УДК 004.93

## НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ КЛАССОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОМОДАЛЬНЫМ ФРАГМЕНТАМ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## © А. В. Лапко $^{1,3}$ , В. А. Лапко $^{1,3}$ , С. Т. Им $^{2,3}$ , В. П. Тубольцев $^3$ , В. А. Авлеенок $^3$

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50, стр. 44 
<sup>2</sup> Институт леса им. В. Н. Сукачева СО РАН, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50, стр. 28 
<sup>3</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, 660037, г. Красноярск, просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31 
Е-таil: lapko@icm.krasn.ru

Рассматривается непараметрический алгоритм автоматической классификации больших массивов статистических данных. Его синтез основан на декомпозиции исходных данных. Результаты декомпозиции образуют множество центров многомерных интервалов и соответствующих им частот встречаемости значений случайных величин. На основе полученной информации обнаруживаются классы, соответствующие одномодальным фрагментам плотности вероятности признаков исследуемых объектов. Анализируется пространственная интерпретация результатов автоматической классификации. Полученные непараметрические алгоритмы имеют важное значение при обработке данных дистанционного зондирования природных ресурсов.

*Ключевые слова:* автоматическая классификация, многомерная гистограмма, распознавание образов, выборки большого объёма, дискретизация области значений многомерных случайных величин, данные дистанционного зондирования.

DOI: 10.15372/AUT20190303

Введение. Алгоритмы автоматической классификации широко используются при создании математического обеспечения аппаратно-программных комплексов обработки данных дистанционного зондирования природных объектов [1, 2]. Характеристика и типизация таких алгоритмов достаточно полно представлены в [3–5].

Непараметрические системы классификации, основанные на оценках плотности вероятности типа Розенблатта — Парзена, являются одним из активно развивающихся направлений теории распознавания образов. Их практическая значимость состоит в возможности создания информационных средств, адаптируемых к условиям функционирования объектов различной природы. Задачи автоматической классификации соответствуют минимальной априорной информации, когда часто неизвестны количество классов и их вероятностные характеристики. Наиболее полной информацией о классах обладает их совместная плотность вероятности, моды которой соответствуют «центрам» классов. Актуальность проблемы обнаружения объектов, которые характеризуются одномодальными фрагментами совместной плотности вероятности в заданном пространстве признаков классифицируемых объектов, отмечалась в [6]. Такое определение класса связано с признанием скрытых закономерностей в вероятностном смысле и достаточно полно развито в [7, 8]. Эти методы основаны на обнаружении подмножеств наблюдений с одномодальными фрагментами плотности вероятности с использованием их непараметрических оценок

парзеновского типа. Отмечается, что неравномерное распределение элементов исходных данных отображается в многомодальном изменении функций плотности вероятности. При этом существуют трудности восстановления многомерных плотностей вероятности и процедур выделения классов. Применение подобных методов требует решения оптимизационных задач, соответствующих количеству анализируемых элементов исходных данных.

В [9, 10] обоснована возможность решения задачи автоматической классификации в рамках задачи распознавания образов с помощью итерационной процедуры последовательного непараметрического оценивания байесовских уравнений разделяющих поверхностей между классами, которые соответствуют одномодальным симметричным фрагментам совместной плотности вероятности распределения признаков классифицируемых объектов.

Цель предлагаемого исследования состоит в развитии полученных результатов при построении непараметрических систем автоматической классификации статистических данных большого объёма для обнаружения подмножеств наблюдений, соответствующих несимметричным одномодальным фрагментам плотности вероятности распределения признаков анализируемых объектов. Их синтез основан на «сжатии» исходной информации путём дискретизации области значений случайных величин и использовании полученных результатов при непараметрическом оценивании совместной плотности вероятности.

Дискретизация области значений многомерной случайной величины. Для сжатия исходной информации  $V=(x^i,\,i=\overline{1,n})$  большого объёма n многомерной случайной величины  $x=(x_v,\,v=\overline{1,k})$  осуществим декомпозицию области её значений. Обозначим через  $\beta_v$  длину интервала дискретизации по признаку  $x_v$ . Пусть N — количество многомерных интервалов дискретизации с центрами  $z^j=(z_v^j,\,v=\overline{1,k}),$  а  $\bar{P}^j,\,j=\overline{1,N},$  — соответствующие им частоты принадлежности случайных величин. В  $[11,\,12]$  для восстановления плотности вероятности случайной величины  $x=(x_v,\,v=\overline{1,k})$  по данным  $\bar{V}=(z^j,\bar{P}^j,\,j=\overline{1,N})$  предложена статистика

$$\bar{p}(x_1, \dots, x_k) = \left(\prod_{v=1}^k c_v\right)^{-1} \sum_{j=1}^N \bar{P}^j \prod_{v=1}^k \Phi\left(\frac{x_v - z_v^j}{c_v}\right). \tag{1}$$

Ядерные функции  $\Phi(u_v)$  в статистике (1) удовлетворяют условиям:

$$\Phi(u_v) = \Phi(-u_v), \quad 0 \leqslant \Phi(u_v) < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u_v) du_v = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_v^2 \Phi(u_v) du_v = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_v^m \, \Phi(u_v) \, du_v < \infty, \qquad 0 \leqslant m < \infty, \quad v = \overline{1, k},$$

а их коэффициенты размытости  $c_v(N) \to 0$ ,  $v = \overline{1, k}$ , при  $N \to \infty$ .

Нетрудно заметить, что рассматриваемая непараметрическая оценка плотности вероятности (1) относится к семейству нормированных функций. Асимптотическое выражение зависимости среднеквадратического отклонения непараметрической оценки одномерной плотности вероятности типа (1) при k=1 от количества N интервалов дискретизации имеет экстремальный характер. На этой основе получена процедура выбора оптимального количества интервалов дискретизации [13]

$$N_1^* = \left(n \, \Delta \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(x) \, dx\right)^{1/2} = \alpha_1 \sqrt{n},\tag{2}$$

где  $\Delta$  — длина интервала значений одномерной случайной величины x с плотностью вероятности p(x). Данная аналитическая зависимость по виду близка к формуле Гаеде [14] и совпадает с ней при оценивании плотности вероятности случайной величины с равномерным законом распределения. Установлено, что значение коэффициента  $\alpha_1$  определяется только видом плотности вероятности и не зависит от её параметров.

Результаты исследования асимптотических свойств непараметрической оценки плотности вероятности (1) при k=2 стали основой синтеза формулы выбора оптимального количества интервалов дискретизации области значений двумерной случайной величины [15]

$$N_2^* = \left(\frac{3}{4} n \Delta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2\right)^{1/2} = \alpha_2 \sqrt{n},\tag{3}$$

которая справедлива и для условий разных интервалов  $\Delta_1, \Delta_2$  значений компонент  $x_1, x_2$ .

Анализ предложенных формул оптимальной дискретизации областей определения одномерной и двумерной плотностей вероятности создал основу их обобщения на многомерный случай. Следуя методу аналогий, предлагаем следующую формулу дискретизации многомерной случайной величины [16]

$$N_k^* = \left(\alpha(k)n\,\Delta^k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p^2(x_1, \dots, x_k) \, dx_1 \cdots \, dx_k\right)^{1/2} = \alpha_k \sqrt{n}.$$

Коэффициент  $\alpha(k) \leq 1$  и его значения уменьшаются с ростом размерности k случайной величины. Анализируя формулы (2), (3), нетрудно заметить, что значения  $\alpha(k) = -(2k-1)/k^2$ . При k=1 значение  $\alpha_1=1$ , если k=2, тогда  $\alpha_2=3/4$ , что согласуется с формулой (3).

Для независимых многомерных случайных величин с плотностью вероятности p(x) часто используется формула Скотта [17], которая основана на оценивании производных от p(x) по компонентам  $x_v$ ,  $v = \overline{1, k}$ .

Непараметрический алгоритм автоматической классификации. Пусть имеются данные  $\bar{V}=(z_1^i,\dots,z_k^i,\;\bar{P}^i,\;i=\overline{1,N}),$  составленные из значений центров  $z_v^i,\;v=\overline{1,k},$  интервалов (элементов) дискретизации  $S^i$  пространства признаков x анализируемых объектов и частот  $\bar{P}^i$  принадлежности исходных данных элементам  $S^i,\;i=\overline{1,N}.$  Необходимо массив данных  $\bar{V}$  разбить на подмножества элементов (классы)  $\Omega_j,\;j=\overline{1,M},$  в условиях, когда значение M неизвестно. Каждое j-е подмножество элементов соответствует j-му одномодальному фрагменту совместной плотности вероятности p(x) признаков  $x=(x_v,v)$   $v=\overline{1,k}$  классифицируемых объектов.

Предлагаемый алгоритм автоматической классификации основан на выполнении следующих действий:

- 1. Провести анализ массива данных  $\bar{V}$  и исключить информацию элементов  $S^i$ , для которых  $\bar{P}^i=0$ . Полученный массив преобразованных данных обозначим через  $\tilde{V}$ , а количество их элементов как  $\tilde{N}$ . Множество их номеров обозначим через  $\tilde{I}$ .
- 2. Обнаружить элемент  $S^q$  из массива данных  $\tilde{V}$  с максимальной частотой  $\bar{P}^q = \max_{i=1,\tilde{N}} \bar{P}^i$  и отнести его к классу  $\Omega_1$ .
  - 3. Определить множество смежных с  $S^q$  элементов  $S(q) = (S^i, i \in I_1(q))$  по правилу

$$S^i \in S(q)$$
, если  $|z_t^i - z_t^q| = \beta_t$ , а  $z_v^i = z_v^q$ ,  $v \in K(t)$ , при  $t \neq v$ 

и при соблюдении условий  $\bar{P}^i < \bar{P}^q, \quad i = \overline{1, \tilde{N}}, \quad i \neq q, \quad$ для  $t = \overline{1, k}.$ 

Здесь K(t) — множество номеров признаков за исключением t-го признака. Нетрудно заметить, что по каждому признаку  $x_t$  будут обнаружены смежные с  $S^q$  два либо один элемент дискретизации.

Множество элементов S(q) отнести к классу  $\Omega_1$  и положить  $\bar{P}^q=0$  для повышения вычислительной эффективности предлагаемой последовательной процедуры классификании.

4. Провести анализ каждого элемента из множества S(q) по аналогии с этапом 3. Пусть элемент  $S^{r}$  принадлежит множеству S(q). В соответствии с этапом 3 определим новые элементы класса  $\Omega_{1}$ . Для этого используется правило

$$S^i \in S(r)$$
, если  $|z_t^i - z_t^r| = \beta_t$ , а  $z_v^i = z_v^r$ ,  $v \in K(t)$ , при  $t \neq v$  (4)

и если соблюдается условие  $\bar{P}^i < \bar{P}^r$ ,  $i \in \tilde{I} \setminus I_1(q)$ , для  $t = \overline{1,k}$ .

Здесь  $\tilde{I}=(i=\overline{1,\tilde{N}})$ , а множество  $I_1(q)$  включает номер q начального элемента S(q). Элементы  $S^i$ , удовлетворяющие этим условиям, относятся к классу  $\Omega_1$ , и значение  $P^r$  в массиве данных  $\tilde{V}$  обнуляется. Выбирается новый элемент  $S^r$  из массива S(q), и этапы 2–4 повторяются для всех его элементов.

Если на этапе 2 к классу  $\Omega_1$  отнесён элемент  $S^q$ , то при реализации этапа 3 к классу  $\Omega_1$  будут отнесены элементы с номерами  $I_1(q)$ . Анализ этих элементов в соответствии с правилом (4) позволяет определить множество номеров элементов дискретизации  $I_1\{2\}$ , которые будут отнесены к классу  $\Omega_1$ .

- 5. Следуя предложенной методике, осуществить анализ элементов дискретизации с номерами  $I_1\{2\}$ . Пусть элемент  $S^r \in I_1\{2\}$ . Тогда, используя этапы классификации типа 2–4, при  $i \in \tilde{I} \setminus (I_1(q) \cup I_1\{2\})$  можно обнаружить множество элементов дискретизации пространства признаков с номерами  $I_1\{3\}$ , принадлежащих классу  $\Omega_1$ .
- 6. Процесс автоматической классификации этапа 3 продолжается до тех пор, пока на его  $\lambda$ -этапе множество  $I_1\{\lambda\}$  не будет определено как пустое. В этом случае множество элементов дискретизации

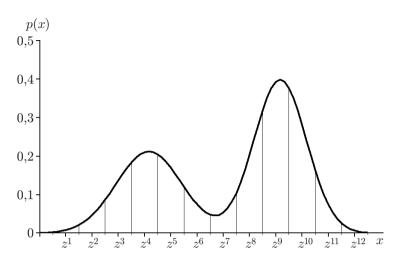
$$I_1 = I_1(q) \bigcup_{\varepsilon=2}^{\lambda-1} I_1\{\varepsilon\}$$

образует первый класс  $\Omega_1$ .

- 7. Исключить элементы с номерами  $I_1$  из массива данных  $\tilde{V}$ .
- 8. Обнаружить множество элементов дискретизации, принадлежащих второму классу  $\Omega_2$ . Для этого в соответствии с этапами 1–6 провести анализ массива данных  $\tilde{V}_2 = (x^i, \bar{P}^i, i \in I \setminus I_1)$ .
  - 9. Процесс автоматической классификации продолжается до тех пор, пока  $\bigcup_{i=1}^{M} I_{j} = \tilde{I}$ .

Очевидно, что используемая в непараметрическом алгоритме автоматической классификации процедура покоординатного поиска смежных центров интервалов дискретизации может быть замещена более эффективной, требующей меньших временных затрат.

Рассмотрим предложенный подход к решению задачи автоматической классификации для одномерного случая при k=1, результаты дискретизации для которого представлены на рис. 1. В области значений случайной величины x исходная выборка  $V=(x^i,\,i=\overline{1,n})$ 



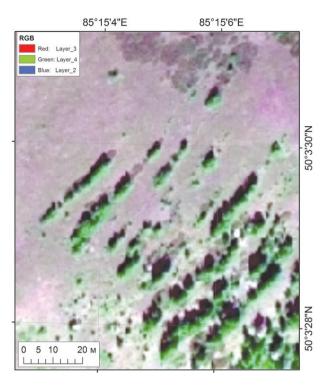
 $Puc.\ 1.\ \Gamma$ рафическая иллюстрация результатов дискретизации  $\tilde{V}$  области значений случайной величины x (обозначение  $z^j,\,j=\overline{1-12},$  — центры интервалов дискретизации)

преобразуется в массив данных  $\tilde{V}=(z^j,\bar{P}^j,i\in\tilde{I})$ , для которых  $\bar{P}^j\neq 0$ . В соответствии с этапом 2 непараметрического алгоритма автоматической классификации к классу  $\Omega_1$  будет отнесён интервал дискретизации  $S^9$  с параметрами  $(z^9,\bar{P}^9)$ . Тогда на этапе 3 классификации к первому классу  $\Omega_1$  однозначно будут отнесены интервалы дискретизации  $S^8$  и  $S^{10}$  с параметрами  $(z^8,\bar{P}^8)$ ,  $(z^{10},\bar{P}^{10})$  соответственно. Это утверждение основывается на справедливости неравенств  $\bar{P}^9>\bar{P}^8$  и  $\bar{P}^9>\bar{P}^{10}$ . Интервалы  $S^8$  и  $S^{10}$  образуют множество S(9). Согласно этапу 4 алгоритма классификации для анализа выбирается, например, интервал  $S^8\in S(9)$ . В соответствии с решением этого этапа алгоритма классификации интервал  $S^7$  будет отнесён к классу  $\Omega_1$ , так как справедливо соотношение  $\bar{P}^8>\bar{P}^7$ . По аналогии относительно  $S^{10}\in S(9)$  интервал  $S^{11}$  будет отнесён также к классу  $\Omega_1$ , поскольку  $\bar{P}^{10}>\bar{P}^{11}$ . Далее проводится анализ интервалов S(7) и S(11), которые содержат только по одному интервалу  $S^6$  и  $S^{12}$  соответственно. Нетрудно заметить, что интервал  $S^6$  не будет отнесён к первому классу  $\Omega_1$ , так как выполняется неравенство  $\bar{P}^6>\bar{P}^7$ . Интервал  $S^{12}$  будет отнесён к первому классу, потому что справедливо соотношение  $\bar{P}^{11}>\bar{P}^{12}$ . В данном примере к первому классу будут отнесены интервалы  $S^j$ ,  $j=\overline{7},\overline{12}$ .

Для обнаружения класса  $\Omega_2$  необходимо из оставшегося массива данных V выбрать интервал  $S^4$  с максимальной частотой встречаемости  $\bar{P}^4$  случайной величины из исходной выборки. Вышеописанный процесс классификации повторяется. В результате обнаруживаются интервалы дискретизации  $S^j, j=\overline{1,6}$ , принадлежащие классу  $\Omega_2$ .

Первые из обнаруженных классов будут содержать большее количество интервалов дискретизации, которые имеют тенденцию убывания по мере последовательного обнаружения классов. Нетрудно заметить, что основу предлагаемой процедуры классификации составляют оценка близости центров многомерных интервалов дискретизации и соотношение между их частотами. При этом осуществляется выделение классов, соответствующих одномодальным фрагментам совместной плотности вероятности анализируемых случайных величин.

Результаты применения непараметрического алгоритма автоматической классификации. Рассмотрим практическое применение разработанного непараметрического алгоритма автоматической классификации при обработке спектральных данных дистанционного зондирования. Исследуемая территория соответствовала горной лесотундре, расположенной в западной части Алтае-Саянского региона (50°03′ северной широты, 85°15′



Puc. 2. Фрагмент спутниковой съёмки Worldview-2

восточной долготы) на высоте 2273 м над уровнем моря. Исходная информация формировалась по фрагменту спутниковой съёмки Worldview-2 [18] с пространственным разрешением 0.6 м. Размер фрагмента составлял  $162 \times 192$  пикселя, а его площадь — 1.1 га. Каждый пиксель характеризовался четырьмя спектральными каналами: синий  $(x_1)$ , зелёный  $(x_2)$ , красный  $(x_3)$ , ближний инфракрасный  $(x_4)$ .

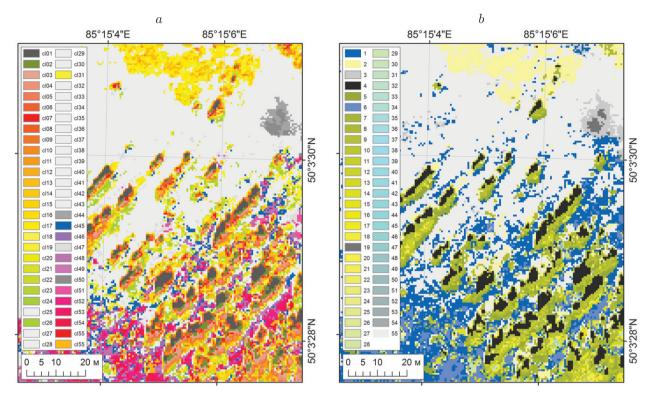
На снимке экспертами визуально выделялись куртины кедрового стланика (Pinus sibirica) в виде полос с тенями (рис. 2). Просматриваются участки с травяно-кустарниковым покровом и выходами горных пород. На анализируемом участке проводились исследования пространственно-временной динамики роста кедра и кедрового стланика в изменяющихся климатических условиях [19].

Проведём сравнение результатов автоматической классификации спектральных данных дистанционного зондирования территории с применением предлагаемого алгоритма и возможностей программного продукта Erdas Imagine. В вышеуказанном программном продукте использовался метод k-средних при заданном количестве классов. Напомним, что в предлагаемом непараметрическом алгоритме количество классов не задаётся. Они являются по определению вероятностными и соответствуют одномодальным фрагментам совместной плотности вероятности случайных величин x. Поэтому следует ожидать, что количество обнаруживаемых классов предлагаемым непараметрическим алгоритмом может быть больше по сравнению с методом k-средних.

Однако для обеспечения анализа сравниваемых методов количество классов принималось равным M=55. Для этого с использованием предлагаемого непараметрического алгоритма проведена классификация исходных данных и определено значение M=55.

Пространственное отображение на исследуемой территории результатов автоматической классификации с помощью сравниваемых методов приведено на рис. 3. Объём исходных статистических данных составил n=31104 пикселя в пространстве  $x=(x_v,v=\overline{1,4})$ .

При использовании непараметрического алгоритма автоматической классификации количество интервалов дискретизации по каждому спектральному признаку соответству-



 $Puc.\ 3.$  Пространственное отображение результатов автоматической классификации: с использованием программного продукта Erdas Imagine (a) и разработанного непараметрического алгоритма (b) при количестве классов M=55

ет значению  $(N_4^*)^{1/4}=18$ . При этом значения интервалов дискретизации по  $x_v, v=\overline{1,4}$ , равны:  $\beta_1=13.5; \ \beta_2=24; \ \beta_3=17.9; \ \beta_4=41.5$ . По результатам применения алгоритма в 16 классах количество пикселей составляет более 100, а в 22 — менее 10. Каждый класс, обнаруженный с помощью метода k-средних, содержит более 100 пикселей.

Результаты классификации сравниваемых алгоритмов при их пространственном отображении являются сопоставимыми. Выделяются полосы деревьев и тени от них, участки тундры, кустарников и каменистые поверхности. В общем случае фиксация количества классов в программном продукте Erdas Imagine сокращает возможности проверки гипотез об неоднородности спектральных данных исследуемой территории по сравнению с результатами непараметрического алгоритма автоматической классификации. Причём интерпретация полученных результатов с использованием визуального дешифрирования является ограниченной. Обнаруженные дополнительные закономерности неоднородности спектральных данных с помощью предлагаемого метода создают основу планирования полевых обследований для проверки и обоснования полученных результатов классификации.

Заключение. Предлагаемый непараметрический алгоритм автоматической классификации в условиях статистических данных большого объёма основан на их «сжатии» путём декомпозиции многомерного пространства признаков. В результате исходная выборка преобразуется в массив данных, составленный из центров многомерных интервалов дискретизации и соответствующих им частот принадлежности случайных величин. Основу процедуры классификации составляют проверка близости центров многомерных интервалов дискретизации и соотношения между их частотами. При этом выделяются классы, характеризующиеся одномодальными фрагментами совместной плотности вероятности анализируемых случайных величин, и их количество априори не задаётся. Ре-

зультаты применения непараметрического алгоритма автоматической классификации и программного продукта Erdas Imagine при обработке данных дистанционного зондирования исследуемой территории визуально сопоставимы. При использовании сравниваемых методов могут отличаться количество обнаруживаемых классов и распределение между ними спектральных данных. Это создаёт основу планирования полевых исследований анализируемых территорий для обоснования результатов классификации.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00251).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. **Борзов С. М., Потатуркин О. И.** Классификация гиперспектральных изображений при различных способах формирования обучающих выборок // Автометрия. 2018. **54**, № 1. С. 89–97.
- 2. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Непараметрические алгоритмы оценивания состояний природных объектов // Автометрия. 2018. **54**, № 5. С. 33–39.
- 3. Дорофеюк А. А. Алгоритмы автоматической классификации (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 78–113.
- 4. Дорофеюк А. А. Методология экспертно-классификационного анализа в задачах управления и обработки сложноорганизованных данных (история и перспективы развития) // Проблемы управления. 2009. № 3.1. С. 19–28.
- 5. **Загоруйко Н. Г.** Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999. 270 с.
- 6. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. М.: Наука, 1970. 252 с.
- 7. Васильев В. И. Распознающие системы: Справочник. Киев: Наук. думка, 1983. 422 с.
- 8. **Васильев В. И.**, Эш С. Н. Особенности алгоритмов самообучения и кластеризации // Управляющие системы и машины. 2011. **233**, № 3. С. 3–9.
- 9. **Лапко А. В., Лапко В. А., Хлопов А. Н.** Непараметрический алгоритм автоматической классификации статистических данных // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. **54**, № 4. С. 72—78.
- 10. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Непараметрический алгоритм автоматической классификации в условиях статистических данных большого объёма // Информатика и системы управления. 2018. **57**, № 3. C. 59–70. DOI: 10.22250/isu.2018.57.59-70.
- 11. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Регрессионная оценка плотности вероятности и её свойства // Системы управления и информационные технологии. 2012. **49**, № 3–1. С. 152–156.
- 12. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Регрессионная оценка многомерной плотности вероятности и её свойства // Автометрия. 2014. **50**, № 2. С. 50–56.
- 13. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Оптимальный выбор количества интервалов дискретизации области изменения одномерной случайной величины при оценивании плотности вероятности // Измерительная техника. 2013. № 7. С. 24–27.
- 14. **Heinhold I., Gaede K.** Ingenieur Statistic. München Wien: Springer-Verlag, 1964. 352 p.
- 15. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Выбор оптимального количества интервалов дискретизации области значений двухмерной случайной величины // Измерительная техника. 2016. № 2. С. 14–17.

- 16. **Лапко А. В., Лапко В. А.** Метод дискретизации области значений многомерной случайной величины // Измерительная техника. 2019. № 1. С. 16–20.
- 17. **Scott D. W.** Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. N. J.: John Wiley & Sons, 2015. 384 p.
- 18. WorldView-2 Satellite Sensor (0.46m). URL: https://www.satimagingcorp.com/satellite-sensors/worldview-2 (дата обращения: 21.02.2019).
- 19. Kharuk V. I., Im S. T., Dvinskaya M. L. et al. Tree wave migration across an elevation gradient in the Altai Mountains, Siberia // Journ. Mountain Sci. 2017. 14, N 3. P. 442–452. DOI: 10.1007/s11629-016-4286-7.

Поступила в редакцию 21.02.2019 После доработки 03.04.2019 Принята к публикации 03.04.2019