

УДК 621.397

## АНАЛИЗ ШУМА КВАНТОВАНИЯ ФИЛЬТРОВ МНОГОУРОВНЕВОГО ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ\*

Н. И. Червяков, П. А. Ляхов, Н. Н. Нагорнов

*Северо-Кавказский федеральный университет,  
355009, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1  
E-mail: sparta1392@mail.ru*

Решена задача анализа влияния шума квантования коэффициентов фильтров дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на результат обработки изображений. Предложена реализация метода многоуровневого ДВП, позволяющая определить эффективную разрядность коэффициентов фильтров ДВП, при которой шум квантования не оказывает существенного влияния на результат обработки изображений. Выявлена зависимость пикового отношения сигнала к шуму (PSNR) при ДВП изображений от используемого вейвлета, разрядности коэффициентов и количества уровней обработки. Выведены формулы для нахождения минимальной разрядности коэффициентов, при которой обработанное изображение достигает высокого качества ( $PSNR \geq 40$  дБ) в зависимости от используемого вейвлета и количества уровней обработки. Экспериментальное моделирование многоуровневого ДВП изображения подтвердило полученные результаты. В предложенном методе все данные представлены в формате с фиксированной точкой, что открывает возможность эффективной аппаратной реализации на современных устройствах (FPGA, ASIC и др.).

*Ключевые слова:* дискретное вейвлет-преобразование, цифровая обработка изображений, шум квантования, разрядность, формат с фиксированной точкой.

DOI: 10.15372/AUT20180609

**Введение.** Методы цифровой обработки изображений широко применяются в различных областях науки и техники [1, 2]: медицине, биологии, физике, астрономии, а также в промышленной, оборонной и правоохранительной сферах деятельности. Актуальными задачами цифровой обработки изображений являются их очистка от шума и сжатие [1–4]. Для их решения на практике используются различные преобразования, наиболее распространённые из которых — преобразование Фурье [5] и вейвлет-преобразование [6, 7].

При аппаратной реализации дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на современных микроэлектронных устройствах (FPGA, ASIC и др.) возникает вопрос о разрядности коэффициентов фильтров ДВП, эффективной с точки зрения затрачиваемых ресурсов и в то же время необходимой для высокого качества обработки [8, 9]. В [10] показан двумерный биортогональный процессор ДВП, конструкция которого основана на системе остаточных классов. В [11] предложена эффективная схема реализации двумерного ДВП с помощью лифтинг-схемы. В работе [12] описана систолическая модулярная архитектура для эффективной аппаратной реализации ДВП. В [13] показано, что ДВП с использованием лифтинг-схемы может эффективно выполняться на современных программируемых графических процессорах. В [14] представлена аппаратная реализация процессора вейвлет-обработки изображений с помощью системы остаточных классов. Этот подход позволил

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00109А), Совета по грантам Президента РФ (проект № СП-2245.2018.5), Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 2.6035.2017/БЧ).

авторам повысить производительность устройства по сравнению с арифметикой в двоичном дополнительном коде. В изученных материалах по аппаратной реализации ДВП на VLSI [10–12] и CUDA [13, 14] не приведено никаких обоснований выбора разрядности коэффициентов вейвлет-фильтров.

Цель данной работы — выявление зависимости величины шума квантования [15, 16], возникающего при многоуровневом ДВП изображений, от разрядности коэффициентов вейвлет-фильтров. Особое внимание уделено определению минимальной разрядности, при которой этот шум не оказывает существенного влияния на результат обработки изображений, т. е. когда значение пикового отношения сигнала к шуму (PSNR) достигает 40 дБ. Значение 40 дБ описывает разницу между двумя изображениями, незаметную для человека [17].

**Основы ДВП изображений.** Рассмотрим цифровое изображение  $I$  из  $X$  строк и  $Y$  столбцов как функцию  $I(x, y)$ , где  $0 \leq x \leq X - 1$  и  $0 \leq y \leq Y - 1$  — пространственные координаты  $I$ . Значения пикселей зависят от типа изображения. В данной работе акцентируется внимание на полутоновых и полноцветных изображениях. Таким образом, значения пикселей представляются в виде  $I(x, y)$  для полутоновых изображений и  $I(x, y, z)$  для полноцветных, где  $z = 1, 2, 3$  — номер цвета.

Двумерное ДВП осуществляется путём поочередного одномерного ДВП строк и столбцов изображения с помощью низкочастотного  $F_L(z)$  и высокочастотного  $F_H(z)$  вейвлет-фильтров, где  $F(z)$  — передаточная функция (рис. 1). В результате изображение разбивается на четыре группы коэффициентов ( $LL_1, LH_1, HL_1, HH_1$ ) разложения изображения  $I$  первого уровня. Многоуровневое ДВП происходит путём последовательного ДВП коэффициентов  $LL_1$ . Будем считать, что вейвлет-фильтры  $F(z)$  состоят из коэффициентов  $f_i$ , где  $i = 0, \dots, k-1$  — номер коэффициента ( $k$  — количество коэффициентов вейвлет-фильтра). Работа фильтра может быть описана с помощью свёртки по следующим формулам:

$$I'(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} I(x+i, y) f_{k-1-i}; \quad I''(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} I(x, y+i) f_{k-1-i} \quad (1)$$

( $I'$  — свёртка по строкам,  $I''$  — свёртка по столбцам).

Возникает вопрос о минимальной разрядности представления коэффициентов  $f_i$  вейвлет-фильтров  $F(z)$ , эффективного с точки зрения аппаратной реализации на современных устройствах и необходимого для достижения обработанным изображением высокого качества. На современных устройствах скорость выполнения операций с числами в формате с фиксированной точкой существенно выше, чем в формате с плавающей точкой, что может быть использовано при создании устройств обработки 2D- и 3D-изображений

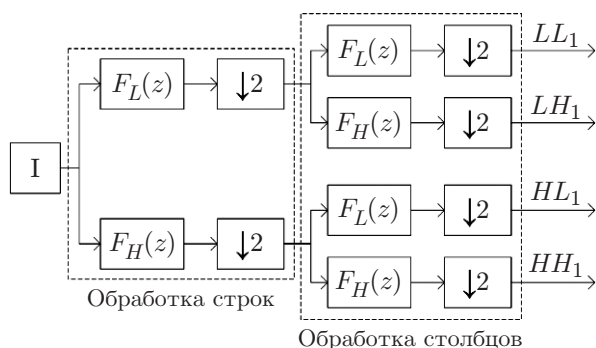


Рис. 1. Одноуровневое двумерное ДВП изображения

в режиме реального времени. Поэтому в предлагаемом методе коэффициенты вейвлет-фильтров квантуются и преобразуются в формат с фиксированной точкой следующим образом: масштабируются на  $2^n$  ( $n$  — степень масштабирования коэффициентов) и округляются к большему

$$f_i^* = \lceil 2^n f_i \rceil. \quad (2)$$

После свёртки с коэффициентами  $f_i^*$  вейвлет-фильтров, осуществляемой по формулам (1), коэффициенты  $LL_m^*$   $m$ -го уровня обработанного изображения  $I$  нормируются следующим образом: все полученные значения делятся на  $2^{2mn}$  и округляются к меньшему

$$\widetilde{LL}_m = \lfloor 2^{-2mn} LL_m^* \rfloor. \quad (3)$$

Операции округления к большему и к меньшему выполняются путём отбрасывания дробной части числа с добавлением единицы в случае округления к большему. При округлении в разные стороны погрешности будут иметь разные знаки и частично компенсировать друг друга. Применение операций округления именно в таком порядке требует меньших ресурсов при аппаратной реализации, чем операции округления к ближайшему целому. Это объясняется тем, что коэффициенты вейвлет-фильтров известны априори и их квантование с округлением к большему может быть выполнено предварительно. Таким образом, в аппаратной части коэффициенты вейвлет-фильтров будут использоваться в виде констант. Выполнение свёртки происходит с применением арифметико-логических устройств, и округление её результата к меньшему осуществляется простым отбрасыванием дробной части и не требует дополнительных аппаратных и временных затрат.

Погрешность предложенного метода оценивается с помощью среднеквадратического отклонения (MSE) значений яркости, определяемого для полутоновых (MSE<sub>grayscale</sub>) [17] и полноцветных (MSE<sub>color</sub>) [18] изображений по формулам

$$\text{MSE}_{\text{grayscale}} = \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} \frac{[LL_m(x, y) - \widetilde{LL}_m(x, y)]^2}{XY},$$

$$\text{MSE}_{\text{color}} = \frac{1}{3} \sum_{z=1}^3 \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} \frac{[LL_m(x, y, z) - \widetilde{LL}_m(x, y, z)]^2}{XY},$$

где  $LL_m$  — точный результат  $m$ -го уровня ДВП, а  $\widetilde{LL}_m$  — результат  $m$ -го уровня ДВП предложенным методом. Критерием оценки качества многоуровневого ДВП изображений является числовая характеристика PSNR, измеряемая в децибелах и вычисляемая следующим образом [17]:

$$\text{PSNR} = 10 \lg(M^2/\text{MSE})$$

( $M$  — максимальное значение яркости пикселей изображений).

**Теоретический анализ максимальной погрешности многоуровневого ДВП изображений.** Изначально погрешность возникает в результате преобразования исходных коэффициентов  $f_i$  к виду  $f_i^*$  по формуле (2) и представляет собой шум квантования. Затем она возрастает при выполнении свёрток по формулам (1). Кроме того, необходимо учесть влияние, оказываемое округлением после нормирования коэффициентов обработанного изображения по формуле (3). Вычисления проведены для коэффициентов низкочастотного вейвлет-фильтра  $F_L(z)$  с суммой коэффициентов, равной единице:  $\sum_{i=1}^k f_i = 1$ .

Введём следующие обозначения:  $AE_1$  — абсолютная погрешность (АП) округления коэффициентов вейвлет-фильтра;  $LAE_1$  — предельная абсолютная погрешность (ПАП) округления коэффициентов вейвлет-фильтра;  $LAE_2$  — ПАП результатов свёртки;  $LAE_3$  — ПАП нормированных результатов свёртки;  $LAE_4$  — ПАП округления нормированных результатов свёртки;  $LAE_5$  — ПАП округлённых нормированных результатов свёртки;  $AE_3$  — АП нормированных результатов свёртки.

При преобразовании коэффициентов  $f_i$  по (2) АП округления коэффициентов  $AE_1$  вычисляется по формуле

$$AE_1 = \sum_{i=0}^{k-1} (f_i^* - 2^n f_i) = \sum_{i=0}^{k-1} ([2^n f_i] - 2^n f_i). \quad (4)$$

Так как все коэффициенты  $f_i^*$  округлены к большему, то погрешности всех коэффициентов имеют одинаковый знак. В данном случае  $LAE_2$  максимальна при условии, что максимальны все значения яркости изображения. Результат свёртки по строкам для каждого пикселя имеет вид  $M(2^n + AE_1)$ , где  $2^n M$  — точное значение пикселей после свёртки по строкам. Результат свёртки по строкам и столбцам, представляющий собой одноуровневое ДВП изображения, имеет вид  $M(2^n + AE_1)^2$ , где  $2^{2n} M$  — точное значение пикселей после одноуровневого ДВП. Результат  $m$ -уровневого ДВП изображения имеет вид  $M(2^n + AE_1)^{2m}$ , где  $2^{2mn} M$  — точное значение пикселей после  $m$ -уровневого ДВП. С учётом этого  $LAE_2$  можно определить как разность полученного значения яркости пикселей вследствие  $m$ -уровневого ДВП изображения и его точного значения по формуле

$$\begin{aligned} LAE_2 &= M(2^n + AE_1)^{2m} - 2^{2mn} M = M((2^n + AE_1)^{2m} - 2^{2mn}) = \\ &= M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j 2^{n(2m-j)} AE_1^j, \end{aligned}$$

где  $C_{2m}^j = \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!}$  — биномиальные коэффициенты.

Предельная абсолютная погрешность нормированных результатов свёртки  $LAE_3$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} LAE_3 &= \frac{LAE_2}{2^{2mn}} = \frac{M}{2^{2mn}} \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j 2^{n(2m-j)} AE_1^j = \\ &= M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j 2^{-jn} AE_1^j = M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j \left(\frac{AE_1}{2^n}\right)^j. \end{aligned}$$

Предельная абсолютная погрешность округления нормированных результатов свёртки  $LAE_4$  находится по формуле

$$LAE_4 = LAE_3 + \lambda - \lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor, \quad (5)$$

где  $\lambda \in [0, 1)$  — дробная часть точного результата свёртки.

Итоговая погрешность метода представляет собой ПАП округлённых нормированных результатов свёртки  $LAE_5$  и вычисляется по формуле

$$LAE_5 = |LAE_3 - LAE_4|. \quad (6)$$

В (6)  $LAE_4$  частично компенсирует  $LAE_3$ . На определённом этапе увеличения  $n$  две эти погрешности станут соизмеримыми по своей абсолютной величине. В данном случае  $LAE_5$  будет иметь наименьшее значение. Подставим (5) в формулу (6):

$$LAE_5 = |LAE_3 - (LAE_3 + \lambda - \lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor)| = |\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor - \lambda|. \quad (7)$$

Рассмотрим два случая.

1.  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor - \lambda > 0$ , следовательно,  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor \geq 1$ . Здесь чем больше значение  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor$ , тем больше значение  $LAE_5$ . Таким образом,  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor = \lfloor LAE_3 \rfloor + 1$  и  $\lambda$  представляет собой дополнение дробной части числа  $LAE_3$  до единицы, т. е.  $\lambda = \lfloor LAE_3 \rfloor + 1 - LAE_3$ . Подставим полученное выражение в формулу (7):

$$LAE_5 = \lfloor LAE_3 + \lfloor LAE_3 \rfloor + 1 - LAE_3 \rfloor - (\lfloor LAE_3 \rfloor + 1 - LAE_3) = LAE_3. \quad (8)$$

Формула (8) означает, что при  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor - \lambda > 0$  выражение (7) примет вид  $LAE_5 = LAE_3$ .

2.  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor - \lambda \leq 0$ , следовательно,  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor \leq \lambda$ ,  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor = 0$ , откуда  $LAE_5 = |0 - \lambda| = \lambda$ . При этом  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor = 0$ , а значит,  $LAE_3 + \lambda = 1 - \varepsilon$ , откуда  $\lambda = 1 - \varepsilon - LAE_3$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая величина. Используем  $AE_3$  вместо  $LAE_3$ , причём положим её равной нулю, тогда погрешность  $LAE_5$  будет максимальной:

$$LAE_5 = |\lfloor 0 + 1 - \varepsilon \rfloor - (1 - \varepsilon)| = 1 - \varepsilon. \quad (9)$$

Формула (9) означает, что при  $\lfloor LAE_3 + \lambda \rfloor - \lambda \leq 0$  выражение (7) примет вид  $LAE_5 = 1 - \varepsilon$ .

Используя результаты рассмотрения двух случаев, перепишем формулу (7) в виде

$$LAE_5 = \begin{cases} LAE_3, & LAE_3 \geq 1, \\ 1 - \varepsilon, & LAE_3 < 1, \end{cases} = \begin{cases} M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j \geq 1, \\ 1, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j < 1. \end{cases} \quad (10)$$

Характеристика оценки качества обработки изображения вычисляется по формуле

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{M^2}{LAE_5^2} = 10 \lg \left( \frac{M}{LAE_5} \right)^2 = 20 \lg \frac{M}{LAE_5}, \quad (11)$$

где  $\text{MSE}_{\text{grayscale}} = LAE_5^2 = \text{MSE}_{\text{color}} = (LAE_5^2 + LAE_5^2 + LAE_5^2)/3$ . Подставим (10) в формулу (11):

$$\text{PSNR} = \begin{cases} 20 \lg \left( M / \left( M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j \right) \right), & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j \geq 1, \\ 20 \lg M, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j < 1, \end{cases}$$

$$\text{PSNR} = \begin{cases} 20 \lg \left( \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j \right)^{-1}, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j \geq 1, \\ 20 \lg M, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j < 1. \end{cases} \quad (12)$$

Формула (12) позволяет определить минимальное качество изображения с максимальным значением яркости  $M$ , полученного в результате  $m$ -уровневого ДВП с использованием низкочастотного вейвлет-фильтра  $F_L(z)$  с известными значениями его коэффициентов  $f_i$ , умноженных на  $2^n$ . При этом минимальную разрядность  $r_i$  для каждого коэффициента  $f_i$  вейвлет-фильтра  $F_L(z)$  можно найти по формуле

$$r_i = \lceil \log_2(|\lceil 2^n f_i \rceil| + 1) \rceil + 1, \quad (13)$$

где  $n$  — минимальное значение, при котором  $\text{PSNR} \geq 40$  согласно (12).

**Пример.** Определим минимальное значение PSNR по выражениям (4) и (12), где полутоновое изображение ( $M = 255$ ) получено в процессе выполнения двухуровневого ДВП ( $m = 2$ ) вейвлетом Добеши  $D4$  ( $k = 4$ ) с коэффициентами  $\tilde{f}_1 = -0,091506350945870$ ,  $\tilde{f}_2 = 0,158493649053780$ ,  $\tilde{f}_3 = 0,591506350945870$ ,  $\tilde{f}_4 = 0,341506350946220$  (наиболее точные значения, доступные в программной среде MATLAB версии R2017b) низкочастотного вейвлет-фильтра  $F_L(z)$ , масштабированными на  $2^6$  ( $n = 6$ ). Для этого вычислим  $AE_1$  по формуле (4):

$$\begin{aligned} AE_1 &= -5 - (-5,856406460535680) + 11 - 10,143593539441920 + 38 - \\ &- 37,856406460535680 + 22 - 21,856406460558080 = 0,856406460535680 + \\ &+ 0,856406460558080 + 0,143593539464320 + 0,143593539441920 = 2. \end{aligned}$$

Найдём значение  $M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (AE_1/2^n)^j$  при  $M = 255$ ,  $m = 2$ ,  $k = 4$ ,  $n = 6$ ,  $AE_1 = 2$ :

$$255 \sum_{j=1}^{2 \cdot 2} C_{2 \cdot 2}^j (2/2^6)^j = 255 \sum_{j=1}^4 C_4^j 2^{-5j} = 255 \cdot 0,1310 = 33,4005 > 1.$$

Подставим полученный результат в первую строку системы из формулы (12):

$$\text{PSNR} = 20 \lg(0,1310)^{-1} = 17,6557 \text{ дБ.}$$

Таким образом, минимальное качество обработанного изображения в данных условиях  $\text{PSNR} = 17,6557$  дБ. Из примера можно сделать вывод, что коэффициенты вейвлета Добеши  $D4$  недостаточно масштабировать на 7 бит для высококачественного двухуровневого ДВП полутоновых изображений.

Формулы (11) и (12) применяются, когда заранее известны значения коэффициентов  $f_i$  вейвлет-фильтра  $F_L(z)$ . Если они неизвестны, то вместо АП округления коэффициентов

$AE_1$  используется ПАП округления коэффициентов  $LAE_1$ . В данном случае ПАП округления каждого коэффициента меньше единицы, а погрешность округления всех коэффициентов  $f_i$  меньше числа коэффициентов  $k$  и  $LAE_1$  определяется по формуле  $LAE_1 < k$ . Тогда выражение (12) примет вид

$$\text{PSNR} > \begin{cases} 20 \lg \left( \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (k/2^n)^j \right)^{-1}, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (k/2^n)^j \geq 1, \\ 20 \lg M, & M \sum_{j=1}^{2m} C_{2m}^j (k/2^n)^j < 1. \end{cases} \quad (14)$$

Формула (14) позволяет найти минимальное качество изображения с максимальным значением яркости  $M$ , полученного в результате  $m$ -уровневого ДВП с использованием низкочастотного вейвлет-фильтра  $F(z)$ , коэффициенты которого заранее неизвестны и умножены на  $2^n$ . При этом минимальную разрядность  $r$  коэффициентов  $f_i$  вейвлет-фильтра  $F(z)$  можно вычислить по формуле

$$r = n + 1, \quad (15)$$

где  $n$  — минимальное значение, при котором  $\text{PSNR} \geq 40$  согласно формуле (14).

В теоретических расчётах описан наихудший случай, когда погрешность вычислений оказывает максимально возможное влияние на результат многоуровневого ДВП изображений.

#### Экспериментальное моделирование многоуровневого ДВП изображения.

Эксперимент проведён в программной среде MATLAB версии R2017b для 8-битного полутонового изображения «Лена» (рис. 2, а). Для обработки использованы вейвлеты Добеши  $Dk$  ( $k = 4, 8, \dots, 40$ ). Многоуровневое ДВП изображения осуществлено следующим образом: с помощью команды `wfilters` [19] получены коэффициенты  $f_{F,i}$  вейвлет-фильтров Добеши  $Dk$  ( $k = 4, 8, \dots, 40$ ) и нормированы делением на  $\sqrt{2}$  для выполнения коэффициентами низкочастотных вейвлет-фильтров условия  $\sum_{i=1}^k f_i = 1$ ; коэффициенты  $f_i$  вейвлет-

фильтров квантованы и преобразованы в формат с фиксированной точкой умножением на  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ ) и округлением к большему согласно формуле (2):  $f_i^* = \lceil 2^n f_i \rceil$ ; с помощью команды `dwt2` [19] проведено  $m$ -уровневое ДВП исходного полутонового изображения «Лена» вейвлет-фильтрами  $Dk$  ( $k = 4, 8, 12, \dots, 40$ ) на четыре группы коэффициентов  $(LL_m, LH_m, HL_m, HH_m)$  разложения изображения  $m$ -го уровня (на втором и последующих уровнях в качестве исходного изображения использованы коэффициенты  $LL_{m-1}^*$  согласно формулам (1); коэффициенты  $LL_m^*$   $m$ -го уровня обработанного изображения  $I$  нормированы делением на  $2^{2mn}$  и округлены к меньшему согласно формуле (3):  $\widetilde{LL}_m = \lfloor 2^{-2mn} LL_m^* \rfloor$ .

Пример обработки изображения «Лена» вейвлетом  $D4$  с использованием коэффициентов в формате с плавающей точкой, на каждый из которых выделено по 64 бита, представлен на рис. 2, из которого видно, что в результате одноуровневого ДВП изображение разбивается на четыре группы коэффициентов  $(LL_1, LH_1, HL_1, HH_1)$  разложения изображения «Лена» первого уровня; в результате двухуровневого ДВП группа коэффициентов  $LL_1$  разбивается на четыре группы коэффициентов  $(LL_2, LH_2, HL_2, HH_2)$  разложения изображения «Лена» второго уровня.

Коэффициенты  $\widetilde{LL}_2$  разложения изображения «Лена» второго уровня, полученные в случае двухуровневого ДВП вейвлетом  $D4$  с использованием коэффициентов в формате с

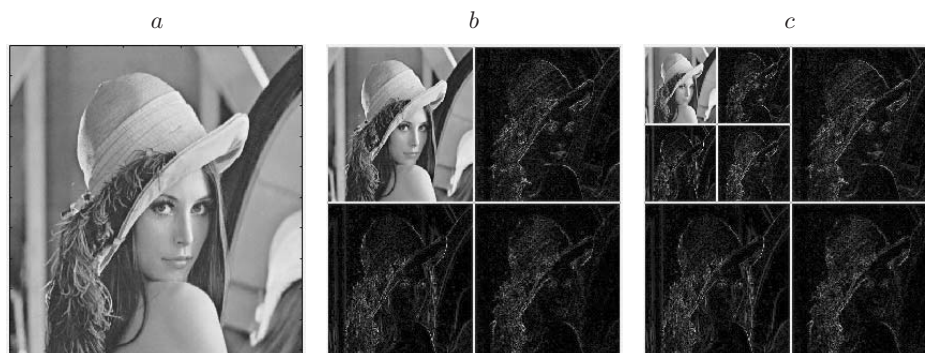


Рис. 2. Пример обработки изображения «Лена» вейвлетом  $D4$ :  $a$  — исходное изображение;  $b$  — результат одноуровневого ДВП;  $c$  — результат двухуровневого ДВП

плавающей точкой и предложенным методом, представлены на рис. 3, из которого видно постепенное улучшение качества обработки с увеличением  $n$ : при  $n = 3$  изображение сильно искажено, при  $n = 6$  заметны небольшие искажения, при  $n = 9$  обработанное изображение неотлично на глаз от изображения, полученного после ДВП с использованием коэффициентов в формате с плавающей точкой. Результат эксперимента имеет более высокое качество (PSNR = 23,60 дБ) в отличие от примера с аналогичными условиями (PSNR = 17,6557 дБ).

Результаты теоретических расчётов по формуле (12) и экспериментального моделирования двухуровневого ДВП вейвлетом  $D4$  в зависимости от значений  $n$  ( $n = 6, 7, \dots, 11$ ) представлены в табл. 1, из которой видно превосходство экспериментальных данных над теоретическими.

На основе экспериментальных данных построим табл. 2 следующим образом: отметим минимальные значения  $n$ , при которых согласно теоретическим расчётам по формуле (12) и эксперименту результат  $m$ -уровневого ДВП ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ) изображения вейвлетами Добеши  $Dk$  ( $k = 4, 8, 12, \dots, 40$ ) достигает высокого качества обработки (PSNR  $\geq 40$ ); а также вычислим разницу между ними. Например, для двухуровневого ДВП изображения вейвлетом  $D4$  согласно результатам теоретических расчётов качество в 40 дБ достигается при  $n = 10$  (PSNR = 42,12 дБ по табл. 1), согласно результатам эксперимента качество в 40 дБ достигается при  $n = 9$  (PSNR = 43,67 дБ по табл. 1), разница составляет один разряд. Остальные ячейки таблицы заполнены аналогичным образом.

Минимальные значения  $n$ , при которых согласно теоретическим расчётам по формуле



Рис. 3. Пример двухуровневого ДВП изображения «Лена» вейвлетом  $D4$ : с использованием коэффициента в формате с плавающей точкой ( $a$ ); предложенным методом при  $n = 3$ , PSNR = 2,57 дБ ( $b$ ), при  $n = 6$ , PSNR = 23,60 дБ ( $c$ ), при  $n = 9$ , PSNR = 43,67 дБ ( $d$ )



Таблица 1

| Результаты        | $n = 6$ | $n = 7$ | $n = 8$ | $n = 9$ | $n = 10$ | $n = 11$ |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|
| Теоретические     | 17,66   | 23,88   | 30,00   | 36,07   | 42,12    | 48,13    |
| Экспериментальные | 23,60   | 30,07   | 36,68   | 43,67   | 50,94    | 56,36    |

Таблица 2

| $m$ | Результаты        | $D4$ | $D8$ | $D12$ | $D16$ | $D20$ | $D24$ | $D28$ | $D32$ | $D36$ | $D40$ |
|-----|-------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1   | Теоретические     | 9    | 10   | 11    | 11    | 11    | 11    | 12    | 12    | 12    | 12    |
|     | Экспериментальные | 8    | 9    | 10    | 10    | 11    | 11    | 11    | 11    | 11    | 11    |
|     | Разница           | 1    | 1    | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 2   | Теоретические     | 10   | 12   | 11    | 12    | 13    | 13    | 13    | 13    | 13    | 14    |
|     | Экспериментальные | 9    | 10   | 11    | 11    | 11    | 12    | 12    | 12    | 12    | 12    |
|     | Разница           | 1    | 2    | 0     | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     |
| 3   | Теоретические     | 11   | 12   | 12    | 13    | 13    | 13    | 13    | 14    | 14    | 14    |
|     | Экспериментальные | 10   | 10   | 11    | 11    | 12    | 12    | 12    | 13    | 13    | 13    |
|     | Разница           | 1    | 2    | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| 4   | Теоретические     | 11   | 13   | 13    | 13    | 14    | 14    | 14    | 14    | 14    | 15    |
|     | Экспериментальные | 10   | 11   | 12    | 12    | 12    | 13    | 13    | 13    | 13    | 13    |
|     | Разница           | 1    | 2    | 1     | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     |
| 5   | Теоретические     | 11   | 13   | 13    | 14    | 14    | 14    | 14    | 14    | 15    | 15    |
|     | Экспериментальные | 10   | 11   | 12    | 12    | 13    | 13    | 13    | 13    | 13    | 14    |
|     | Разница           | 1    | 2    | 1     | 2     | 1     | 1     | 1     | 1     | 2     | 1     |

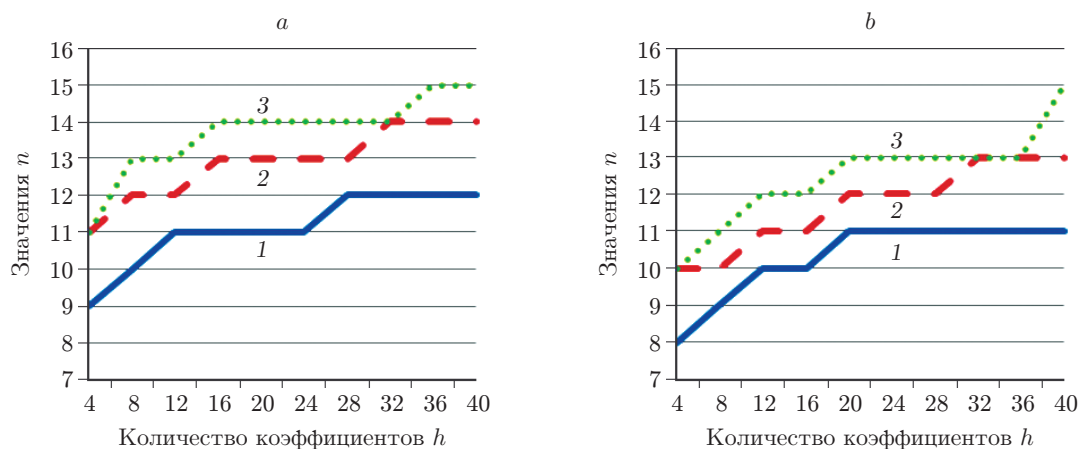


Рис. 4. Минимальные значения  $n$ , при которых результат  $m$ -уровневого ДВП изображения достигает качества PSNR = 40 дБ:  $a$  — теоретические расчёты,  $b$  — эксперимент (кривые 1 —  $m = 1$ , 2 —  $m = 3$ , 3 —  $m = 5$ )

(12) и эксперименту результат  $m$ -уровневого ДВП ( $m = 1, 3, 5$ ) изображения вейвлетами Добеши  $Dk$  ( $k = 4, 8, 12, \dots, 40$ ) достигает высокого качества обработки ( $\text{PSNR} \geq 40$ ), представлены на рис. 4.

Из табл. 2 и рис. 4. видно, что эксперимент подтверждает корректность теоретического анализа; при экспериментальном моделировании предложенного метода реализации многоуровневого ДВП для коэффициентов вейвлет-фильтров в среднем потребовалось на один разряд меньше, чем требуют теоретические расчёты.

**Заключение.** В данной работе решена задача анализа влияния шума квантования коэффициентов фильтров дискретного вейвлет-преобразования на обработку изображений. Выведены формулы (12) и (14), которые позволяют найти минимальное качество многоуровневого ДВП изображений в зависимости от используемого вейвлета, разрядности коэффициентов и количества уровней обработки. На основе этих формул можно определить минимальную разрядность коэффициентов вейвлет-фильтров, при которой результат многоуровневого ДВП изображения достигает высокого качества ( $\text{PSNR} \geq 40$ ) в зависимости от используемого вейвлета и количества уровней обработки по формулам (13) и (15). Эксперимент показал, что по сравнению с теорией можно достичь сокращения разрядности коэффициентов в среднем на единицу, сохраняя при этом высокое качество обработки изображения. В предложенном методе все данные представлены в формате с фиксированной точкой и упрощено выполнение операций округления.

Полученные результаты открывают возможность для эффективной аппаратной реализации метода многоуровневого ДВП изображений на современных устройствах (FPGA, ASIC и др.) для очистки от шума и сжатия изображений в таких областях науки и техники, как медицина, биология, физика, астрономия, а также в промышленной, оборонной и правоохранительной сферах деятельности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gonzalez R. C., Woods R. E.** Digital Image Processing. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007. 976 p.
2. **Bovik A.** Handbook of Image and Video Processing. New Jersey: Academic Press, 2005. 1412 p.
3. **Shih F. U.** Image Processing and Pattern Recognition: Fundamentals and Techniques. New Jersey: John Wiley & Sons, IEEE Press, 2010. 552 p.
4. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимальных параметров мультипликативного алгоритма вейвлет-фильтрации изображений // Автометрия. 2017. **53**, № 4. С. 112–119.
5. **Vetterli M., Kovacevic J., Goyal V. K.** Foundations of Signal Processing. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 715 p.
6. **Daubechies I.** Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 380 p.
7. **Mallat S.** A Wavelet Tour of Signal Process the Sparse Way. Burlington: Elsevier, Academic Press, 2009. 824 p.
8. **Tan L., Jiang J.** Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications. Amsterdam — Boston: Elsevier, Academic Press, 2013. 896 p.
9. **Bailey D. G.** Design for Embedded Image Processing on FPGAs. Singapore: John Wiley & Sons, IEEE Press, 2011. 496 p.
10. **Liu Y., Lai E. M.-K.** Design and implementation of an RNS-based 2-D DWT processor // IEEE Trans. Consum. Electron. 2004. **50**, N 1. P. 376–385.
11. **Cheng C.-C., Huang C.-T., Chen C.-Y. et al.** On-chip memory optimization scheme for VLSI implementation of line-based two-dimensional discrete wavelet transform // IEEE Trans. Circuits and Syst. for Video Technol. 2007. **17**, N 7. P. 814–822.

12. **Meher P. K., Mohanty B. K., Patra J. C.** Hardware-efficient systolic-like modular design for two-dimensional discrete wavelet transform // IEEE Trans. Circuits and Syst. II: Express Briefs. 2008. **55**, N 2. P. 151–155.
13. **Laan W. J., Jalba A. C., Roerdink J. B. T. M.** Accelerating wavelet lifting on graphics hardware using CUDA // IEEE Trans. Parallel and Distributed Syst. 2011. **22**, N 1. P. 132–146.
14. **Safari A., Niras C. V., Kong Y.** Power-performance enhancement of two-dimensional RNS-based DWT image processor using static voltage scaling // Integration, the VLSI Journ. 2016. **53**, Is. C. P. 145–156.
15. **Schlichthärle D.** Digital Filters: Basics and Design. Berlin — Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 527 p.
16. **Mehrnia A., Willson A. N.** A lower bound for the hardware complexity of FIR filters // IEEE Circuits and Syst. Magazine. 2017. **18**, N 1. P. 10–28.
17. **Rao K. R., Yip P. C.** The Transform and Data Compression Handbook. Boca Raton: CRC Press, 2001. 399 p.
18. **Basso A., Cavagnino D., Pomponui V., Vernone A.** Blind watermarking of color images using Karhunen—Loève transform keying // The Computer Journ. 2011. **54**, N 7. P. 1076–1090.
19. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.

*Поступила в редакцию 13 августа 2018 г.*

---