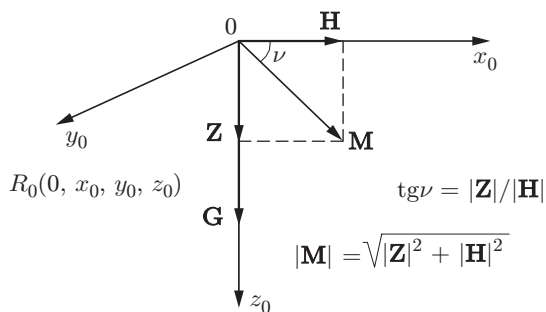


Рис. 1. Исходный базис $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$ и его элементы

кальную. Причём соотношения величин модулей этих составляющих связаны углом магнитного наклона ν , определяемым их отношением: $\operatorname{tg} \nu = |\mathbf{Z}|/|\mathbf{H}|$, величина которого зависит от широты местности — на экваторе Земли $\nu = 0^\circ$, т. е. вектор \mathbf{M} горизонтален, а на полюсах $\nu = 90^\circ$ (270°), т. е. вектор \mathbf{M} вертикален.

Целью данного исследования является разработка и анализ математических моделей трёхкомпонентного датчика азимута с произвольно ориентированными феррозондами.

Общий подход к математическому моделированию ТФДА. В классических задачах пространственной ориентации в целом при вертикальном исходном положении корпуса ТФДА переход от основного (исходного) базиса $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$ к базису корпуса $R_b(0, x_b, y_b, z_b)$ осуществляется его плоскими поворотами вокруг своих осей на определённые углы (рис. 2) [4, 5]. Первый поворот происходит вокруг оси $0z_0$ на азимутальный угол α , второй — вокруг оси $0y_0$ на зенитный угол θ , отсчитываемый в вертикальной плоскости между корпусом ТФДА и вектором ускорения свободного падения в данной точке. Зенитный угол характеризует наклон корпуса прибора. Третий поворот выполняется вокруг оси $0z_0$ на визирный угол φ — угол поворота корпуса ТФДА вокруг собственной продольной оси, отсчитываемой в апсидальной плоскости, перпендикулярной траектории движения. Причём за начало отсчёта визирного угла $\varphi = 0$ принимается след (линия пересечения) двух плоскостей: вертикальной и апсидальной — с направлением по ускорению свободного падения.

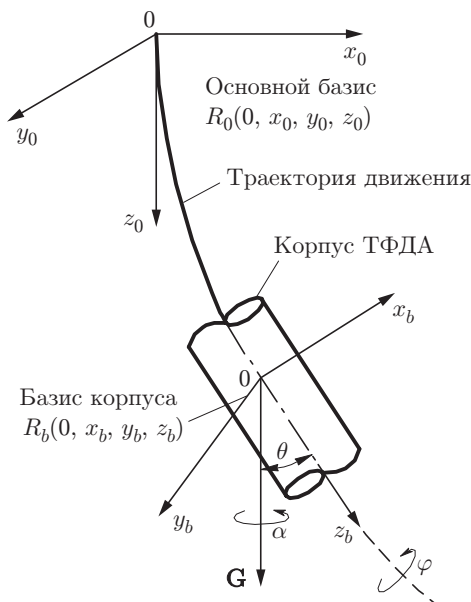


Рис. 2. Перемещение ТФДА по криволинейной траектории

Визирный угол φ относится к так называемым технологическим параметрам и используется для определения значений азимута при обработке результатов измерений.

В соответствии с матричным методом преобразования координат [1, 2] для обозначенных отдельных плоских поворотов применительно к векторам \mathbf{G} и \mathbf{M} составляются следующие векторно-матричные уравнения (ВМУ):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{R_b} &= A_\varphi(z)A_\theta(y)\mathbf{G}_{R_0}, \\ \mathbf{M}_{R_b} &= A_\varphi(z)A_\theta(y)A_\alpha(z)\mathbf{M}_{R_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где \mathbf{G}_{R_0} и \mathbf{M}_{R_0} — проекции векторов \mathbf{G} и \mathbf{M} в основном базисе $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$; \mathbf{G}_{R_b} и \mathbf{M}_{R_b} — проекции векторов \mathbf{G} и \mathbf{M} в базисе корпуса ТФДА $R_b(0, x_b, y_b, z_b)$; $A_\varphi(z)$, $A_\theta(y)$ и $A_\alpha(z)$ — матрицы направляющих косинусов, соответствующие плоским поворотам базиса $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$ на углы Эйлера — Крылова α , θ и φ .

При таком подходе ставится задача выявления функциональных зависимостей измеряемых проекций \mathbf{G}_{R_b} и \mathbf{M}_{R_b} с углами α , θ и φ с последующим решением обратной задачи — определение базовых математических моделей ТФДА, устанавливающих связь искомых углов α , θ и φ с измеряемыми проекциями на оси чувствительности датчиков (см. рис. 2).

Для однозначного нахождения искомого угла ТФДА азимута α требуются измеренные значения двух других углов пространственной ориентации — зенитного θ и визирного φ . Данные углы могут быть определены с помощью трёхкомпонентного акселерометрического датчика, который выполняется в едином конструктиве с ТФДА.

Анализ известных базовых математических моделей ТФДА. При применении матричного метода преобразования координат в моделировании распространённой компоновочной структуры преобразователя азимута (рис. 3) с трёхкомпонентными феррозондовыми и акселерометрическими датчиками и с учётом соответствующих аналитических преобразований при перемножении отдельных матриц в общих ВМУ (1) получают следу-

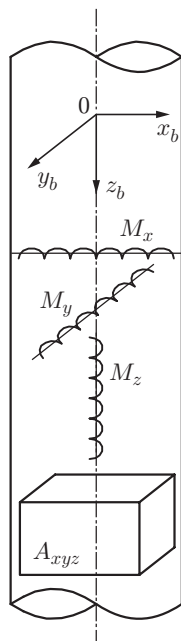


Рис. 3. Компоновочная структура преобразователя азимута с трёхкомпонентными феррозондовыми и акселерометрическими датчиками

ющие системы скалярных уравнений [4, 5]:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= -\cos \varphi \cdot \sin \theta, \\ g_y &= \sin \varphi \cdot \sin \theta, \\ g_z &= \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} m_x &= [-\sin \nu \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta + \cos \nu (\cos \alpha \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \sin \alpha)], \\ m_y &= [\sin \nu \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta - \cos \nu (\cos \alpha \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi - \sin \varphi \cdot \sin \alpha)], \\ m_z &= \sin \nu \cdot \cos \theta + \cos \nu \cdot \cos \alpha \cdot \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где g_x, g_y, g_z — измеряемые с помощью акселерометров проекции вектора \mathbf{G} ; m_x, m_y, m_z — измеряемые с помощью феррозондов проекции вектора \mathbf{M} ; ν — угол магнитного наклона для конкретной широты местности.

Уравнения (2) и (3) позволяют получить в явном виде базовые статические математические модели для трёхкомпонентного акселерометрического датчика и ТФДА [6, 7]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg}(g_y / -g_x), \\ \theta &= \operatorname{arctg} \left(\sqrt{g_x^2 + g_y^2} / g_z \right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \operatorname{arctg} \frac{m_z \cos \theta + \sin \theta (m_y \sin \varphi - m_x \cos \varphi)}{\sqrt{(m_x \sin \varphi + m_y \cos \varphi)^2 + (m_z \sin \theta + \cos \theta (-m_y \sin \varphi + m_x \cos \varphi))^2}}, \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{-(m_x \sin \varphi + m_y \cos \varphi)}{m_z \cos \theta + \sin \theta (m_y \sin \varphi - m_x \cos \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Заметим, что в выражениях (5) математическая модель $\nu = f(\theta, \varphi, m_i)$ является инвариантной к позиционированию корпуса ТФДА, а математическая модель $\alpha = f(\theta, \varphi, m_i)$ — инвариантной к углу ν , т. е. к широте местности.

В качестве важного момента в анализе известных базовых математических моделей также подчеркнём, что для анализа как самих моделей (4), (5), так и процесса их получения принят ряд допущений:

— статические характеристики первичных измерительных преобразователей (акселерометров и феррозондов) нормированы, т. е. имеют одинаковую крутизну и приведённые к единице масштабирующие коэффициенты каналов вторичного преобразования информационных сигналов;

— все статические характеристики первичных измерительных преобразователей линейны и описываются линейными уравнениями;

— отсутствует температурный дрейф в каналах преобразования информационных сигналов и, как следствие, дополнительные температурные погрешности;

— оси чувствительности всех датчиков (акселерометров и феррозондов) ориентированы строго соосно по отношению к осям базиса корпуса $R_b(0, x_b, y_b, z_b)$, что обуславливает отсутствие инструментальных погрешностей.

Принятые допущения свидетельствуют об идеализированных случаях, в некоторой степени даже гипотетических представлениях о реальных процессах. Аналитические выражения (2) и (3) измеряемых проекций g_x, g_y, g_z и m_x, m_y, m_z , а также базовые математические модели (4), (5) дают общие представления и адекватны лишь для случая взаимно ортогонального расположения феррозондовых датчиков в корпусе прибора.

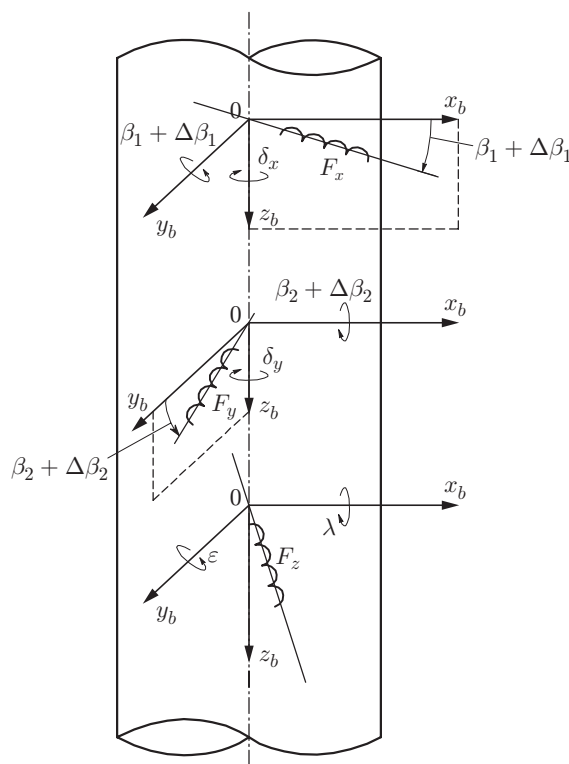


Рис. 4. Дополнительные повороты базиса корпуса ТФДА на углы δ_x, δ_y вокруг оси $0z_b$; $\Delta\beta_1, \epsilon$ вокруг оси $0y_b$; $\Delta\beta_2, \lambda$ вокруг оси $0x_b$

Разработка и анализ математических моделей ТФДА с произвольно ориентированными феррозондами. Применительно к аппаратуре, содержащей феррозондовые датчики F_x, F_y и F_z , линейный размер феррозонда определяет внешний диаметр корпуса прибора. При этом внешние габариты включают толщину стенки охранного кожуха и величину зазора от внутренней поверхности кожуха до торца феррозонда.

Как известно из теории феррозондовых измерительных преобразователей, линейный размер сердечника, отнесённый к площади его поперечного сечения, во многом определяет метрологические характеристики ТФДА. А стремление разработчиков и специалистов к созданию малогабаритных магнитометров, обладающих малым диаметром корпуса, в данном случае входит в противоречие с этим утверждением.

Одним из путей решения данного вопроса является создание малогабаритных ТФДА, в которых феррозондовые датчики располагаются не ортогонально друг другу, а под некоторыми углами (рис. 4).

При разработке математических моделей данного варианта ТФДА нужно принять следующие дополнительные допущения: феррозонд F_x ориентирован в плоскости $0x_b z_b$ и расположен под углом β_1 к оси $0x_b$; феррозонд F_y ориентирован в плоскости $0y_b z_b$ и расположен под углом β_2 к оси $0y_b$. Здесь следует учесть то обстоятельство, что при такой компоновке ТФДА оси чувствительности каждого из феррозондов не ортогональны друг другу. Поэтому для феррозондов F_x и F_y требуется составлять и решать отдельные векторно-матричные уравнения (1), учитывая дополнительные плоские повороты базиса корпуса соответственно на углы β_1 и β_2 :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_x &= A_{\beta_1}(y)\mathbf{M}_{R_b} = A_{\beta_1}(y)A_{\varphi}(z)A_{\theta}(y)A_{\alpha}(z)\mathbf{M}_{R_0}, \\ \mathbf{M}_y &= A_{\beta_2}(x)\mathbf{M}_{R_b} = A_{\beta_2}(x)A_{\varphi}(z)A_{\theta}(y)A_{\alpha}(z)\mathbf{M}_{R_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для получения базовых математических моделей ТФДА необходимо решить ВМУ (6) относительно неизвестных m_x , m_y и m_z :

$$m_x = \frac{M_x + M_z \sin \beta_1}{\cos \beta_1}; \quad m_y = \frac{M_y - M_z \sin \beta_2}{\cos \beta_2}; \quad m_z = M_z, \quad (7)$$

и подставить данные выражения в формулу определения азимута (5).

Таким образом, с помощью элементарных математических преобразований выполнен синтез базовой математической модели ТФДА с принятыми выше допущениями. При этом также нужно отметить, что полученная базовая математическая модель является идеализированной, в которой значения углов β_1 и β_2 известны с абсолютной точностью. В реальных конструкциях ТФДА таких условий добиться практически невозможно: значения углов β_1 и β_2 , определённых экспериментальным путём, будут иметь малые отклонения $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$:

— оси чувствительности феррозондов F_x и F_y могут быть отклонены от плоскостей Ox_bz_b и Oy_bz_b , что соответствует дополнительным поворотам базиса корпуса на углы δ_x и δ_y вокруг оси Oz_b ;

— ось чувствительности феррозонда F_z может быть отклонена от продольной оси корпуса на углы λ и ε соответственно в плоскостях Ox_bz_b и Oy_bz_b .

Тогда согласно этим введённым обозначениям и дополнительным поворотам базиса корпуса векторно-матричные уравнения (6) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_x &= A_{(\beta_1 + \Delta\beta_1)}(y) A_{(\varphi + \delta_x)}(z) A_\theta(y) A_\alpha(z) \mathbf{M}_{R_0}, \\ \mathbf{M}_y &= A_{(\beta_2 + \Delta\beta_2)}(x) A_{(\varphi + \delta_y)}(z) A_\theta(y) A_\alpha(z) \mathbf{M}_{R_0}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

а векторно-матричные уравнения для феррозонда F_z будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{M}_z = A_\lambda(x) A_\varepsilon(y) A_\varphi(z) A_\theta(y) A_\alpha(z) \mathbf{M}_{R_0}, \quad (9)$$

где $A_{\delta_i}(x, y, z)$ — результирующие матрицы, соответствующие дополнительным поворотам.

Для получения выражений уточнённых математических моделей ТФДА (см. рис. 4) нужно решить ВМУ (8) и (9) относительно трёх неизвестных: m_x , m_y , m_z , т. е. относительно «ортогональных» составляющих, и подставить эти выражения в базовые математические модели:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{1}{k_x} \left[M_x - \frac{l_x}{l_y} M_y - \frac{n_x}{n_z} M_z \right]; \\ m_y &= \frac{1}{l_y} \left[M_y - \frac{k_y}{k_x} M_x - \frac{n_y}{n_z} M_z \right]; \quad m_z = \frac{1}{n_z} \left[M_z - \frac{l_z}{l_y} M_y - \frac{k_z}{k_x} M_x \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$k_x = \cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) \cos \delta_x = (\cos \beta_1 \cdot \cos \Delta\beta_1 - \sin \beta_1 \cdot \sin \Delta\beta_1) \cos \delta_x;$$

$$l_x = \cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) \sin \delta_x = (\cos \beta_1 \cdot \cos \Delta\beta_1 - \sin \beta_1 \cdot \sin \Delta\beta_1) \sin \delta_x;$$

$$n_x = -\sin(\beta_1 + \Delta\beta_1) = -(\sin \beta_1 \cdot \cos \Delta\beta_1 + \cos \beta_1 \cdot \sin \Delta\beta_1);$$

$$k_y = -\cos(\beta_2 + \Delta\beta_2) \sin \delta_y = -(\cos \beta_2 \cdot \cos \Delta\beta_2 - \sin \beta_2 \cdot \sin \Delta\beta_2) \sin \delta_y;$$

$$l_y = \cos(\beta_2 + \Delta\beta_2) \cos \delta_y = (\cos \beta_2 \cdot \cos \Delta\beta_2 - \sin \beta_2 \cdot \sin \Delta\beta_2) \cos \delta_y;$$

$$n_y = \sin(\beta_2 + \Delta\beta_2) = \sin \beta_2 \cdot \cos \Delta\beta_2 + \cos \beta_2 \cdot \sin \Delta\beta_2;$$

$$k_z = \cos \lambda \cdot \sin \varepsilon; \quad l_z = -\sin \lambda; \quad n_z = \cos \lambda \cdot \cos \varepsilon.$$

Таким образом, данная совокупность аналитических выражений (10) представляет собой уточнённые математические модели ТФДА с произвольно ориентированными трёхкомпонентными феррозондовыми датчиками.

Заключение. Рассмотренный в предлагаемой работе вариант построения ТФДА и полученные уточнённые математические модели позволяют создавать и использовать малогабаритные магнитометры в целом и преобразователи азимута с произвольно ориентированными трёхкомпонентными феррозондовыми датчиками в частности. Представленный вариант компоновочной схемы даёт возможность разрабатывать аппаратуру, габаритный диаметр датчиковой части которой имеет меньшую величину, чем линейные размеры феррозондов в плоскостях $0x_bz_b$ и $0y_bz_b$ базиса корпуса, а полученные математические модели (10), учитывающие дополнительные углы β_1 и β_2 , позволяют однозначно определять искомые углы α , ν по измеряемым сигналам с произвольно ориентированных датчиков F_x , F_y , F_z в корпусе ТФДА.

Вариант ТФДА имеет несомненное преимущество перед традиционными подходами при создании преобразователей азимута за счёт отсутствия жёстких требований по установке феррозондовых датчиков строго по осям базиса корпуса прибора. При этом достигается достаточно высокая точность определения азимута вследствие проведения алгоритмического учёта углов отклонения феррозондовых датчиков от осей прямоугольной системы координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ривкин С. С.** Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании. М.: Наука, 1978. 320 с.
2. **Ишлинский А. Ю.** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. **Миловзоров Г. В., Миловзоров Д. Г., Редькина Т. А., Садрутдинов Р. Р.** Особенности построения и калибровки инклинометрических систем с феррозондовыми датчиками // Интеллектуальные системы в производстве. 2014. **24**, № 2. С. 115–119.
4. **Миловзоров Д. Г., Редькина Т. А., Садрутдинов Р. Р.** О построении магнитометрических систем с произвольно ориентированными феррозондами // Интеллектуальные системы в производстве. 2015. **25**, № 1. С. 111–114.
5. **Миловзоров Д. Г., Садрутдинов Р. Р.** Малогабаритные инклинометрические системы с феррозондовыми датчиками // Каротажник. 2015. **11**, № 257. С. 81–90.
6. **Миловзоров Д. Г., Ясовеев В. Х.** Математические модели преобразователей параметров наклона на основе двухосевых акселерометров // Автометрия. 2017. **53**, № 1. С. 12–18.
7. **Milovzorov D. G., Yasoveyev V. Kh.** Concept of information signals reforming for the tilt measurement systems with a triaxial accelerometer // Proc. of the Intern. Conf. on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). Chelyabinsk: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2017. P. 1–5.