

УДК 535.4

ПРИБЛИЖЁННАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ В ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ

© Ю. В. Чугуй^{1,2,3}¹Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,

630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41

²Новосибирский государственный университет,

630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

³Новосибирский государственный технический университет,

630073, г. Новосибирск, просп. Карла Маркса, 20

E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

Разработана конструктивная (приближённая) теория формирования изображений одномерных бинарных объектов в частично когерентной проекционной дифракционно-ограниченной системе при произвольном соотношении угловых размеров источника света и апертурной диафрагмы. Решение двумерной задачи для таких объектов можно свести к одномерной: к вычислению интеграла в виде свёртки объекта с обобщённым апертурным откликом, спектр которого имеет трапецеидальный профиль, определяемый параметрами системы. Полученный интеграл свёртки в дальнейшем подвергается нелинейному преобразованию, степень которого задаётся отношением угловых размеров источника к апертурной диафрагме. Показано, что профиль изображений, сформированных в частично когерентном свете, определяется пороговой характеристикой системы, обеспечивающей достоверное нахождение положения границ бинарных объектов. Предложена аппроксимация этой характеристики. Теория допускает простую физическую интерпретацию явлений в частично когерентных проекционных системах.

Ключевые слова: формирование изображений, интенсивность, частично когерентный свет, дифракция света, пространственная фильтрация, граница объекта.

DOI: 10.15372/AUT20190310

Введение. В последние годы в практике оптического приборостроения при разработке проекционных систем всё чаще используют частично когерентные осветители на основе светодиодов. Такие осветители в отличие от когерентных на базе лазеров обеспечивают высокую степень однородности освещающего пучка [1]. Достигается это благодаря тому, что вместо точечного источника (лазера) применяется протяжённый источник, излучающий некогерентный квазимонохроматический свет в пределах малой площадки (несколько мм²). Данный источник света можно рассматривать как совокупность несфазированных между собой элементарных источников (атомов), излучающих свет случайным образом. Эффективно подавить когерентные шумы (спекл-шумы) удастся усреднением волн от множества источников. Важно, что при соответствующем выборе угловых размеров протяжённого источника сохраняется возможность обработки изображений методами фурье-оптики, в частности выполнение операции высокочастотной фильтрации.

Существующая теория формирования изображений объектов в частично когерентном свете представляется сложной для практического применения. Так, для двумерных объектов она сводится к вычислению четырёхмерных интегралов, а для одномерных объектов — двумерных интегралов [2]. Поэтому для упрощения вычислений при расчёте полей в частично когерентной проекционной системе используются результаты, полученные для двух типов оптических систем: абсолютно когерентных с точечным источником света и

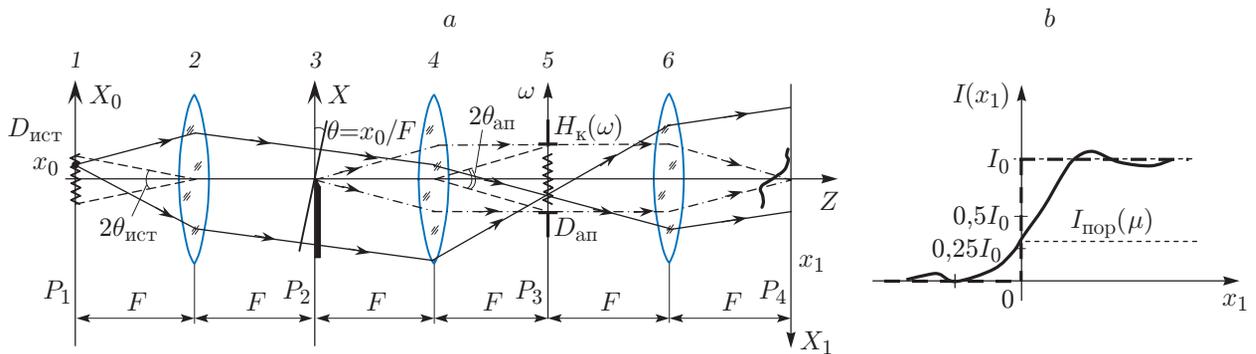


Рис. 1. Частично когерентная оптическая система формирования изображений объектов: схема системы (а) и распределение интенсивности света в изображении полуплоскости (резкого прямолинейного края) (b). Обозначения: 1 — протяжённый некогерентный источник света с угловыми размерами $2\theta_{\text{ист}}$, 2 — коллиматор, 3 — объект, 4 и 6 — проекционные объективы, 5 — апертурная диафрагма с угловыми размерами $2\theta_{\text{ап}} \geq 2\theta_{\text{ист}}$

абсолютно некогерентных на базе протяжённых источников. В таких системах входные и выходные световые распределения связаны интегралом свёртки, причём в когерентной системе их суммирование производится на амплитудном уровне, а в некогерентной — на уровне интенсивностей. Однако использование этих двух подходов при описании преобразований волновых фронтов в частично когерентной системе может приводить к некорректным результатам, особенно при прецизионном размерном контроле объектов в проходящем свете теневым методом [3].

В [3, 4] рассмотрены вопросы выбора уровней порогов при определении границ объектов в их изображениях с учётом угловых размеров источника и апертурной диафрагмы проекционной системы. Полученные корректирующие добавки справедливы лишь для случаев малых и больших угловых размеров источника по сравнению с угловыми размерами апертуры проекционного объектива.

Цель представленного исследования заключалась в разработке конструктивной (приближённой) теории формирования изображений одномерных бинарных объектов в частично когерентной дифракционно-ограниченной проекционной системе при произвольном соотношении угловых размеров источника света и апертурной диафрагмы. Согласно этой теории решение двумерной задачи для таких объектов сводится к одномерной: к вычислению одномерных интегралов типа свёртки с последующим их нелинейным преобразованием. Такая теория допускает простую интерпретацию физических явлений в оптических частично когерентных проекционных системах.

Традиционная теория формирования изображений объектов в частично когерентном свете. Обратимся к типичной проецирующей системе $4F$, схема которой показана на рис. 1. Система состоит из двух блоков: осветительного и проекционного. Первый из них включает квазимонохроматический источник света 1 со средней длиной волны λ и с линейными размерами $D_{\text{ист}}$ (плоскость P_1), а также коллиматор 2. В состав второго блока входят объективы 4 и 6 (для упрощения дальнейших вычислений фокусные расстояния элементов 2, 4 и 6 выбраны одинаковыми и равными F). Исходный объект располагается в передней фокальной плоскости P_2 объектива 4. В его задней фокальной плоскости P_3 находится апертурная диафрагма 5 с угловыми размерами $2\theta_{\text{ап}} = D_{\text{ап}}/F$, где $D_{\text{ап}}$ — диаметр диафрагмы ($2\theta_{\text{ап}} \ll 1$). Эта плоскость сопряжена с плоскостью источника P_1 . Иными словами, источник света 1 проецируется в плоскость апертурной диафрагмы 5, в

которой наблюдается его изображение. В случае когда угловые размеры источника малы: $2\theta_{\text{ист}} = D_{\text{ист}}/F \ll 2\theta_{\text{ап}}$, имеет место когерентное освещение объекта [2]. Строго говоря, этот случай реализуется при угловых размерах $2\theta_{\text{ист}}$, близких к нулю (случай лазера). Если же угловые размеры протяжённого источника много больше угловых размеров апертурной диафрагмы ($2\theta_{\text{ист}} \gg 2\theta_{\text{ап}}$), то оптическая система относится к классу некогерентных. В промежуточном случае, когда $0 < 2\theta_{\text{ист}} < 2\theta_{\text{ап}}$, система является частично когерентной [2].

Далее найдём распределение интенсивности света $I_{\text{ч.к}}(x_1)$ в плоскости P_4 при размещении на входе проекционной системы в плоскости P_2 объекта с амплитудным пропусканием $f(x)$, освещённого протяжённым однородным источником света I с размерами $D_{\text{ист}}$ и энергетической светимостью S . С этой целью разобьём протяжённый источник на совокупность точечных источников размерами Δx_0 . Для начала выделим один точечный источник с координатой x_0 и рассмотрим элементарный отклик всей системы. Очевидно, что сферическая волна от точечного источника преобразуется коллиматором, отстоящим на расстоянии F от источника I , в плоскую наклонную волну с амплитудой, равной $\sqrt{I_0} e^{-jkx_0x/F} \Delta x_0 = \sqrt{I_0} e^{-jux} \Delta x_0$ ($u = k\theta$, $\theta = x_0/F$, $k = 2\pi/\lambda$), где I_0 — интенсивность света точечного источника в плоскости P_2 , определяемая светимостью S протяжённого источника и геометрией осветительного блока.

Указанная волна далее модулируется объектом с амплитудным пропусканием $f(x)$, размер которого вдоль оси x ограничен входным полем зрения системы. С помощью проецирующей системы с угловой апертурой $2\theta_{\text{ап}}$ в плоскости P_4 формируется изображение объекта в виде элементарного выходного амплитудного распределения $\Delta g(x_1, u)$. При его нахождении учтём, что импульсный отклик такой дифракционно-ограниченной системы $h(x_1)$ определяется передаточной функцией апертурной диафрагмы $H(\omega) = \text{rect}(\omega/(2\omega_{\text{ап}}))$, где ω — пространственная частота в рад/мм, а $\omega_{\text{ап}} = k\theta_{\text{ап}}$ [5]. Нетрудно найти, что отклик

$$h(x_1) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{j\omega x_1} d\omega = \frac{\sin(\omega_{\text{ап}} x_1)}{\pi x_1}.$$

Здесь $\mathfrak{F}^{-1}\{\cdot\}$ — оператор обратного преобразования Фурье. Заметим, что полученная формула справедлива в том случае, если апертуры объективов 4 и 6 заметно превосходят поле зрения системы. Таким образом, рассматриваемую систему можно отнести к классу пространственно-инвариантных [5, 6]. В результате для элементарного распределения $\Delta g(x_1, u)$ можно получить следующее выражение:

$$\Delta g(x_1, u) = g(x_1, u) \Delta u = \left[\sqrt{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jux} \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}(x_1 - x))}{\pi(x_1 - x)} dx \right] \Delta u, \quad (1)$$

где $\Delta u = k\Delta x_0/F$.

Определим распределение интенсивности света в изображении объекта с учётом действия всех светящихся точек протяжённого источника света I . Так как эти точечные источники некогерентны между собой (несинфазны), то интегрирование по всем элементарным источникам нужно производить не по амплитуде, а по интенсивности $|g(x_1, u)|^2$, причём пределы суммирования определяются угловыми размерами источника $2\theta_{\text{ист}}$ [2].

С учётом вышеуказанного для интенсивности света $I(x_1)$ в выходном изображении объекта $f(x)$, освещённого протяжённым источником света, можно получить выражение

$$\begin{aligned}
I_{\text{ч.к}}(x_1) &= \frac{I_0}{2\omega_{\text{ист}}} \int_{-\omega_{\text{ист}}}^{\omega_{\text{ист}}} |g(x_1, u)|^2 du = \\
&= \frac{I_0}{2\omega_{\text{ист}}} \int_{-\omega_{\text{ист}}}^{\omega_{\text{ист}}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jux} \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}(x_1 - x))}{\pi(x_1 - x)} dx \right|^2 du. \quad (2)
\end{aligned}$$

Отметим, что интенсивность $I_{\text{ч.к}}(x_1)$ нормирована на параметр источника $2\omega_{\text{ист}} = 2k\theta_{\text{ист}}$, который при $2\theta_{\text{ист}} \leq 2\theta_{\text{ап}}$ совпадает с $2\omega_{\text{ист}}$, а при $2\theta_{\text{ист}} > 2\theta_{\text{ап}}$ равен $2\omega_{\text{ап}}$.

Выполним в выражении (2) интегрирование по переменной u с учётом того, что интенсивность света $|g(x_1, u_{\text{ист}})|^2 = \dot{g}(x_1, u_{\text{ист}})\dot{g}^*(x_1, u_{\text{ист}})$, где знак $*$ обозначает операцию сопряжения комплексной функции $\dot{g}(x_1, u_{\text{ист}})$. В результате выражение для интенсивности $I_{\text{ч.к}}(x_1)$ принимает стандартный вид:

$$I_{\text{ч.к}}(x_1) = I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - \xi) f^*(x_1 - \eta) \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}\xi)}{\pi\xi} \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}\eta)}{\pi\eta} \frac{\sin(\omega_{\text{ист}}(\xi - \eta))}{\omega_{\text{ист}}(\xi - \eta)} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Проанализируем выражение (3). Видно, что действие протяжённого некогерентного источника сводится к появлению члена $t(\xi - \eta) = \sin(\omega_{\text{ист}}(\xi - \eta))/(\omega_{\text{ист}}(\xi - \eta))$, который определяет когерентные свойства оптической системы. Действительно, в случае точечного источника света, когда $\omega_{\text{ист}} \ll \omega_{\text{ап}}$ (причём $\omega_{\text{ист}} \rightarrow 0$), этот член стремится к единице, и таким образом получается известное выражение для распределения интенсивности света в изображении объекта при освещении его абсолютно когерентным пучком света [5]:

$$I_{\text{к}}(x_1) = I_0 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - x) \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}x)}{\pi x} dx \right|^2. \quad (4)$$

Схема такой когерентно-оптической системы приведена на рис. 2. Существенно, что при когерентном освещении в плоскости P_3 формируется пространственный спектр объ-

екта $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$, где $\mathfrak{F}\{\cdot\}$ — оператор прямого преобразования

Фурье. Этот спектр фильтруется апертурной диафрагмой системы.

В другом предельном случае, когда угловые размеры источника много больше угловых размеров апертуры ($2\theta_{\text{ист}} \gg 2\theta_{\text{ап}}$), функция $t(\xi - \eta)\omega_{\text{ист}}$ стремится к дельта-функции $\pi\delta(\xi - \eta)$. При этом действующий размер источника в оптической системе, как уже отмечалось, определяется угловыми размерами апертурной диафрагмы 5, которая пропускает изображение источника в плоскости P_3 лишь в пределах её апертуры: $2\omega_{\text{ист}} = 2\omega_{\text{ап}}$. В результате выходное распределение (3) принимает вид

$$I_{\text{нк}}(x_1) = I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1 - x)|^2 \frac{\sin^2(\omega_{\text{ап}}x)}{\pi\omega_{\text{ап}}x^2} d\xi. \quad (5)$$

Здесь I_0 — интенсивность освещающего объект пучка в плоскости P_2 , определяемая угловым размером апертурной диафрагмы $2\theta_{\text{ап}}$. Это выражение описывает преобразование

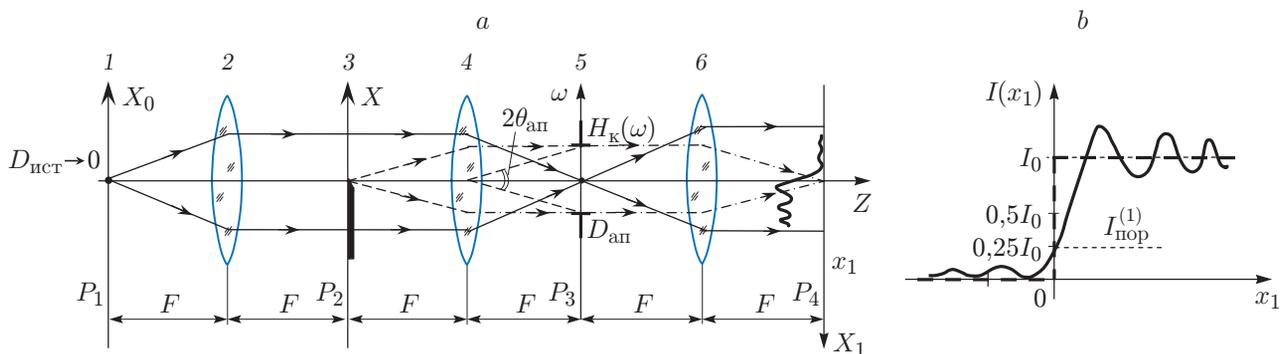


Рис. 2. Абсолютно когерентная оптическая проекционная система на базе преобразования Фурье: схема системы (а) и профиль интенсивности (плоскость P_4) в изображении полуплоскости (b). Обозначения: 1 — точечный источник света ($2\theta_{ист} \rightarrow 0$), 2 — коллиматор, 3 — объект, 4 и 6 — проекционные объективы, 5 — апертурная диафрагма. В плоскости P_3 наблюдается спектр объекта, а в плоскости P_4 — результат его фильтрации апертурной диафрагмой

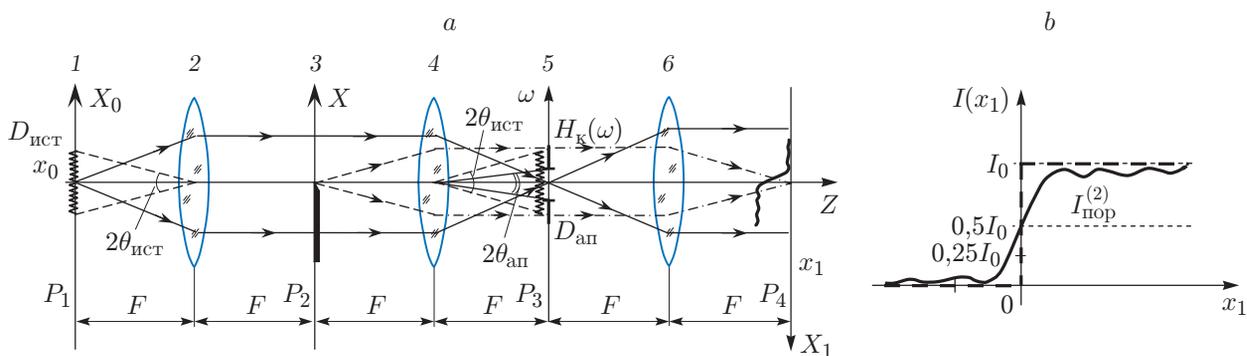


Рис. 3. Абсолютно некогерентная оптическая система формирования изображений объектов: схема системы (а) и распределение интенсивности света в изображении полуплоскости (b). Обозначения: 1 — протяжённый некогерентный источник света с угловыми размерами $2\theta_{ап} \gg 2\theta_{ист}$, 2 — коллиматор, 3 — объект, 4 и 6 — проекционные объективы, 5 — апертурная диафрагма

полей в абсолютно некогерентной оптической системе [5], согласно которому выходное распределение объекта есть результат свёртки пропускания объекта по интенсивности $|f(x)|^2$ с квадратом импульсного отклика системы по модулю $|h(x)|^2$, делённого на параметр $\omega_{ап}$ [5]. На рис. 3 приведена схема некогерентной оптической системы. Отметим, что в этом случае в плоскости P_3 вместо спектра Фурье $F(\omega)$ объекта наблюдается распределение интенсивности в виде свёртки спектра мощности объекта $|F(\omega)|^2$ с прямоугольной функцией $\text{rect}(\omega/(2\omega_{ист}))$, описывающей размеры однородного протяжённого источника. Будем далее называть системы квазикогерентными при $2\theta_{ист} \ll 2\theta_{ап}$ и квазинекогерентными при $2\theta_{ист} \gg 2\theta_{ап}$.

При дальнейшем рассмотрении ограничимся классом одномерных бинарных объектов применительно к их размерному контролю. В этот класс попадают многие объекты с чёткой теневой проекцией. Функция пропускания таких объектов принимает два значения: 1 и 0. Выберем далее в качестве объекта $f(x)$ резкий прямолинейный край (полуплоскость) — типичный фрагмент многих тел с чёткой теневой проекцией. Его амплитудное

пропускание, как известно, описывается ступенчатой функцией Хевисайда $f(x) = Y(x)$ [5]. Графики поведения интенсивности света в изображении этого объекта в когерентном и некогерентном случаях приведены на рис. 2, *b* и 3, *b*. Видно, что они заметно отличаются друг от друга. Так, значения интенсивности света в изображении объекта в точке $x_1 = 0$, соответствующей границе полуплоскости (геометрический край объекта), для абсолютно когерентного и некогерентного случаев равны: $I_{\text{к}}(0) = 0,25I_0$ и $I_{\text{нк}}(0) = 0,5I_0$. Этот важный результат положен в основу определения границы объекта пороговым методом [4], при котором в качестве порогов в когерентных и некогерентных системах выбирают значения интенсивности $I_{\text{пор}}^{(1)} = 0,25I_0$ и $I_{\text{пор}}^{(2)} = 0,5I_0$.

Очевидно, что в частично когерентной системе профиль изображения полуплоскости (распределение $I_{\text{ч.к}}(x_1)$) определяется параметрами $2\theta_{\text{ист}}$ и $2\theta_{\text{ап}}$. При этом $I_{\text{ч.к}}(0)$ принимает промежуточное значение между $0,25I_0$ и $0,5I_0$. Более того, можно показать, что значение функции $I_{\text{ч.к}}(x_1)$ в точке $x_1 = 0$ определяется лишь отношением угловых апертур источника и диафрагмы, т. е. параметром $\mu = 2\theta_{\text{ист}}/(2\theta_{\text{ап}})$. Действительно, подставляя в (3) функцию $f(x) = Y(x)$, после замены переменных $\omega_{\text{ап}}\xi = \alpha$ и $\omega_{\text{ап}}\eta = \beta$ формулу для интенсивности $I_{\text{ч.к}}(0)$ можно записать в следующем виде:

$$I_{\text{ч.к}}(x_1 = 0; \mu) = I_0 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\pi \alpha} \frac{\sin \beta}{\pi \beta} \frac{\sin(\mu(\alpha - \beta))}{\gamma(\alpha - \beta)} d\alpha d\beta, \quad (6)$$

где $\gamma = \mu$ при $\omega_{\text{ист}} \leq \omega_{\text{ап}}$ и $\gamma = 1$ при $\omega_{\text{ист}} > \omega_{\text{ап}}$. Отсюда следует, что значение $I_{\text{ч.к}}(0)$ зависит только от параметра μ , который, как можно видеть, является фундаментальным параметром оптической системы. В дальнейшем зависимость $I_{\text{ч.к}}(x_1 = 0; \mu)/I_0$ будем обозначать $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ и называть пороговой характеристикой частично когерентной проекционной системы ($0,25 \leq \tilde{I}_{\text{пор}}(\mu) \leq 0,5$).

Для практического применения, например при прецизионном контроле размеров объектов, крайне важно иметь зависимость $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ в аналитическом виде, получить которую путём вычисления вышеприведённого двойного интеграла не удаётся.

Исходя из изложенного возникает вполне естественный вопрос: а нельзя ли заметно упростить описание волновых преобразований в частично когерентных системах. Именно решению этой задачи посвящена данная работа, в которой и представлен предложенный конструктивный подход к описанию формирования изображений в таких системах. Несмотря на заметное упрощение процесса преобразования полей в частично когерентной системе, предложенная теория тем не менее адекватно отражает влияние конечных угловых размеров некогерентного источника света и апертурной диафрагмы на структуру изображений бинарных объектов.

Конструктивный подход к формированию изображений в частично когерентном свете. Решение будем искать для одномерных бинарных объектов в классе одномерных интегралов типа свёртки (вместо двумерных согласно (3)), причём интегралов такого вида, которые допускали бы достаточно наглядную физическую интерпретацию происходящих в системе явлений. При замене двумерного интеграла одномерным сначала «сконструируем» подынтегральное выражение таким образом, чтобы оно отражало в самом общем виде частично когерентные процессы в системе. А затем полученное распределение подвергнем нелинейному преобразованию. Степень нелинейности этого интеграла будем выбирать в зависимости от фундаментального параметра частично когерентной системы $\mu = \theta_{\text{ист}}/\theta_{\text{ап}}$, характеризующего когерентные свойства всей системы в целом (осветительный плюс проекционный блоки).

Прежде чем конструировать подынтегральное выражение, обратим внимание на то, что передаточные функции когерентной системы $H_{\text{к}}(\omega)$ и некогерентной системы $H_{\text{нк}}(\omega) =$

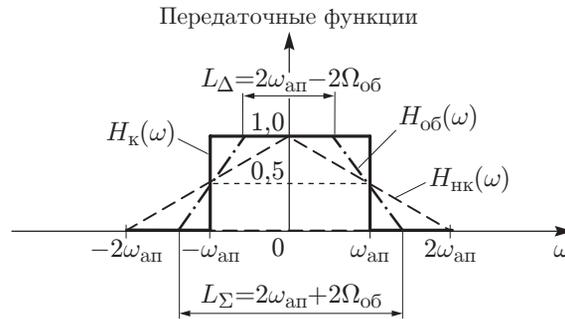


Рис. 4. Передаточные функции $H_k(\omega)$ и $H_{нк}(\omega)$ для абсолютно когерентной и некогерентной оптических систем. График обобщённой передаточной функции $H_{об}(\omega)$, характеризующей частично когерентные свойства системы в зависимости от параметров $2\omega_{ап}$ и $2\Omega_{об} = 2\omega_{ист}\omega_{ап}/(\omega_{ист} + \omega_{ап})$

$=\mathfrak{F}\{|h(x)|^2/\omega_{ап}\}$, определяющие характер фильтрации пространственных частот объекта $f(x)$, как известно [5], имеют принципиально разный вид. В то время как $H_k(\omega)$ описывается прямоугольной функцией, профиль $H_{нк}(\omega)$ имеет треугольный вид:

$$H_{нк}(\omega) = \Lambda(\omega) = \frac{1}{2\omega_{ап}} \left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{ап}}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{ап}}\right) \right],$$

где $\Lambda(\omega)$ — треугольная функция [5]. Графики поведения функций $H_k(\omega)$ и $H_{нк}(\omega)$ для двух типов систем приведены на рис. 4.

Выберем далее подынтегральное выражение искомого одномерного интеграла в виде свёртки $g_{об}(x)$ объекта $f(x)$ с некоторым обобщённым импульсным откликом $h_{об}(x)$, фурье-спектр $H_{об}(\omega)$ которого (передаточная функция) является промежуточным между $H_k(\omega)$ и $H_{нк}(\omega)$, а именно в виде трапецеидальной функции, получаемой при свёртке двух прямоугольных импульсов разной ширины.

С учётом вышеизложенного представим распределение $I_{ч.к}(x_1)$ (3) в следующем альтернативном виде:

$$\begin{aligned} \hat{I}_{ч.к}(x_1) &= I_0 [g_{об}(x_1)]^{2-\gamma_{нк}(\mu)} = I_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - x) h_{об}(x) dx \right]^{2-\gamma_{нк}(\mu)} = \\ &= I_0 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - x) \frac{\sin(\omega_{ап}x)}{\pi x} \frac{\sin(\Omega_{об}x)}{\Omega_{об}x} dx \right\}^{2-\gamma_{нк}(\mu)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $h_{об}(x) = \frac{\sin(\omega_{ап}x)}{\pi x} \frac{\sin(\Omega_{об}x)}{\Omega_{об}x}$. Выберем далее параметр $\Omega_{об}$, который будем называть обобщённым угловым параметром системы: $\Omega_{об} = \omega_{ап}\omega_{ист}/(\omega_{ап} + \omega_{ист})$ (он определяется суммой обратных величин $\omega_{ап}$ и $\omega_{ист}$: $\Omega_{об}^{-1} = \omega_{ап}^{-1} + \omega_{ист}^{-1}$). Что касается параметра $\gamma_{нк}(\mu)$, то, как уже отмечалось, он регулирует степень нелинейности преобразования в зависимости от когерентных свойств системы. Так, для когерентной системы $\gamma_k = 0$, а для некогерентной $\gamma_{нк} = 1$. В дальнейшем будем называть $\gamma_{нк}(\mu)$ фактором некогерентности системы. Очевидно, что он должен изменяться в пределах $0 \leq \gamma_{нк}(\mu) \leq 1$.

Нетрудно показать, что в предельных случаях абсолютно когерентной и абсолютно некогерентной систем распределение (7) в случае бинарных объектов $f(x)$ совпадает с

выражениями (4) и (5). Действительно, в абсолютно когерентном случае ($2\omega_{\text{ист}} \ll 2\omega_{\text{ап}}$, причём $\Omega_{\text{об}} \rightarrow 0$) член $\sin(\Omega_{\text{об}}x)/(\Omega_{\text{об}}x)$ стремится к единице. Если выбрать $\gamma_{\text{нк}} = 0$, то выражение (7) совпадёт с (4). В некогерентном случае ($2\omega_{\text{ист}} \gg 2\omega_{\text{ап}}$) параметр $\Omega_{\text{об}} \rightarrow \omega_{\text{ап}}$, а член $\sin(\Omega_{\text{об}}x)/(\Omega_{\text{об}}x)$ принимает вид $\sin(\omega_{\text{ап}}x)/(\omega_{\text{ап}}x)$. Таким образом, интеграл (7) при $\gamma_{\text{нк}} = 1$ сводится к интегралу (5), описывающему формирование изображений в абсолютно некогерентном свете.

Вернёмся теперь к более детальному анализу интеграла свёртки в выражении (7). Нетрудно понять, что спектр $H_{\text{об}}(\omega) = \mathfrak{F}\{h_{\text{об}}(x)\}$ обобщённого импульсного отклика $h_{\text{об}}(x)$ является свёрткой двух прямоугольных импульсов шириной $2\omega_{\text{ап}}$ и $2\Omega_{\text{об}}$. При вычислении этой свёртки необходимо принять во внимание, что параметр $2\Omega_{\text{об}}$ изменяется в пределах $0 \leq 2\Omega_{\text{об}} \leq 2\omega_{\text{ап}}$. Следовательно, при вычислении свёртки результирующее распределение $H_{\text{об}}(\omega) = \Omega_{\text{об}}^{-1} \text{rect}(\omega/\omega_{\text{ап}}) \otimes \text{rect}(\omega/(2\Omega_{\text{об}}))$ в общем случае имеет трапециевидальный вид, причём размер «полочки» $L_{\Delta} = 2\omega_{\text{ап}} - 2\Omega_{\text{об}}$, а её амплитуда равна 1. Общая длина распределения $L_{\Sigma} = 2\omega_{\text{ап}} + 2\Omega_{\text{об}}$ (см. рис. 4). В частном случае, когда $\omega_{\text{ап}} = \Omega_{\text{об}}$, спектр $H_{\text{об}}(\omega)$ (обобщённая передаточная функция частично когерентной системы) имеет треугольный вид с шириной распределения $4\omega_{\text{ап}}$.

Далее остановимся на выборе в формуле (7) фактора некогерентности $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$. Применительно к размерному контролю одномерных бинарных объектов с пропуском $f(x)$ он должен выбираться так, чтобы выходное распределение $\tilde{I}_{\text{ч.к}}(x_1)$, заданное по формуле (7) в окрестности границ объекта, в максимальной степени совпадало со строгим выражением (3), описывающим процессы преобразования полей в частично когерентной проекционной системе. Представляется вполне естественным при нахождении зависимости $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ выбрать в качестве тестового объекта полуплоскость. Очевидно, что функцию $f(x)$ можно представить в виде алгебраической суперпозиции ступенчатых функций $Y(x)$, отстоящих на определённых расстояниях друг от друга. Например, объект в виде щели шириной D , описываемый функцией пропускания $f(x) = \text{rect}(x/D)$, есть разность двух функций Хевисайда: $f(x) = Y(x + 0,5D) - Y(x - 0,5D)$.

Если теперь в выражение (7) подставить функцию $f(x) = Y(x)$, то значение функции $g_{\text{об}}(x_1)$ в точке $x_1 = 0$ определяется как

$$g_{\text{об}}(x_1 = 0) = \sqrt{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) \frac{\sin(\omega_{\text{ап}}x)}{\pi x} \frac{\sin(\Omega_{\text{об}}x)}{\Omega_{\text{об}}x} dx = \sqrt{I_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) h_{\text{об}}(x) dx. \quad (8)$$

При вычислении интеграла (8) воспользуемся теоремой замкнутости для спектров Фурье [5]:

$$g_{\text{об}}(0) = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}\{Y(x_0)\} \mathfrak{F}[h_{\text{об}}(x)] d\omega = \frac{\sqrt{I_0}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) H_{\text{об}}(\omega) d\omega.$$

Учитывая фильтрующие свойства дельта-функции, а также нечётность функции $H_{\text{об}}(\omega)/\omega$, нетрудно получить $g_{\text{об}}(0) = 0,5\sqrt{I_0}$. Тогда зависимость функции (7) в точке $x_1 = 0$ имеет вид

$$\hat{I}_{\text{пор}}(\mu) = \hat{I}_{\text{ч.к}}(0; \mu)/I_0 = (0,5)^{2-\gamma_{\text{нк}}(\mu)} = (0,25)2^{\gamma_{\text{нк}}(\mu)}, \quad (9)$$

где $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$ — нормированное значение пороговой функции.

При нахождении формулы для фактора некогерентности $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ используем далее полученные результаты вычисления значения интенсивности изображения этого объекта в

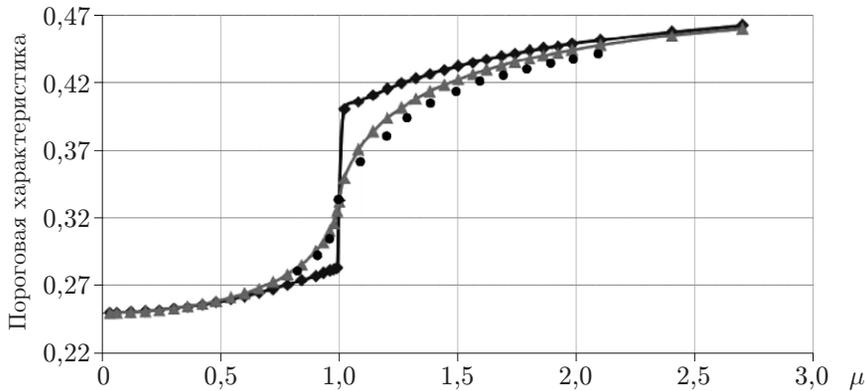


Рис. 5. Поведение пороговой характеристики частично когерентной системы в зависимости от параметра $\mu = \theta_{\text{ист}} / \theta_{\text{ап}}$: при строгом её расчёте (▲); при аппроксимации в предельных случаях μ ($\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$) (◆); при аппроксимации дробно-рациональной функцией для произвольных μ (●)

точке $x_1 = 0$ (соответствующей его геометрической границе) в предельных случаях параметра μ : $\mu \gg 1$ и $\mu \ll 1$. Так, при малых угловых размерах источника ($2\theta_{\text{ист}} \ll 2\theta_{\text{ап}}$) $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ согласно [4] зависит от μ квадратичным образом:

$$\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu) = \frac{I_{\text{ч.к}}(0; \mu)}{I_0} = 0,25 + \frac{\theta_{\text{ист}}^2}{3\pi^2\theta_{\text{ап}}^2} = 0,25 + \frac{\omega_{\text{ист}}^2}{3\pi^2\omega_{\text{ап}}^2} = 0,25 + \frac{\mu^2}{3\pi^2}. \quad (10)$$

Естественно, что при $\mu = 0$ значение интенсивности $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ соответствует когерентному случаю: $\tilde{I}_{\text{пор}}(0) = 0,25$. Следует отметить, что формула (10) использовалась в экспериментальных исследованиях при выборе параметров частично когерентной проекционной системы для размерного контроля бинарных объектов [3, 7].

При больших угловых размерах источника, когда $\mu \gg 1$, выражение для $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ принимает вид

$$\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,5 - \omega_{\text{ап}} / (\pi^2\omega_{\text{ист}}) = 0,5 - (\mu\pi^2)^{-1}. \quad (11)$$

Очевидно, что при $\mu \gg 1$ значение $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu) \rightarrow 0,5$, что соответствует абсолютно некогерентному случаю.

Найдём теперь предельное значение $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ для квазикогерентной системы ($2\theta_{\text{ист}} \ll 2\theta_{\text{ап}}$). Приравнявая выражение (9) к (10): $(0,25)2^{\gamma_{\text{нк}}} = 0,25 + \mu^2/3\pi^2$, нетрудно определить, что фактор некогерентности $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ ведёт себя следующим образом:

$$\gamma_{\text{нк}}(\mu) \approx \frac{\ln(1 + 4\mu^2/3\pi^2)}{\ln 2} \approx \frac{4\mu^2}{3\pi^2 \ln 2} = 0,195\mu^2. \quad (12)$$

В другом асимптотическом случае, когда $2\theta_{\text{ист}} \gg 2\theta_{\text{ап}}$, зависимость $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ согласно (9) и (11) можно найти из выражения $(0,25)2^{\gamma_{\text{нк}}} = 0,5 - (\mu\pi^2)^{-1}$, откуда следует, что асимптотическое поведение фактора некогерентности при $\mu \rightarrow \infty$ подчиняется закону

$$\gamma_{\text{нк}}(\mu) = 1 + \frac{\ln(1 - 2(\pi^2 \ln 2\mu)^{-1})}{\ln 2} \approx 1 - \frac{2}{\pi^2 \ln 2\mu}. \quad (13)$$

Пределы применимости полученных выражений для $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ можно оценить, если обратиться к графику на рис. 5. Здесь приведены строгие результаты расчёта пороговой характеристики $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ согласно (3), а также результаты аппроксимации её в рассмотренных ранее случаях μ . Как и следовало ожидать, хорошее совпадение результатов имеет место лишь в крайних случаях: при $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$. Исходя из этого, возникает задача нахождения аппроксимирующей функции, которая будет справедлива для любых значений μ , в том числе в случаях, когда параметры $\theta_{\text{ист}}$ и $\theta_{\text{ап}}$ сопоставимы между собой.

С этой целью аппроксимируем пороговую характеристику $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$ дробно-рациональной функцией вида

$$\hat{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,25 + \frac{\mu^2 + a\mu^5}{b\mu^5 + c\mu^4 + d}. \quad (14)$$

Выберем параметры a , b , c и d исходя из поведения функции $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$ в асимптотике при $2\theta_{\text{ист}} \ll 2\theta_{\text{ап}}$ и $2\theta_{\text{ист}} \gg 2\theta_{\text{ап}}$. В случае $\mu \rightarrow 0$ согласно выражениям (10) и (14) параметр $d = 3\pi^2$. В альтернативном случае, когда $\mu \gg 1$, из выражений (11) и (14) следует

$$\hat{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,25 + \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{b\mu}\right).$$

Если теперь обратиться к формуле (11), то для параметров b и a нетрудно получить соотношения $b = 4a$, $c = 16a/\pi^2$. Для нахождения коэффициента a используем полученный в [3] результат строгого вычисления значения функции $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu)$ в точке $\mu = 1$, соответствующей точке её перегиба $\tilde{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,33$. Подставляя это значение в формулу (14) для $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$, будем иметь следующее уравнение:

$$\hat{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,25 + \frac{1+a}{b+c+d} = 0,25 + \frac{1+a}{4a + ba/\pi^2 + 3\pi^2} = 0,33.$$

Решая это уравнение, вычисляем коэффициент $a = 2,468$. Подставляя найденные значения коэффициентов a , b , c и d в формулу (14), окончательно получаем для пороговой характеристики аппроксимирующую функцию

$$\hat{I}_{\text{пор}}(\mu) = 0,25 + \frac{\mu^2 + 2,468\mu^5}{9,948\mu^5 + 4,027\mu^4 + 29,57} = 0,25 + r(\mu), \quad (15)$$

где $r(\mu) = \frac{1 + 2,468\mu^3}{9,948\mu^3 + 4,027\mu^2 + 29,57/\mu^2}$.

Имея в распоряжении формулу для $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$, нетрудно определить зависимость фактора некогерентности от параметра μ . В результате логарифмирования выражения (9) для $\gamma_{\text{нк}}(\mu)$ находим искомую формулу

$$\gamma_{\text{нк}}(\mu) = 2 + \frac{\ln \hat{I}_{\text{пор}}(\mu)}{\ln 2} = 2 + \frac{\ln(0,25 + r(\mu))}{\ln 2} = \frac{\ln(1 + 4r(\mu))}{\ln 2}. \quad (16)$$

Полученное выражение для фактора некогерентности справедливо во всём диапазоне изменения μ , т. е. для оптической системы с произвольной частичной когерентностью.

Таким образом, предложенная нами конструктивная теория описания физических явлений в частично когерентной проекционной дифракционно-ограниченной системе (формулы (7) и (16)) для одномерных бинарных объектов может выступать как альтернатива традиционной теории.

Были проведены численные расчёты полученной аппроксимированной пороговой характеристики $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$. График её поведения показан точками на рис. 5. Можно видеть, что в диапазоне $0 \leq \mu \leq 1$ аппроксимирующая функция $\hat{I}(\mu)$ почти не отличается от строгой функции $\hat{I}_{\text{пор}}(\mu)$. Небольшое отличие имеет место при $1 \leq \mu \leq 1,3$. Однако оно не превышает 5 %.

Заключение. В данной работе представлена конструктивная (приближённая) теория формирования изображений одномерных бинарных объектов в частично когерентной дифракционно-ограниченной системе применительно к их размерному контролю. Она справедлива при произвольных соотношениях угловых размеров протяжённого источника света $\theta_{\text{ист}}$ и апертурной диафрагмы системы $\theta_{\text{ап}}$, включая случай абсолютно когерентных и абсолютно некогерентных систем. Предложенная теория позволяет для таких объектов решение двумерной задачи свести к одномерной: к вычислению интеграла в виде свёртки объекта с обобщённым импульсным откликом, спектр которого имеет трапецеидальный профиль, определяемый параметрами системы $\theta_{\text{ист}}$ и $\theta_{\text{ап}}$. Полученный интеграл свёртки в дальнейшем подвергается нелинейному преобразованию, степень которого (фактор некогерентности) зависит от фундаментального параметра оптической системы $\mu = 2\theta_{\text{ист}}/(2\theta_{\text{ап}})$. Он выбирается исходя из пороговой характеристики системы, учёт которой позволяет достаточно точно определять пороговым методом положение границ объектов по их изображениям.

Разработанная теория, будучи упрощённой, тем не менее адекватно отражает характер преобразования полей в частично когерентной системе. Теория допускает простую физическую интерпретацию физических явлений в таких системах.

На основе аппроксимации пороговой характеристики в виде дробно-рациональной функции найдено выражение для фактора некогерентности в зависимости от параметра μ . Полученные формулы для интенсивности света на выходе частично когерентной системы могут быть использованы при расчёте изображений одномерных объектов с произвольным бинарным профилем.

Разработанная конструктивная теория дифракционных явлений в частично когерентной системе может быть применена для двумерных бинарных объектов, описываемых функциями с разделяющимися переменными. Она может быть адаптирована на случай формирования изображений двумерных бинарных объектов с радиальной симметрией в частично когерентной дифракционно-ограниченной проекционной системе с круговой апертурной диафрагмой. В качестве обобщённого импульсного отклика в такой системе может выступать произведение бесселевых функций первого порядка с соответствующими аргументами. Дальнейшее расширение класса двумерных объектов, для которых справедлива разработанная теория, требует дополнительных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов П. С., Финогенов Л. В., Жимулева Е. С. и др. Оптико-электронный контроль керамических изделий // Датчики и системы. 2016. № 8–9. С. 64–72.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
3. Senchenko E. S., Chugui Yu. V. Shadow inspection of 3D objects in partially coherent light // Measur. Sci. Rev. 2011. 11, N 4. P. 104–107.
4. Chugui Yu. V., Senchenko E. S. 3D Image formation in transmitted partially coherent and incoherent light applied to dimensional inspection // Intern. Journ. Automat. Technol. 2015. 9, N 5. P. 508–514.

-
5. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
 6. Чугуй Ю. В. Расчёт и анализ импульсного отклика проекционных пространственно-неинвариантных систем // Автометрия. 2018. **54**, № 6. С. 34–47.
 7. Chugui Yu. V., Senchenko E. S. High precision algorithms for 3D objects shadow inspection in partially coherent light // Key Eng. Mater. 2014. **613**. P. 151–156.

Поступила в редакцию 29.03.2019

После доработки 11.04.2019

Принята к публикации 15.04.2019
