УДК 621.391.26 : 519.2

# СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАКАГАМИ, ПОЛУЧЕННАЯ МЕТОДАМИ МОМЕНТОВ И МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

© **В. М. Артюшенко**[1], **В. И. Воловач**[2]

[1] *Технологический университет,*
*141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42*
[2] *Поволжский государственный университет сервиса,*
*445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4*
*E-mail: artuschenko@mail.ru*
*volovach.vi@mail.ru*

Проведена сравнительная оценка параметров плотности распределения вероятностей, найденных с помощью методов максимального правдоподобия и моментов, по их точности и сложности алгоритмов оценивания. Получены выражения, позволяющие дать оценку параметров распределения Накагами методом максимального правдоподобия. Приведена методика нахождения оценок параметров распределения Накагами методом моментов, при которой моменты распределения заменяются их оценками. Отмечено, что оценки параметров методом максимального правдоподобия имеют меньшую дисперсию и смещение по сравнению с оценками по методу моментов особенно при малых объёмах выборки. Показано, что в отличие от оценки энергетических параметров для аппроксимации реальных законов распределения Накагами требуется большой объём статистических данных, описывающих сигнал.

*Ключевые слова:* плотность распределения вероятностей, протяжённый объект, огибающая отражённого сигнала, метод моментов, метод максимального правдоподобия, оценка параметров распределения.

DOI: 10.15372/AUT20190304

**Введение.** Большое значение в радиотехнических системах и устройствах, работающих в условиях ближнего действия, придаётся выбору и обоснованию математических моделей сигналов, отражённых от пространственно протяжённых радиолокационных объектов: автомобилей, беспилотных летательных аппаратов, железнодорожного транспорта и т. д. [1–3].

Анализ временны́х реализаций отражённого от протяжённых объектов сигнала показывает, что, как правило, он имеет вид амплитудно-модулированного колебания, глубина модуляции которого изменяется в больших пределах и может достигать 100 % [4].

Согласно исследованиям [5] такой сигнал математически хорошо описывается многолучевой моделью

$$s(\boldsymbol{\lambda}, t) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Re} s_i(\boldsymbol{\lambda}, t), \tag{1}$$

где $s_i(\boldsymbol{\lambda}, t)$ — сигнал, принимаемый от произвольной $i$-й точки протяжённого объекта; $\boldsymbol{\lambda}$ — векторный информационный параметр; $N$ — количество отражающих элементов протяжённого объекта.

Существуют разнообразные виды модели (1), например модель, в которой в явном виде введены огибающая $U(t)$ и результирующая $\Theta_s(t)$ фазы принимаемого сигнала [6]:

$$s(\boldsymbol{\lambda}, t) = \mathrm{Re}\,\{U(t)\,\mathrm{e}^{j(\omega_0 t + \Theta_s(t))}\} = \mathrm{Re}\,\Big\{\sum_i U(t)\,\mathrm{e}^{j(\omega_0 t + \Theta_s(t))}\Big\},$$

где $\omega_0$ — несущая частота.

Целью представленной работы является проведение сравнительной оценки параметров распределения Накагами, полученных методами максимального правдоподобия и моментов, для аппроксимации сигнала, отражённого от протяжённого объекта.

Априорное знание статистических характеристик сигнала позволяет сформулировать более точные математические модели как обрабатываемого сигнала, несущего, например, информацию о параметрах движения протяжённого объекта, так и действующих на него помех, обоснованно подойти к разработке радиотехнических систем и устройств ближнего действия. Наибольший интерес для анализа представляет плотность распределения вероятностей (ПРВ) огибающей (амплитуды) (ПРВА) принимаемого сигнала.

**Оценка параметров ПРВ Накагами.** Хорошие результаты при аппроксимации ПРВА сигналов, отражённых от протяжённых объектов, дают ПРВ Накагами $W(U)$ и её начальные моменты $m_U^v$ [7]:

$$W(U) = \frac{2}{\Gamma(m)}\Big(\frac{m}{\Omega}\Big)^m U^{2m-1} \exp\Big(-\frac{m}{\Omega}\,U^2\Big), \qquad U \geqslant 0;$$
$$m_U^v = \frac{\Gamma(m + v/2)}{\Gamma(m)(\Omega/m)^{-v/2}}, \tag{2}$$

где $m = \Omega^2/(U^2 - \Omega^2)^2 \geqslant 0{,}5$; $\Omega = U^2$ — параметры распределения; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

ПРВ Накагами описывает довольно большой класс законов распределения огибающей случайного процесса, что позволяет создавать вероятностные модели, близкие к реальным и подверженные замираниям сигналов, и использовать их при статистической обработке экспериментальных данных для построения оптимальных радиотехнических систем и устройств ближнего действия.

При аппроксимации ПРВА реальных сигналов ПРВ Накагами по статистическим данным необходимо найти параметры распределения.

При известном параметре ПРВ $m$ найти оценку параметра $\Omega$, характеризующего среднюю мощность сигнала, не представляет особой сложности. Гораздо труднее подобрать параметр $m$ [8], определяющий вид ПРВ (рис. 1).

**Методика нахождения оценок параметров ПРВ Накагами методом максимального правдоподобия.** Методика нахождения оценок по методу максимального правдоподобия хорошо известна [9].

Если предположить, что имеет место независимость выборочных значений $L$ амплитуды сигнала $U_i$, то функцию правдоподобия для ПРВ Накагами (2) можно представить как

$$B(U_1, U_2, \ldots, U_L, m, \Omega) = \Big[\frac{2}{\Gamma(m)}\Big(\frac{m}{\Omega}\Big)^m\Big]^L \prod_{i=1}^{L} U_i^{2m-1} \exp\Big(-\frac{m}{\Omega}\,U_i^2\Big). \tag{3}$$

Оценки параметров ПРВ Накагами $m$ и $\Omega$ являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial \ln B}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial \ln B}{\partial \Omega} = 0$$

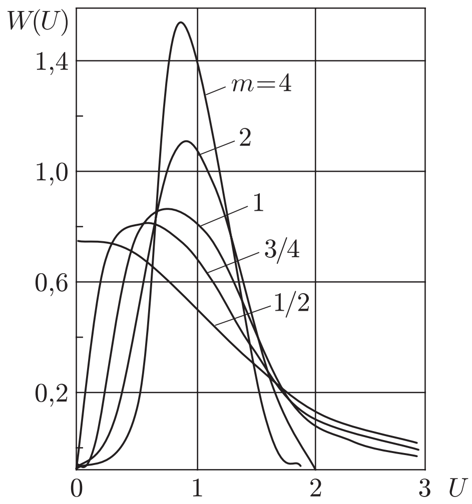


*Рис. 1.* Плотность распределения вероятностей Накагами $W(U)$ для различных значений параметра $m$

или

$$-L\Psi(m) + L\ln m - L\ln\Omega + 2\sum_{i=1}^{L}\ln U_i - \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{L}U_i^2 + L = 0, \quad -L\,\frac{m}{\Omega} + \frac{m}{\Omega^2}\sum_{i=1}^{L}U_i^2 = 0, \qquad (4)$$

где $\Psi(m) = \partial\ln\Gamma(m)/\partial m$ — пси-функция Эйлера [10].

Из второго уравнения системы (4) можно определить оценку параметра $\Omega$:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}U_i^2. \qquad (5)$$

Подставив в первое уравнение системы (4) вместо параметра $\Omega$ найденную оценку $\hat{\Omega}$ и обозначив

$$\delta(m) = \ln m - \Psi(m), \qquad (6)$$

получим

$$\hat{\delta} = \ln\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}U_i^2 + \frac{2}{L}\sum_{i=1}^{L}U_i. \qquad (7)$$

Выражение (7) определяет максимально правдоподобную оценку $\delta(m)$.

Решая уравнение (7) относительно $m$ при $\delta(m) = \hat{\delta}$, будем иметь оценку максимального правдоподобия параметра $m$.

Математическое ожидание оценки параметра $\Omega$ может быть получено с помощью выражения

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}U_i^2 = \Omega,$$

из которого видно, что оценка (5) является несмещённой.

Математическое ожидание оценки $\delta(m)$ будет определяться как

$$\hat{\delta} = \ln\hat{\Omega} - \frac{2}{L}\sum_{i=1}^{L} U_i = \hat{\Omega} - 2\ln U,$$

где

$$\ln U = \int_0^\infty \ln U\,\frac{2}{\Gamma(m)}\Big(\frac{m}{\Omega}\Big)^m U^{2m-1}\exp\Big(-\frac{m}{\Omega}U^2\Big)\,dU.$$

Если произвести подстановку $t = U^2$, то данный интеграл сводится к табличному [10]:

$$\ln U = \frac{1}{2}\Big[\Psi(m) - \ln\frac{m}{\Omega}\Big].$$

Тогда

$$\hat{\delta} = \delta + \ln\hat{\Omega} - \ln\Omega.$$

Как видно, смещение оценки $\hat{\delta}$ зависит от параметра $\Omega$ и вследствие несмещённости $\hat{\Omega}$ с ростом объёма выборки $L$ стремится к нулю. Следовательно, оценка $\hat{\delta}$ является асимптотически несмещённой.

Формально функция правдоподобия (3) может быть представлена в виде

$$B\Big(\frac{U}{\Omega}, m\Big) = g\Big(\sum_{i=1}^{L} U_i^2, \sum_{i=1}^{L}\frac{\ln U_i}{\Omega}, m\Big)h(U).$$

Поэтому согласно [10] оценки максимального правдоподобия $\hat{\Omega}$ и $\hat{\delta}$ являются эффективными.

По теореме Рао дисперсии оценок $\hat{\Omega}$ и $\hat{\delta}$ могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\sigma^2_{\hat{\Omega}} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\Omega}{\partial_j}\frac{\partial\Omega}{\partial_l}I^{-1}_{jl} = \frac{\Omega^2}{mL}, \qquad \sigma^2_{\hat{\delta}} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\delta}{\partial_j}\frac{\partial\delta}{\partial_l}I^{-1}_{jl} = \frac{m^{-1} - \Psi'(m)}{L}, \tag{8}$$

где $I^{-1}_{jl}$ — элементы матрицы, обратной к информационной матрице.

Так как при $j \neq l$ элементы матрицы $I^{-1}_{jl} = 0$, то оценки $\hat{\Omega}$ и $\hat{\delta}$ между собой некоррелированы.

Если может существовать только одна функция от оцениваемого параметра $\delta(m)$, для которой имеется эффективная оценка $\hat{\delta}$, то для самого параметра $m$ эффективной оценки не существует. Следовательно, можно рассматривать только асимптотическую эффективность и несмещённость оцениваемого параметра $m$.

Представим параметр $m$ как функцию $\delta$: $m = f(\delta)$ и $\hat{m} = f(\hat{\delta})$.

В этом случае в первом приближении можно записать

$$\hat{m} = m - f'(\delta)(\hat{\delta} - \delta). \tag{9}$$

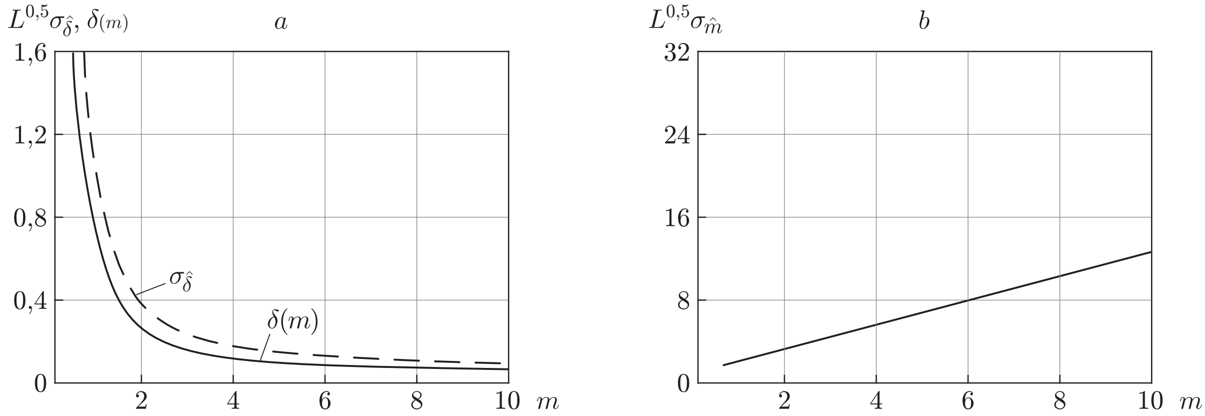


*Рис. 2.* Зависимости СКО от значений параметра $m$: оценки $\hat{\delta}$ и функции $\delta(m)$ ($a$); оценки $\hat{m}$ ($b$)

Тогда

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = [f'(\delta)]^2 \sigma_{\hat{\delta}}^2.$$

Очевидно, что

$$f'(\delta) = (\delta'(m))^{-1} = [m^{-1} - \Psi'(m)]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = [m^{-1} - \Psi'(m)]^{-2}, \qquad \sigma_{\hat{\delta}}^2 = [L\,|m^{-1} - \Psi'(m)|\,]^{-1}, \tag{10}$$

что полностью совпадает с минимальной границей дисперсии для оценки параметра $\hat{m}$, определяемой неравенством Крамера — Рао [11].

Следовательно, в первом приближении дисперсия оценки параметра $\hat{m}$ равна минимальной границе дисперсии $m$. Так как по мере увеличения числа выборок $L$ приближение (9) становится всё более точным, можно утверждать, что оценка $\hat{m}$ является асимптотически эффективной.

На рис. 2 представлены зависимости среднеквадратического отклонения (СКО) оценок $\hat{\delta}$ и $\hat{m}$, а также функции $\delta(m)$ от параметра $m$.

Необходимо отметить, что определение максимально правдоподобной оценки параметра $m$ и её дисперсии по формулам (6) и (10) связано с весьма трудоёмкими вычислениями. Для практических расчётов можно использовать приближённые выражения

$$\hat{m} = 0{,}504\hat{\delta}^{-1} + 0{,}126, \qquad \sigma_{\hat{m}} = L^{-0{,}5}(1{,}6m - 0{,}36).$$

В этом случае линейная погрешность аппроксимации не превышает 1 %. Это значительно меньше величины ошибок статистических расчётов при объёме выборки, равной нескольким сотням.

**Методика нахождения оценок параметров ПРВ Накагами методом моментов.** На практике для оценки параметров ПРВ Накагами часто пользуются методом моментов. В этом случае оценки параметров ПРВ получаются путём замены моментов распределения их оценками.

Проведём сравнительную оценку эффективности метода моментов по отношению к методу максимального правдоподобия.

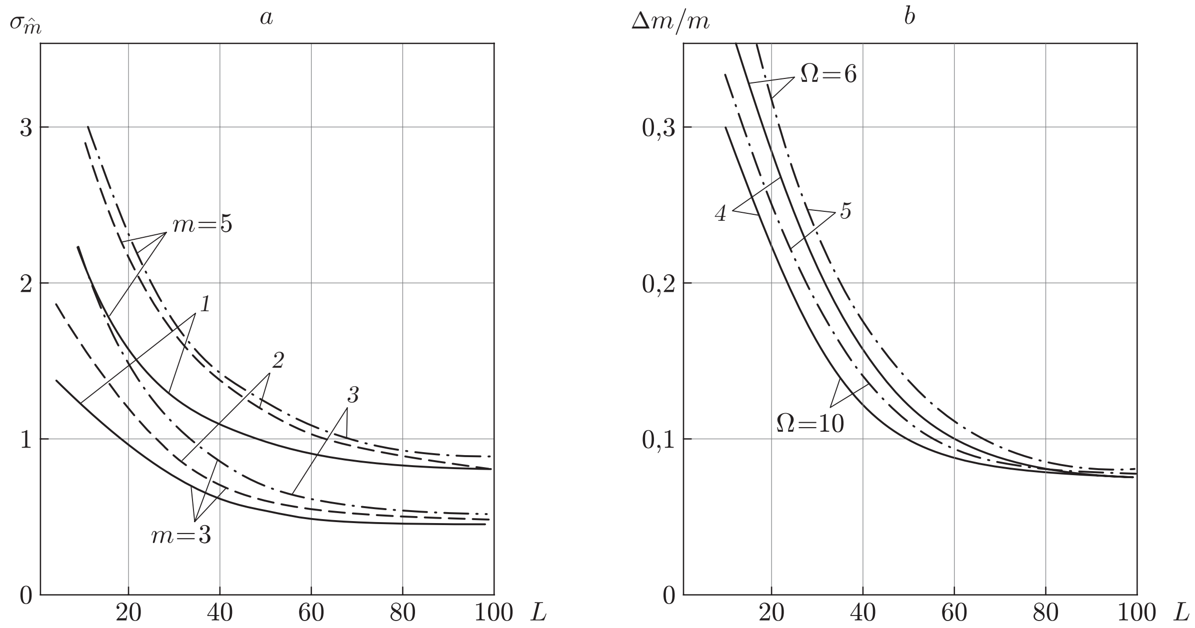


*Рис. 3.* Зависимости среднеквадратического отклонения от размеров выборки $L$: СКО $\hat{m}$ ($a$) и относительное смещение $\Delta m/m$ ($b$). Обозначения: *1* — минимальная граница СКО; *2* — СКО метода максимального правдоподобия; *3* — СКО метода моментов; *4* — относительное смещение $\Delta m/m$, метод правдоподобия; *5* — относительное смещение $\Delta m/m$, метод моментов

Оценка параметра $\hat{\Omega}$ по обоим методам идентична. Оценка параметра $\hat{m}$ по методу моментов может быть найдена из выражения

$$\hat{m} = \hat{\Omega}^2 \Big/ \Big(\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} U_i^4 - \hat{\Omega}^2\Big).$$

Довольно сложно провести аналитическое исследование дисперсии оценки $\hat{m}$. Для сравнения применялся метод статистического моделирования. В качестве эталонного использовалось распределение $\chi^2$. Заметим, что данное распределение является частным случаем ПРВ Накагами [12] с шестью и десятью степенями свободы, что соответствует $m = 3$, $\Omega = 6$ и $m = 5$, $\Omega = 10$.

Результаты моделирования продемонстрировали, что дисперсия оценки параметра $\Omega$ в точности совпадает с нижней границей дисперсии (8).

На рис. 3 представлены зависимости СКО $\hat{m}$ и относительного смещения $\Delta m/m$ от размеров выборки $L$ для обоих методов оценивания.

Результаты статистического моделирования показали, что при малых объёмах выборки $L$ оценка параметров $m$ ПРВ Накагами неэффективна, так как имеет место большое смещение, величина которого уменьшается с ростом $\Omega$.

**Заключение.** В данной работе установлено, что для аппроксимации огибающей реального сигнала, отражённого от протяжённого объекта в условиях ближнего действия, могут быть использованы ПРВ Накагами и его начальные моменты.

Проведён сравнительный анализ оценки параметров распределения Накагами по точности и сложности алгоритмов оценивания методами максимального правдоподобия и моментов. Получены выражения для оценки параметров распределения Накагами. Определено, что наиболее эффективна оценка параметра $m$ с помощью метода правдоподобия, так как она имеет меньшую дисперсию и смещение по сравнению с оценками по методу моментов; это особенно заметно при малых объёмах выборки. Показано, что оценки максимального правдоподобия $\hat{\Omega}$ и $\hat{\delta}$ для соответствующего метода являются эффективными, а оцениваемый параметр $m$ и его оценку $\hat{m}$ можно рассматривать как асимптотически эффективные и несмещённые. Отмечается, что для удовлетворительной аппроксимации реальных законов распределения ПРВ Накагами требуется относительно большой объём статистических данных, при этом для оценки энергетических параметров объём выборки сравнительно мал.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Островитянов Р. В., Басалов Ф. А.** Статистическая теория радиолокации протяженных целей. М.: Радио и связь, 1982. 232 с.
2. **Проблемы** радиолокации протяженных объектов. Свердловск: Изд-во УПИ им. С. М. Кирова, 1983. 160 с.
3. **Яковлев А. Н., Коблов Г. П.** Гидролокаторы ближнего действия. Л.: Судостроение, 1983. 200 с.
4. **Артюшенко В. М.** Обработка информационных параметров сигнала в условиях аддитивно-мультипликативных негауссовских помех. М.: Изд-во “Канцлер”, 2014. 298 с.
5. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Анализ математических моделей полезных сигналов и информационных процессов радиолокационных устройств ближнего радиуса действия // Изв. вузов России. Сер. Радиоэлектроника. 2014. № 5. С. 14–20.
6. **Тихонов В. И., Кульман Н. К.** Нелинейная фильтрация и квазиоптимальный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
7. **Nakagami M.** The m-distribution — a general formula of intensity distribution of rapid fading // Proc. of a Symp. Held on Statistical Methods in Radio Wave Propagation. Oxford, UK, 18–20 June, 1958. P. 3–36.
8. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Идентификация параметров распределения аддитивных и мультипликативных негауссовских помех // Автометрия. 2017. **53**, № 3. С. 36–43.
9. **Кендалл М., Стюарт А.** Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. Т. 2. 899 с.
10. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2011. 1232 с.
11. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
12. **Акиншин Н. С., Мелитицкий В. А., Олейник В. А., Румянцев В. Л.** Некоторые статистические характеристики параметра $m$-распределения // Радиотехника и электроника. 1988. **33**, № 12. С. 8–13.


*Поступила в редакцию 26.03.2019*
*После доработки 03.04.2019*
*Принята к публикации 04.04.2019*