УДК 681.5:004.3

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ БИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ВЕКТОРНЫМ ВХОДОМ

© А. З. Асанов[1], Д. Н. Демьянов[2]

[1]*МИРЭА — Российский технологический университет,*
119454, Москва, просп. Вернадского, 78
[2]*Казанский (Приволжский) федеральный университет,*
420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18
E-mail: asanov@mirea.ru
demyanovdn@mail.ru

Рассматривается задача оценивания вектора состояния билинейной динамической системы с векторным входом. Показано, что при выполнении ряда ограничений может быть сформирован наблюдатель состояния люенбергеровского типа, обеспечивающий асимптотическое стремление к нулю ошибки оценивания. Предложен пошаговый алгоритм определения матриц коэффициентов наблюдателя, основанный на технологии канонизации матриц и методах модального управления.

Ключевые слова: билинейная система, векторный входной сигнал, наблюдатель состояния, канонизация матриц, модальное управление.

DOI: 10.15372/AUT20190402

Введение. Билинейные динамические управляемые системы являются самостоятельным подклассом нелинейных динамических систем [1]. Было показано, что билинейные системы уравнений с достаточно высокой точностью описывают поведение широкого класса реальных процессов: от технических и физических до социально-экономических [2]. Важно и то, что поведение обширного класса нелинейных динамических систем теоретически можно сколь угодно точно аппроксимировать билинейными динамическими моделями более высокого порядка. Кроме того, модели такого рода часто возникают при линеаризации гладких нелинейных динамических систем по фазовой переменной [3], в задачах адаптивного управления [4], в задачах идентификации и многоуровневого управления [5].

Оценивание состояния динамических систем является важным разделом теории автоматического управления, поскольку часто для алгоритма управления требуются сведения о переменных, которые не могут быть измерены непосредственно. Классическое решение этой проблемы — использование наблюдателей, формирующих оценку вектора состояний по доступной информации о динамической системе, о её измеряемых входе и выходе [6]. Построению наблюдателей для разных классов систем, функционирующих при различных предположениях о параметрах системы, о доступной информации и т. д., посвящено большое количество работ. Так, для линейных стационарных полностью определённых систем задача построения асимптотического наблюдателя считается абсолютно решённой. Вместе с тем продолжается интенсивный поиск решения задачи построения наблюдателей для различных систем с особенностями. Например, недостаточно полно рассмотрены вопросы построения наблюдателей для систем с неопределённостями, для нестационарных, нелинейных, многосвязных систем, для оценки неизмеряемых возмущений и других [7–9].

В ряде случаев, в частности при решении некоторых задач управления или диагностики информация о полном векторе состояний системы не требуется, можно обойтись информацией лишь о некотором скалярном или векторном функционале от этого вектора. Возникает задача построения функционального наблюдателя [10] — динамической системы, формирующей асимптотическую оценку искомого функционала. Поскольку размерность такого наблюдателя может оказаться ниже размерности наблюдателя Люенбергера, задача построения функционального наблюдателя представляется весьма привлекательной. Известен алгоритм аналитического синтеза функционального наблюдателя для многосвязной динамической системы [11], а построение функциональных наблюдателей для оценки неизмеряемых внешних возмущений, являясь специфическим развитием наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями [12, 13], позволило эффективно решать задачи адаптивного и робастного управления, задачи идентификации и диагностирования.

Проблема построения наблюдателей для нелинейных систем не имеет сегодня такого же уровня решения, как для линейных систем. Хотя первые результаты были опубликованы достаточно давно и была введена каноническая форма нелинейного наблюдателя [14], в случае когда нелинейности зависят от входных и выходных сигналов, а в [15] на основе алгебры Ли построен нелинейный наблюдатель с линеаризуемой динамической ошибкой, получить общие алгоритмы построения нелинейных наблюдателей до сих пор не удалось, есть только результаты в решении локальных задач, например [16]. Причина заключается, видимо, в многообразии возможных нелинейностей, структур динамических систем, а также в синергетическом эффекте взаимодействия множества факторов, условий, параметров исследуемых нелинейных динамических систем.

Более результативными оказались разработки асимптотических наблюдателей состояния, предназначенных для ограниченного класса нелинейных систем, таких как билинейные системы [17–19]. Известны результаты в области синтеза функциональных наблюдателей состояния билинейной динамической системы, в которых решается задача асимптотического оценивания линейной комбинации переменных её состояния с помощью наблюдателя минимального порядка и предложен алгоритм расчёта матричных коэффициентов функционального наблюдателя с использованием технологии канонизации матриц [20].

В данной работе применение алгоритмов аналитического синтеза наблюдателей расширяется на билинейные динамические системы с векторным входом.

Постановка задачи. Рассмотрим модель динамического объекта в виде системы уравнений в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^{r}(u_i F_i x); \qquad y = Cx. \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ — вектор состояния; $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)^\top$ — управляющий сигнал; $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$ — вектор измеряемого выхода; A, B, C, F_i $(i = \overline{1, r}\,)$ — известные числовые матрицы соответствующих размеров. Предполагается, что $\operatorname{rank} C = m$; значения входного и выходного сигналов могут быть измерены с высокой точностью; вектор состояния непосредственному измерению недоступен.

Требуется синтезировать динамическую систему порядка $n - m$, которая формировала бы по известной информации о сигналах y и u вектор $\hat{x}$ такой, что

$$\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{2}$$

Предварительные преобразования. В [11] показано, что из второго уравнения системы (1) можно выразить вектор состояния через некоторый вспомогательный вектор z размерности $n - m$ и выходной сигнал

$$x(t) = \tilde{C} y(t) + \bar{C}^R z(t). \tag{3}$$

В формуле (3) и далее для некоторой матрицы M символами $\bar{M}^L$, $\bar{M}^R$ будут обозначаться ненулевые матрицы максимального ранга, называемые левым и правым делителями нуля соответственно, такие что $\bar{M}^L M \equiv 0$, $M\bar{M}^R \equiv 0$; а символом $\tilde{M}$ будет обозначаться матрица $\tilde{M} = \tilde{M}^R \tilde{M}^L$, такая что $\tilde{M}^L M \tilde{M}^R = I$. В [21] приведена подробная информация о свойствах указанных матричных конструкций, способах их вычисления и практическом использовании.

Подставим выражение (3) в уравнение (1) и получим модель объекта в новых координатах:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u + \sum_{i=1}^{r} \left(u_i \begin{pmatrix} P_i & Q_i \\ K_i & T_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right), \\ y = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} A_{11} = CA\tilde{C}; \quad A_{12} = CA\bar{C}^R; \quad A_{21} = \hat{C}A\tilde{C}; \quad A_{22} = \hat{C}A\bar{C}^R; \\ P_i = CF_i\tilde{C}; \quad Q_i = CF_i\bar{C}^R; \quad K_i = \hat{C}F_i\tilde{C}; \quad T_i = \hat{C}F_i\bar{C}^R; \\ B_1 = CB; \quad B_2 = \hat{C}B; \quad \hat{C} = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_1\tilde{C}C; \quad C_1 = \bar{C}^R. \end{gathered} \tag{5}$$

Полученная модель (4) удобна для дальнейшей работы, так как вектор состояния в ней разделён на две части: первая составляющая полностью доступна измерению и совпадает с выходным сигналом, а вторая составляющая не может быть измерена и подлежит оцениванию с помощью наблюдателя.

Синтез наблюдающего устройства. При построении наблюдателя будем использовать классический подход, изложенный в работах [6, 9]: возьмём за основу уравнение динамики вектора z из системы (4) и дополним его слагаемым, пропорциональным разности истинного значения указанного вектора и его оценки:

$$\begin{gathered}\dot{\hat{z}} = A_{21}y + A_{22}\hat{z} + B_2 u + \sum_{i=1}^{r}(u_i K_i y) + \sum_{i=1}^{r}(u_i T_i \hat{z}) + \\ + L\Big[A_{12}z + \sum_{i=1}^{r}(u_i Q_i z) - A_{12}\hat{z} - \sum_{i=1}^{r}(u_i Q_i \hat{z})\Big].\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь L — некоторая числовая матрица, значения коэффициентов которой будут определены в дальнейшем исходя из требуемых характеристик наблюдателя.

Подставим в уравнение (6) истинные значения слагаемых, зависящих от z, выразив их из соответствующего уравнения системы (4):

$$\begin{gathered}\dot{\hat{z}} = (A_{21} - LA_{11})y + (A_{22} - LA_{12})\hat{z} + (B_2 - LB_1)u + \\ + \sum_{i=1}^{r}[u_i(K_i - LP_i)y] + \sum_{i=1}^{r}[u_i(T_i - LQ_i)\hat{z}] + L\dot{y}.\end{gathered} \tag{7}$$

По аналогии с соотношением (3) запишем выражение для оценки вектора состояния исходного объекта

$$\hat{x}(t) = \tilde{C}y(t) + \bar{C}^R\hat{z}(t). \tag{8}$$

Тогда ошибки оценивания вектора состояния и вектора z будут определяться выражениями

$$\begin{gathered} \varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \bar{C}^R[\hat{z}(t) - z(t)] = \bar{C}^R\delta(t); \\ \delta(t) = \hat{z}(t) - z(t). \end{gathered} \tag{9}$$

Вычитая из (7) соответствующее уравнение системы (4), получим выражение, описывающее динамику ошибки оценивания вектора z:

$$\dot{\delta} = (A_{22} - LA_{12})\delta + \sum_{i=1}^{r}[u_i(T_i - LQ_i)\delta]. \tag{10}$$

В общем случае решение уравнения (10) зависит от входного сигнала u, при этом ошибка оценивания вектора z может изменяться по достаточно сложному закону, а выполнение условия (2) с учётом выражения (9) не гарантируется.

Однако в частном случае уравнение (10) можно упростить. Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$T_i - LQ_i = 0, \qquad i = \overline{1, r}. \tag{11}$$

Тогда (10) запишется следующим образом:

$$\dot{\delta} = (A_{22} - LA_{12})\,\delta. \tag{12}$$

Тривиальное решение этого уравнения будет асимптотически устойчивым, если все собственные числа матрицы $A_{22} - LA_{12}$ будут иметь отрицательные действительные части. Тогда ошибка оценивания вектора z будет стремиться к нулю с течением времени, что с учётом выражения (9) означает выполнение условия (2).

Если условие (11) выполняется, то уравнение (7) имеет вид

$$\dot{\hat{z}} = (A_{21} - LA_{11})y + (A_{22} - LA_{12})\hat{z} + (B_2 - LB_1)u + \sum_{i=1}^{r}[u_i(K_i - LP_i)y] + L\dot{y}. \tag{13}$$

Если пара (A_{22}, A_{12}) является полностью наблюдаемой по Калману, то соответствующим выбором матрицы L можно обеспечить требуемую динамику процесса оценивания, при этом уравнения (13) и (8) будут описывать искомый асимптотический наблюдатель состояния исходного объекта (1).

Следует отметить, что в правой части уравнения (13) имеется слагаемое, пропорциональное производной выходного сигнала. Как известно, в ряде случаев дифференцирование выходного сигнала в процессе работы наблюдателя не допускается [9]. Чтобы избежать этого, модифицируем расчётную схему, введём вспомогательный вектор v, определяемый выражением

$$v = \hat{z} - Ly. \tag{14}$$

Тогда уравнение (13) можно записать в координатах

$$\dot{v} = (A_{22} - LA_{12})v + [A_{21} - LA_{11} + (A_{22} - LA_{12})L]\, y + (B_2 - LB_1)u + \\ + \sum_{i=1}^{r} [u_i(K_i - LP_i)y]. \tag{15}$$

Объединив формулы (8) и (14), будем иметь выражение для оценки вектора x:

$$\hat{x}(t) = (\tilde{C} + \bar{C}^R L)\, y(t) + \bar{C}^R v(t). \tag{16}$$

Полученная система (15), (16) определяет асимптотический наблюдатель, не требующий дифференцирования выходного сигнала.

Анализ условия разрешимости задачи. Существование наблюдателей состояния (13), (8) и (15), (16) возможно лишь при выполнении условия (11), которое может быть представлено в виде линейного матричного уравнения

$$T - LQ = 0, \quad T = (T_1, T_2, \ldots, T_r)^\top, \quad Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_r)^\top, \tag{17}$$

имеющее решение, если выполняется равенство

$$T\bar{Q}^R = 0. \tag{18}$$

При этом полное множество решений уравнения (17) определяется выражением

$$L = T\tilde{Q} + \mu\bar{Q}^L. \tag{19}$$

Здесь μ — произвольная матрица соответствующего размера.

В зависимости от свойств матрицы Q возможны три варианта:

1. Матрица Q имеет правый делитель нуля, и условие (18) не выполняется. В этом случае у (17) нет решения, а асимптотические наблюдатели (13), (8) и (15), (16) не существуют.

2. Матрица Q не имеет правого делителя нуля, или он существует, и выполняется условие (18), при этом у матрицы Q нет левого делителя нуля. Тогда уравнение (17) имеет единственное решение, задаваемое выражением

$$L = T\tilde{Q}. \tag{20}$$

Если полученная матрица наблюдений позволяет обеспечить требуемую динамику процесса оценивания, то исходная задача синтеза имеет единственное решение. В противном случае требуемый наблюдатель невозможно построить с помощью предлагаемого метода.

3. Матрица Q не имеет правого делителя нуля, или он существует, и выполняется условие (18), при этом у матрицы Q есть также левый делитель нуля, тогда уравнение (17) имеет множество решений, определяемых формулой (19).

Подставив выражение для матрицы L в формулу (12), найдём матрицу коэффициентов в уравнении динамики ошибки оценивания

$$A_{22} - LA_{12} = A_{22} - T\tilde{Q}A_{12} - \mu\bar{Q}^L A_{12}. \tag{21}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A^* &= (A_{22} - T\tilde{Q}A_{12})^\top; \\ B^* &= (\bar{Q}^L A_{12})^\top. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда задача обеспечения требуемой динамики ошибки оценивания может быть сведена к проблеме обеспечения требуемых собственных чисел матрицы $A^* - B^*\mu^\top$. Полученная вспомогательная задача легко решается методами модального управления, если пара (A^*, B^*) полностью управляема по Калману или её неуправляемые полюса расположены в требуемой области комплексной плоскости [6]. После нахождения таким образом матрицы μ, искомая матрица L легко определяется по формуле (19).

Анализируя размер матрицы Q, можно дать грубую оценку применимости предложенного метода. Указанная матрица имеет m строк и $r(n-m)$ столбцов. Значит, правого делителя нуля матрицы Q, вероятнее всего, не существует, если выполняется условие

$$m \geqslant \frac{r}{r+1}\,n. \tag{23}$$

Условие (23) можно использовать для приблизительного определения количества переменных состояния, измерение которых позволит построить наблюдатель для объекта (1) по предложенной методике.

Обобщённый алгоритм синтеза. На основе полученных результатов можно сформировать пошаговый алгоритм аналитического синтеза асимптотического наблюдателя состояния билинейной системы.

Пусть задана модель динамического объекта в виде системы уравнений (1) с известными матрицами коэффициентов A, B, C, F_i $(i = \overline{1, r}\,)$. Необходимо сформировать асимптотический наблюдатель состояния, требования к которому формализованы путём задания желаемого расположения собственных чисел матрицы динамики, а также указания о допустимости или недопустимости дифференцирования выходного сигнала.

Процесс синтеза включает в себя следующие этапы.

1. Проведение канонизации матрицы C и определение коэффициентов по формулам (5).

2. Формирование матриц T, Q и проверка выполнения условия (18). Если оно не выполняется, то для решения задачи следует использовать иной метод расчёта.

3. Если матрица Q не имеет левого делителя нуля, то вычислить по формуле (20) матрицы L и оценить расположение собственных чисел матрицы $A_{22} - LA_{12}$. Если полюса системы подчиняются требуемому расположению, то необходимо перейти к шагу 7, в противном случае для решения задачи следует использовать иной метод расчёта.

4. Вычисление матриц A^*, B^* по формуле (22). Если указанная пара полностью управляема по Калману или же её неуправляемые собственные числа лежат в требуемой области комплексной плоскости, то необходимо перейти к шагу 5. В противном случае рекомендуется снизить требования к динамике процесса оценивания и вернуться к шагу 3.

5. Определение матрицы μ, обеспечивающей требуемое расположение собственных чисел матрицы $A^* - B^*\mu^\top$.

6. Вычисление матрицы L по формуле (19). 7. Формирование уравнения динамики

наблюдателя и выражения для оценки вектора x. Если дифференцирование выходного сигнала допускается, то уравнение динамики наблюдателя задаётся формулой (13), а оценка вектора состояния — выражением (8). Если дифференцирование выходного сигнала не допускается, то уравнение динамики наблюдателя задаётся формулой (15), а оценка вектора состояния — выражением (16).

Пример. Рассмотрим применение предложенного алгоритма на методическом примере. Пусть модель объекта задана уравнениями (1), при этом матрицы коэффициентов в уравнении динамики принимают следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 4 & -11 & 4 & -7 & -3 \\ 15 & -6 & -19 & 6 & -10 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 35 & -22 & 47 & -17 & 25 & 11 \\ 17 & -10 & 23 & -8 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для оценки вектора состояния сформируем асимптотический наблюдатель пониженного порядка, полюс которого должен располагаться в точке комплексной плоскости с координатами $(-10; 0j)$. Дифференцирование выходного сигнала не допускается.

Применим изложенный выше алгоритм.

1. Проведём канонизацию матрицы C и определим коэффициенты по формуле (5). Процедура канонизации осуществлялась с использованием приложения [22], полученные при этом матрицы (делители нуля и канонизаторы) в тексте не представлены по причине ограниченности объёма публикации.

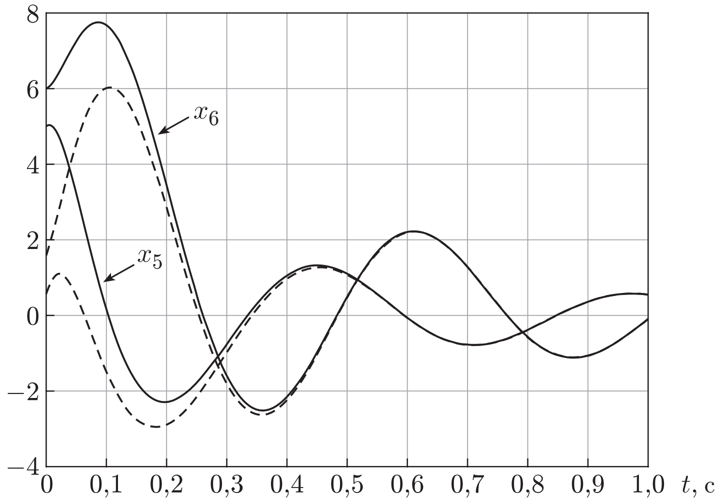
2. Сформируем матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{\top}.$$

Очевидно, что условие (18) будет выполняться. При этом матрица Q имеет левый делитель нуля (линейно зависимые строки).

3. Вычислим матрицы A^*, B^* по формуле (22): $A^* = 4{,}4$, $B^* = (-13{,}8, 21{,}4, 18{,}4)^{\top}$.



Графики изменения переменных x_5, x_6 (сплошные кривые) и их оценок (штриховые кривые)

4. Вычислим матрицу μ, обеспечивающую требуемое расположение собственных чисел характеристического уравнения: $\mu = (-0{,}2013, 0{,}3122, 0{,}2685)$.

5. Вычислим матрицу L по формуле (19): $L = (0{,}1142, 0{,}2518, -0{,}2013, 0{,}3122, 0{,}2685)$.

6. Сформируем уравнение динамики наблюдателя и выражение для оценки вектора состояния по формулам (15), (16):

$$\dot{v} = -10\,v + (-11{,}1740, 3{,}4521, -0{,}8497, 0{,}2651, 1{,}3612)\,y + (2{,}9758, 0{,}3490)\,u +$$

$$+\,u^{\top}\begin{pmatrix} 1{,}0005 & 1{,}0271 & -1{,}2689 & 0{,}7787 & -1{,}1613 \\ 0{,}6911 & 3{,}5039 & -0{,}9667 & -0{,}7752 & 0{,}2951 \end{pmatrix} y.$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}1142 & 0{,}2518 & -0{,}2013 & 0{,}3122 & -0{,}7315 \\ 0{,}1142 & 0{,}2518 & -0{,}2013 & 0{,}3122 & 0{,}2685 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

Для проверки корректности полученных результатов было проведено моделирование процесса функционирования синтезированного наблюдателя с помощью системы компьютерной математики MATLAB. В качестве примера на рисунке представлены результаты расчёта при следующих исходных данных: входной сигнал $u = (1(t), -1(t))^{\top}$, $v(0) = 0$, $x(0) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^{\top}$. Как видно на рисунке, ошибка оценивания достаточно быстро стремится к нулю с течением времени.

Заключение. В работе предложен алгоритм аналитического синтеза асимптотического наблюдателя пониженного порядка для оценивания состояния билинейного динамического объекта с векторным входом. Сформулированы условия разрешимости задачи и рассчитаны соотношения для матричных коэффициентов наблюдателя, основанные на применении технологии канонизации матриц.Полученные результаты могут быть использованы на практике при проектировании систем управления, идентификации и диагностики динамических систем, описываемых билинейными уравнениями с векторными входом и выходом.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-08-00516).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mohler R. R.** Bilinear Control Process. N. Y. — London: Academic Press, 1973. 224 p.
2. **Khalil H. K.** Nonlinear Systems. N. Y.: Prentice Hall, 1996. 734 p.
3. **Isidori A.** Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995. 539 p.
4. **Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.** Nonlinear and Adaptive Control Design. N. Y.: Wiley, 1995. 563 p.
5. **Асанов А. З.** Аналитическое конструирование адаптивной системы с эталонной моделью // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. 2003. № 2. С. 17–21.
6. **Luenberger D. G.** Observers for multivariable systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1966. **AC-11**, N 2. P. 190–197.
7. **Gu D.-K., Liu L.-W., Duan G.-R.** Functional interval observer for the linear systems with disturbances // IET Control Theory Appl. 2018. **12**, Is. 18. P. 2562–2568.
8. **Aloui R., Braiek N. B.** Synthesis of a minimum functional state observer approach for unperturbed/perturbed dynamical systems // Intern. Journ. Control, Automat. Syst. 2018. **16**, Is. 4. P. 1736–1745.
9. **Izermann R., Munchhof M.** Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications. Berlin — Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 705 p.
10. **Коровин С. К., Фомичев В. В., Медведев И. С.** Синтез минимальных функциональных наблюдателей // ДАН. Теория управления. 2005. **404**, № 3. С. 316–320.
11. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. 2013. № 4. С. 13–18.
12. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функциональных наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями // Автометрия. 2014. **50**, № 6. С. 111–119.
13. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Оценивание непосредственно неизмеряемых внешних возмущений с использованием функциональных наблюдателей // Автометрия. 2015. **51**, № 5. С. 27–34.
14. **Bestle D., Zeitz M.** Canonical form observer design for nonlinear time-variable systems // Intern. Journ. Control. 1983. **38**, Is. 2. P. 419–431.
15. **Krener A. J., Isidori A.** Linearization by output injection and nonlinear observers // Syst. Control Lett. 1983. **38**, N 1. P. 47–52.
16. **Amin E. D., Hasan M. N.** State observers for nonlinear dynamic systems // Intern. Journ. Adv. Biotechnol. Res. 2016. **7**, N 2. P. 1085–1090.
17. **Bornard G., Couenne N., Celle F.** Regularly persistent observers for bilinear systems, new trends in nonlinear control theory // Proc. Intern. Conf. on Nonlinear Control Theory. Nantes, France, 13–17 June, 1988. P. 130–142.
18. **Keller H.** Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form // Intern. Journ. Control. 1987. **46**, Is. 6. P. 1915–1930.
19. **Коровин С. К., Фомичев В. В.** Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. **398**, № 1. С. 38–43.

20. **Асанов А. З., Демьянов Д. Н.** Аналитический синтез функционального наблюдателя состояния билинейной динамической системы // Автометрия. 2017. **53**, № 4. С. 26–34.
21. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
22. **Свидетельство** о государственной регистрации программы для ЭВМ 2015617953 РФ. Программа канонизации матриц /И. З. Ахметзянов; Правообладатель ФГАОУ ВПО КФУ. № 2015614621; Заявл. 29.05.2015; Опубл. 20.08.2015.

Поступила в редакцию 14.03.2019
После доработки 27.03.2019
Принята к публикации 02.04.2019