

УДК 519.652

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА. Ч. I

© Ю. Г. Булычев¹, А. Г. Кондрашов², П. Ю. Радуга³, А. В. Ячменёв¹

¹АО «Всероссийский научно-исследовательский институт «Градиент»»,
344000, г. Ростов-на-Дону, просп. Соколова, 96

²АО «Научно-производственное объединение «Квант»»,
173001, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 73

³АО «Калужский научно-исследовательский радиотехнический институт»,
249192, г. Жуков Калужской области, ул. Ленина, 2
E-mail: ProfBulychev@yandex.ru

Развивается метод описания и оценивания состояния многомерного динамического объекта, включающий численно-аналитическое представление общего решения дифференциального уравнения для динамического объекта и его измеряемого выхода с учётом области допустимости значений времени и начального условия, а также параметров неопределённости, фигурирующих в правой части уравнения. Требуемое качество представления достигается использованием семейства заранее построенных высокоточных опорных интегральных кривых (необходимого объёма) и принципа гладкой зависимости решения и измеряемых координат в заданной области допустимости для широкого класса динамических объектов. Дается оценка погрешностей метода, приводятся рекомендации по выбору его основных параметров.

Ключевые слова: динамический объект, характерные параметры объекта, область допустимости, измеряемые координаты, опорные интегральные кривые, численно-аналитическое решение, оптимальные узлы интерполяции.

DOI: 10.15372/AUT20200308

Введение. В [1] на основе методов опорных интегральных кривых (ОИК) [2] и обобщённого оптимального инвариантно-несмещённого оценивания [3] развивается метод, позволяющий строить приближённое общее решение уравнения, описывающего динамический объект (ДО) в заданной области допустимости (рассматривается в данной работе), и вычислять значения различных непрерывных линейных функционалов (НЛФ) (далее называемых ещё числовыми характеристиками) от интегральных кривых ДО на основе некорректных данных (этот вопрос будет рассмотрен в следующих работах). Эти данные представляют собой аддитивные наблюдения отсчётов интегральной кривой, флуктуационной погрешности и сингулярной помехи. При этом для описания погрешности использовалась традиционная гауссовская шумовая модель, а для формирования моделей кривой и помехи применялись соответствующие конечные линейные комбинации с заданными базисными функциями и неизвестными спектральными коэффициентами.

В [1] для построения приближённого решения использовалось семейство ОИК и принцип гладкой зависимости искомого решения от времени и начального условия, а также от параметров неопределённости, фигурирующих в правой части дифференциального уравнения, для широкого класса ДО. Нахождение значений НЛФ основано на идее автокомпенсационного оптимального оценивания, инвариантного к сингулярной помехе, не требующего традиционного расширения пространства состояний и допускающего раздельное оценивание любой линейной числовой характеристики интегральной кривой этого уравнения. Как

показывает опыт [4–7], именно такой подход весьма плодотворен при создании перспективных информационно-измерительных комплексов, ориентированных на обработку данных в реальном времени.

К недостаткам метода, рассмотренного в [1], можно отнести то, что рассматривается лишь скалярный ДО, а в качестве измеряемого параметра выступает непосредственно интегральная кривая ДО, что, как правило, не вполне соответствует потребностям практики. Кроме того, говорится лишь об оценке НЛФ этой кривой, хотя для большинства прикладных задач более актуальным является оценивание числовых характеристик (например, производных различных порядков) измеряемого выхода ДО [5–7].

Требуется существенная доработка метода [1] с целью ориентации его основных положений и результатов на реальные информационно-измерительные комплексы, при построении которых основополагающим выступает критерий «точность-оперативность» с учётом жёстких ограничений на вычислительные ресурсы. В данной работе предлагается модифицированный численно-аналитический метод описания и оценивания входных и выходных параметров многомерного ДО, посвящённый приближённому анализу общего решения дифференциального уравнения и измеряемого выхода этого ДО для заданной области допустимости.

Постановка задачи. Пусть многомерный ДО описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (в форме Коши)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T], \quad x \in G_x, \quad (1)$$

где t — время; $x = x(t, x_0) = [x_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^\top$ — векторное решение уравнения с начальным условием $x_0 = x(t_0, x_0) = [x_{i0}, i = \overline{1, I}]^\top \in G_{x_0} \subseteq G_x$; G_x — замкнутая выпуклая область, соответствующая всем возможным состояниям ДО, стартующего с любым начальным условием, принадлежащим гиперпараллелепипеду $G_{x_0} = \{x_0 \in G_{x_0}: c_i \leq x_{i0} \leq d_i, i = \overline{1, I}\}$; $G_t = [t_0, t_0 + T]$ — временной отрезок, на котором рассматривается поведение ДО; $f(t, x)$ — функция, удовлетворяющая на множестве $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$ известным условиям существования и единственности решения уравнения (1) с постоянной Липшица L_0 и, кроме того, обеспечивающая на G_{xt} требуемую гладкость этого решения, характерную для рассматриваемого класса ДО.

Уравнению (1) можно поставить в соответствие приближённое аналитическое решение $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0)$, где $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0, x_0)$, при этом в общем случае

$$\|\tilde{x}_0 - x_0\| = \max_i |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| \neq 0, \quad i = \overline{1, I}.$$

Считаем, что $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0) = [\tilde{x}_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^\top$ является ε_0 — приближённым по невязке решением [8], т. е.

$$\|\tilde{x}_0 - x_0\| \leq \varepsilon_0, \quad \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = f_i(t, \tilde{x}) + \chi_i(t),$$

где невязки $\chi_i(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\|\chi(t)\| = \max_{i,t} |\chi_i(t)| \leq \varepsilon_0, \quad t \in G_t.$$

Здесь константа $\varepsilon_0 > 0$ определяет точность формируемого приближённого аналитического решения в области $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$ с учётом того, что $x_0, \tilde{x}_0 \in G_{x_0}$.

Близость точной $x_i = x_i(t, x_0)$ и приближённой $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t, x_0)$ фазовых координат ДО в G_{xt} будем характеризовать невязкой

$$\varepsilon_{xi}(x_0) = \|\tilde{x}_i - x_i\| = \max_t |\tilde{x}_i(t, x_0) - x_i(t, x_0)|, \quad t \in G_t,$$

соответственно для оценки близости их производных r -го порядка вводится невязка

$$\varepsilon_{xi}^{(r)}(x_0) = \max_t \|\tilde{x}_i^{(r)} - x_i^{(r)}\|.$$

Для оценки близости решений $x = x(t, x_0)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0)$ и их производных используем невязки $\varepsilon_x(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}(x_0)$ и $\varepsilon_x^{(r)}(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}^{(r)}(x_0)$ соответственно.

Зададимся также векторным уравнением измеряемого выхода ДО [9, 10]:

$$y = \varphi(t, x), \quad y \in G_{yt}, \quad (2)$$

где $y = [y_j(t, x_0), j = \overline{1, J}]^\top$ — вектор измеряемых параметров (в общем случае нелинейная функция выхода); $\varphi(t, x)$ — гладкая функция своих аргументов.

Применительно к областям G_{x_0} и G_t требуется сформировать алгоритм построения численно-аналитического общего решения $\tilde{x}(t, x_0)$ для многомерного ДО (1); обсудить вопросы точности и оптимизации выбора параметров данного алгоритма; разработать алгоритм построения численно-аналитического выражения для векторного измеряемого выхода ДО (2).

Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения для многомерного динамического объекта. В области G_{x_0} рассмотрим сетку, состоящую из узлов $x_{0(r)} \in G_{x_0}$, $r \in \overline{1, M}$. Этим узлам поставим в соответствие семейство ОИК

$$x_{i(r)} = x_i(t, x_{0(r)}), \quad i = \overline{1, I}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad (3)$$

где t — время; $x_{0(r)}$ — начальное условие x_0 , соответствующее r -му узлу.

Погрешностями построения ОИК в дальнейшем будем пренебрегать (по аналогии с [1, 2]). На практике эти ОИК задаются таблично.

Далее в области G_t формируется сетка $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ по времени t малого объёма (достаточного для представления фазовых координат $x_i(t, x_{0(r)})$ в области $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$ с требуемой точностью), на которых формируется выборка чисел

$$x_{i(rk)} = x_i(t_{(k)}, x_{0(r)}), \quad i = \overline{1, I}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, M_t}. \quad (4)$$

Проводя интерполяцию этой выборки, соответствующей фиксированным i и r , сопоставим ОИК $x_i(t, x_{0(r)})$ функцию известного класса

$$\tilde{x}_{i(r)}(t) = J_i(t, a_{ir}), \quad (5)$$

где $a_{ir} = [a_{irk}, k = \overline{1, M_t}]^\top$ — вектор коэффициентов, который выбирается таким образом, чтобы значения $\tilde{x}_{i(r)}(t)$ совпадали со значениями $x_i(t, x_{0(r)})$ в M_t узлах интерполяции:

$$\tilde{x}_{i(r)}(t_{(k)}) = J_i(t_{(k)}, a_{ir}) = \tilde{x}_{i(rk)} = x_{i(rk)}, \quad k = \overline{1, M_t}. \quad (6)$$

Коэффициенты $\{a_{irk}\}_{k=1}^{M_t}$ находятся с учётом выполнения этих равенств и могут быть сведены в таблицы или храниться в памяти ЭВМ.

Обратимся теперь к сетке по начальному условию x_0 с узлами $x_{0(r)} \in G_{x_0}$. Для фиксированных $i \in \overline{1, I}$ и $k \in \overline{1, M_t}$ поставим в соответствие узлам $x_{0(1)}, \dots, x_{0(M_x)}$ набор значений $a_{i1k}, \dots, a_{iM_x k}$ и проведём их интерполяцию, сопоставив им функцию известного класса

$$a_{ik}(x_0) = w_i(x_0, b_{ik}), \quad (7)$$

где $b_{ik} = [b_{irk}, r = \overline{1, M_x}]^\top$ — вектор коэффициентов, который выбирается из условия

$$a_{ik}(x_{0(r)}) = w_i(x_{0(r)}, b_{ik}) = a_{irk}, \quad r = \overline{1, M_x}. \quad (8)$$

Коэффициенты $\{b_{irk}\}_{r=1}^{M_x}$ также могут быть сведены в таблицы или храниться в памяти ЭВМ. Аналогично вышеизложенному проводится интерполяция для всех $i \in \overline{1, I}$, $r \in \overline{1, M_x}$ и $k \in \overline{1, M_t}$.

Численно-аналитическое решение уравнения (1) может быть представлено в следующем векторном виде:

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0) = J(t, A(x_0)), \quad (9)$$

где $J(t, A(x_0)) = [J_i(t, A_i(x_0)), i = \overline{1, I}]^\top$, $A_i(x_0) = [a_{ik}(x_0), k = \overline{1, M_t}]^\top$.

Если использовать процедуры линейной интерполяции или аппроксимации (по аналогии с [1, 2]) для описания ДО в области $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$, то приближённое решение запишем как:

$$\tilde{x}_i = A_i^\top(x_0)\Psi_x(t), \quad i = \overline{1, I}, \quad x_0 \in G_{x_0}, \quad t \in G_t, \quad (10)$$

где $A_i(x_0) = [a_{ik}(x_0), k = \overline{1, M_t}]^\top$ — функциональный вектор неизвестных коэффициентов $a_{ik}(x_0)$, обладающих необходимой гладкостью по отношению к аргументу x_0 ; $\Psi_x(t) = [\psi_{xk}(t), k = \overline{1, M_t}]^\top$ — вектор заданных гладких базисных функций от аргумента t , зависящий в общем случае от индекса $i \in \overline{1, I}$.

Для описания элементов вектора $A_i(x_0)$ воспользуемся записью

$$a_{ik}(x_0) = B_{ik}^\top \Lambda_{xi}(x_0), \quad (11)$$

где $B_{ik} = [b_{irk}, r = \overline{1, M_x}]^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов; $\Lambda_{xi}(x_0) = [\lambda_{xir}(x_0), r = \overline{1, M_x}]^\top$ — вектор заданных гладких базисных функций аргумента x_0 .

В итоге получим решение

$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} a_{ik}(x_0)\psi_{xk}(t) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} b_{irk}\lambda_{xir}(x_0)\psi_{xk}(t) = \Psi_x^\top(t)B_i\Lambda_{xi}(x_0), \quad i = \overline{1, I}, \quad (12)$$

где $B_i = [b_{irk}, k = \overline{1, M_t}, r = \overline{1, M_x}]$ — матрица неизвестных коэффициентов, соответствующих i -й фазовой координате вектора состояния ДО.

Для определения коэффициентов b_{irk} воспользуемся семейством ОИК. Проводя (для фиксированного $i \in \overline{1, I}$) с учётом (12) интерполяцию или аппроксимацию данного массива, находим оценку B_i^* матрицы B_i . При этом для интерполяции выполняются условия

$$\tilde{x}_i(t_{(k)}, x_{0(r)}) = \Psi_x^\top(t_{(k)})B_i\Lambda_{xi}(x_{0(r)}) = x_{i(rk)}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, M_t}. \quad (13)$$

Они задают систему линейных алгебраических уравнений, решая которую получаем искомую оценку B_i^* матрицы B_i . В случае аппроксимации решение B_i^* (для фиксированного i) определяется в виде

$$B_i^* = \arg \max_{B_i} \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} [\Psi_x^\top(t_{(k)}) B_i \Lambda_{xi}(x_{0(r)}) - x_{i(rk)}]^2. \quad (14)$$

После того, как найдены матрицы B_i^* для всех i , строится искомое численно-аналитическое решение $\tilde{x}(t, x_0) = [\tilde{x}_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^\top$ дифференциального уравнения (1):

$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} b_{irk}^* \lambda_{xir}(x_0) \psi_{xk}(t) = \Psi_x^\top(t) B_i^* \Lambda_{xi}(x_0), \quad i = \overline{1, I}. \quad (15)$$

Следует помнить, что при построении семейства ОИК применяется временная вычислительная сетка большого объема, который многократно превышает объем M_t интерполяционной (аппроксимационной) сетки $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$ по t . Кроме того, для многих ДО зависимость решения $x(t, x_0)$ от x_0 является слабо выраженной, что существенно снижает объем M_x вычислительной сетки по начальному условию x_0 и упрощает интерполяционную (аппроксимационную) процедуру построения численно-аналитического решения $\tilde{x}(t, x_0)$ для уравнения (1), описывающего ДО.

Путем рационального выбора основных параметров развиваемого метода в выражениях (3)–(15) можно построить решение $\tilde{x}(t, x_0)$ уравнения (1), обеспечивающее в области допустимости G_{xt} требуемую для практики точность анализа ДО. В число параметров, позволяющих достичь такой точности, можно отнести объемы используемых сеток (M_t и M_x).

Конкретизируем процедуру построения $\tilde{x}(t, x_0)$ на случай, когда в выражении (12) используются фундаментальные многочлены интерполяции (как тензорное произведение одномерных фундаментальных многочленов [11]). С этой целью в области G_{x_0} возможных начальных условий зададим многомерную вычислительную сетку малого объема $\{x_{0(m)}\} = \{x_{0(m_1, \dots, m_I)}\}$ (где $m = (m_1, \dots, m_I)$ — многомерный узел, $m_i = \overline{1, M_{xi}}$, $i = \overline{1, I}$, $\prod_{i=1}^I M_{xi} = M_x$ — объем сетки). Для всех её узлов строим (любым из известных высоко-точных численных методов [11–13] на некоторой временной сетке большого объема, покрывающей область G_t) семейство ОИК (для удобства используем непрерывное время):

$$x_{i(m)} = x_{i(m_1, \dots, m_I)} = x_i(t, x_{0(m)}) = x_i(t, x_{0(m_1, \dots, m_I)}), \quad i = \overline{1, I}. \quad (16)$$

На отрезке $c_i \leq x_{i0} \leq d_i$ задаются узлы $x_{i0(1)}, \dots, x_{i0(M_{xi})}$ и принимается

$$\psi_{xk}(t) = L_{(k)}(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{M_t} \frac{t - t_{(j)}}{t_{(k)} - t_{(j)}}.$$

В этом случае решение (12) можно представить в виде

$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_m x_{i(mk)} L_{(k)}(t) L_{(m)}(x_0), \quad i = \overline{1, I}, \quad (17)$$

где \sum_m — многомерная сумма;

$$L_{(m)}(x_0) = L_{(m_1, \dots, m_I)}(x_{01}, \dots, x_{0I}) = \prod_{i=1}^I L_{(m_i)}(x_{i0});$$

$$L_{(m_i)}(x_{i0}) = \sum_{q=1, q \neq m_i}^{M_{xi}} \frac{x_{i0} - x_{i0(q)}}{x_{i0(m_i)} - x_{i0(q)}}.$$

Кроме того, иногда целесообразно использовать неравномерные сетки, например такие, в которых узлы интерполяции $x_{i0(m_i)}$ и $t_{(k)}$ совпадают с корнями многочленов Чебышева [1]. В этом случае для невязки ε_{xi} между фазовыми координатами $x_i(t, x_0)$ и $\tilde{x}_i(t, x_0)$ справедлива оценка (по аналогии с [8])

$$\varepsilon_{xi}(x_0) = \|\tilde{x}_i(t, x_0) - x_i(t, x_0)\| \leq \varepsilon_0[(L_0^{-1} + 1) \exp(L_0|t - t_0|) - L_0^{-1}]. \quad (18)$$

Соответственно для оценки близости решений $x(t, x_0)$ и $\tilde{x}(t, x_0)$ имеем оценку

$$\varepsilon_x(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}(x_0) \leq \varepsilon_0\{\sqrt{I} \exp(L_0 I^2 T) + (L_0 I)^{-1}[\exp(L_0 I^2 T) - 1]\}. \quad (19)$$

При $I = 1$ из (19) следует (18).

Полученные соотношения позволяют оптимизировать выбор параметров развиваемого метода построения приближённого аналитического решения, описывающего поведение ДО. Опираясь на работы [11–13], можно также оценить вклад наследственной погрешности и погрешности округлений в результирующую ошибку построения приближённого решения уравнения (1) для области $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$.

Соотношения (3)–(19) отражают суть численно-аналитического метода описания вектора состояния многомерного ДО для заданного множества допустимости временной координаты и начального условия.

Численно-аналитическое описание измеряемого выхода для многомерного динамического объекта. Точный измеряемый векторный выход многомерного ДО можно представить в виде

$$y = \varphi(t, x(t, x_0)) = \gamma(t, x_0), \quad (20)$$

где $x_0 \in G_{x0}$, $t \in G_t$, $y \in G_{yt}$, при этом $\varphi: G_{xt} \rightarrow G_{yt}$.

Соответственно для приближённого выхода ДО имеем

$$\tilde{y} = \varphi(t, \tilde{x}(t, x_0)) = \tilde{\gamma}(t, x_0), \quad x_0 \in G_{x0}, \quad t \in G_t, \quad y \in G_{yt}. \quad (21)$$

Для численно-аналитического описания измеряемого выхода ДО также можно использовать семейство ОИК и применять принцип гладкой зависимости $y = \gamma(t, x_0)$ от начального условия $x_0 \in G_{x0}$. Для этой цели семейству ОИК $x_{(r)} = x(t, x_{0(r)})$, $r = \overline{1, M_x}$, поставим в соответствие семейство выходных траекторий

$$y_{j(r)} = \varphi_j(t, x(t, x_{0(r)})) = \gamma_j(t, x_{0(r)}), \quad j \in \overline{1, J}, \quad (22)$$

которое представим массивом чисел

$$y_{j(rk)} = \varphi_j(t_{(k)}, x(t_{(k)}, x_{0(r)})) = \gamma_j(t_{(k)}, x_{0(r)}), \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (23)$$

Далее воспользуемся приближением

$$\tilde{y}_j = V_j^\top(x_0)\Psi_{yj}(t), \quad x_0 \in G_{x_0}, \quad t \in G_t, \quad (24)$$

где $V_j(x_0) = [v_{jk}(x_0), k = \overline{1, M_t}]^\top$ — функциональный вектор неизвестных коэффициентов $v_{jk}(x_0)$, обладающих необходимой гладкостью по отношению к аргументу x_0 ; $\Psi_{yj}(t) = [\psi_{yjk}(t), k = \overline{1, M_t}]^\top$ — вектор заданных гладких базисных функций от аргумента t (при выборе вектора $\Psi_{yj}(t)$ учитывается возможность адекватности описания выходной траектории $y_j = \gamma_j(t, x_0)$ в области G_{yt} и некоторые вычислительные аспекты).

Элементы вектора $V_j(x_0)$ определим как

$$v_{jk}(x_0) = W_{jk}^\top \Lambda_{yj}(x_0), \quad (25)$$

где $W_{jk} = [w_{jrk}, r = \overline{1, M_x}]^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов; $\Lambda_{yj}(x_0) = [\lambda_{yjr}(x_0), r = \overline{1, M_x}]^\top$ — вектор гладких базисных функций от x_0 , который в общем случае зависит от индекса $j \in \overline{1, J}$.

Таким образом, j -й скалярный измеряемый выход ДО можно описать в численно-аналитическом виде:

$$\tilde{y}_j = \tilde{\gamma}_j(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} v_{jk}(x_0)\psi_{yjk}(t) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} w_{jrk}\lambda_{yjr}(x_0)\psi_{yjk}(t) = \Psi_{yj}^\top(t)W_j\Lambda_{yj}(x_0), \quad (26)$$

где $W_j = [w_{jrk}, k = \overline{1, M_t}, r = \overline{1, M_x}]$ — матрица неизвестных коэффициентов.

Для нахождения оценки W_j^* матрицы W_j также можно воспользоваться интерполяционным или аппроксимационным подходом. В первом случае учитываются соответствующие характеристические условия интерполяции (для фиксированного j):

$$\tilde{\gamma}_j(t(k), x_0(r)) = \Psi_{yj}^\top(t(k))W_j\Lambda_{yj}(x_0(r)) = y_{j(rk)}, \quad k = \overline{1, M_t}, \quad r = \overline{1, M_x}. \quad (27)$$

Они задают систему линейных алгебраических уравнений, решая которую находим искомую оценку W_j^* матрицы W_j . Во втором случае решение W_j^* (для фиксированного j) представляется в виде

$$W_j^* = \arg \max_{W_j} \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} [\Psi_{yj}^\top(t(k))W_j\Lambda_{yj}(x_0(r)) - y_{j(rk)}]^2. \quad (28)$$

После того как определены матрицы W_j^* для всех j , строится искомое численно-аналитическое представление $\tilde{y}(t) = [\tilde{\gamma}_j(t, x_0), j = \overline{1, J}]^\top$ для измеряемого выхода ДО:

$$\tilde{y}_j = \tilde{\gamma}_j(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} w_{jrk}^*\lambda_{yjr}(x_0)\psi_{yjk}(t) = \Psi_{yj}^\top(t)W_j^*\Lambda_{yj}(x_0), \quad j = \overline{1, J}. \quad (29)$$

В частном случае по аналогии с (17) измеряемый выход ДО можно представить в виде

$$\tilde{y}_j = \tilde{\gamma}_j(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_m y_{j(mk)}L_{j(k)}(t)L_{j(m)}(x_0), \quad j = \overline{1, J}. \quad (30)$$

Выражение (30) является наиболее удобным в численно-аналитических расчётах.

Таким образом, на основе (20)–(30) путём рационального выбора основных параметров развиваемого метода можно построить приближённое аналитическое выражение для вектора измеряемых параметров $y = \varphi(t, x(t, x_0)) = \gamma(t, x_0)$, обеспечивающее в области допустимости G_{yt} требуемую для практики точность анализа векторного выхода ДО. К их числу относятся константы M_t, M_x и функции $\Lambda_{yj}(x_0), \Psi_{yj}(t)$.

Некоторые обобщения, вычислительные аспекты и рекомендации. Вышепредложенный подход к построению приближённого аналитического решения уравнения (1) для многомерного ДО несложно обобщить и на ДО вида

$$\frac{dz}{dt} = \bar{f}(t, z, \eta), \quad z \in G_z, \quad \eta \in G_\eta,$$

где $z = [z_i, i = \overline{1, I_1}]^\top$ — вектор состояния ДО; $\eta = [\eta_i, i = \overline{1, I_2}]^\top$ — вектор постоянных параметров, для которых можно указать лишь некоторую область допустимости G_η .

Принимаем

$$t \in G_t = [t_0, t_0 + T]; \quad z_0 = z(t_0) \in G_{z_0} = \{[c_1, d_1], [c_2, d_2], \dots, [c_{I_1}, d_{I_1}]\}; \quad G_{z_0} \subseteq G_z;$$

$$\eta \in G_\eta = \{[r_1, p_1], [r_2, p_2], \dots, [r_{I_2}, p_{I_2}]\}.$$

Вводя расширенный вектор $x = [z^\top, \eta^\top]^\top$ размерности $I = I_1 + I_2$ и учитывая, что $d\eta/dt \equiv 0$, приходим к уравнению (1), в котором

$$f(t, x) = [f_i(t, x), i = \overline{1, I}]^\top = [\bar{f}_i(t, z, \eta), i = \overline{1, I_1}, \bar{f}_i(t, z, \eta), i = \overline{I_1 + 1, I}]^\top,$$

где $\bar{f}_i(t, z, \eta) \equiv 0, i = \overline{I_1 + 1, I}$, при этом $G_{xt} = \{G_z, G_\eta, G_t\}$.

Таким образом, класс ДО более общего вида, которые широко используются на практике (например, в баллистике [14] и ряде задач идентификации и оптимального управления [15]), также попадает в сферу применения развиваемого метода.

Иллюстративный пример. Для оценки эффективности предлагаемого метода ограничимся ДО, соответствующим ракете, движущейся в однородном поле силы тяжести, при линейном законе расхода массы и отсутствии сопротивления среды. Как показано в [16], рассматриваемый случай является хорошим иллюстративным примером для тестирования различных численно-аналитических методов. Криволинейное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений (здесь время измеряется в секундах):

$$\frac{dz_1}{dt} = -g_0 z_2^{-1}, \quad \frac{dz_2}{dt} = c_v \eta (1 - \eta t)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(z_1),$$

где $z_1 = x_1$ — фазовая координата (безразмерная), соответствующая углу β (рад) наклона вектора скорости к горизонту:

$$z_1 = \ln [\operatorname{tg}(\pi/4 + \beta/2)];$$

$z_2 = x_2$ — величина скорости ракеты (м/с); g_0 — ускорение силы тяжести (м/с²); $\eta = x_3$ — удельный расход массы ракеты (с⁻¹), который рассматривается в качестве параметра неопределённости; c_v — относительная скорость отбрасываемых частиц (м/с).

Далее полагаем, что $g_0 = 9,80665$; $c_v = 2290$; $t_0 = 0$; $T = 70$; $x_{i0} = x_i(0) \in G_{xi} = [c_i, d_i]$, $i = \overline{1, 3}$; $c_1 = 1,0107$; $d_1 = 2,4362$; $c_2 = 100$; $d_2 = 200$; $c_3 = r = 0,0060$; $d_3 = p = 0,0100$.

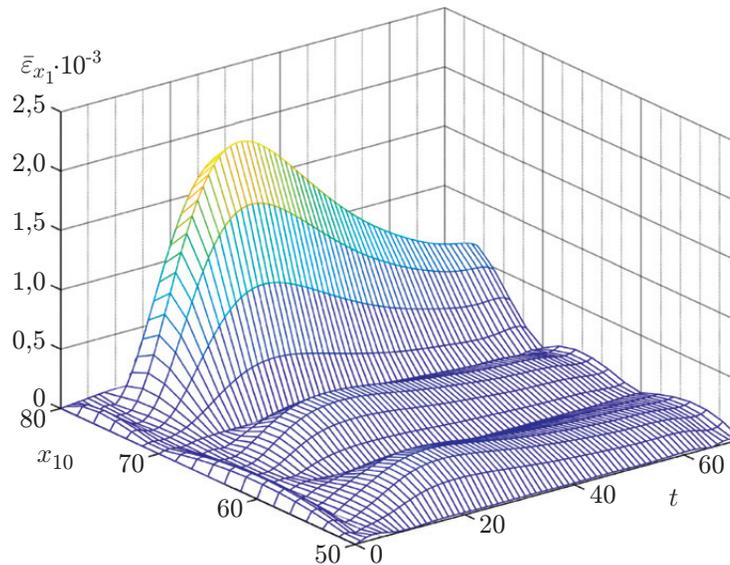


Рис. 1. Зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_{x_1}$ от t и x_{10} для фиксированных значений x_{20} и x_{30}

В качестве измеряемого параметра y используем угол β , т. е. $J = 1$, $y = \beta$ (в используемых далее формулах индекс j опускается), $I_1 = 2$, $I_2 = 1$, при этом:

$$f_1(t, x) = -g_0 x_2^{-1}; \quad f_2(t, x) = c_v x_3 (1 - x_3 t)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(x_1); \quad f_3(t, x) \equiv 0,$$

$$m = (m_1, m_2, m_3); \quad M_{x_1} = 4; \quad M_{x_2} = 6; \quad M_{x_3} = 5; \quad M_x = M_{x_1} M_{x_2} M_{x_3} = 120,$$

$$M_t = 11; \quad \psi_{xk}(t) = L_{(k)}(t); \quad t_{(k)} = 7(k - 1); \quad k = \overline{1, 11};$$

$$L_{(m)}(x_0) = L_{(m_1, m_2, m_3)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = L_{(m_1)}(x_{10}) L_{(m_2)}(x_{20}) L_{(m_3)}(x_{30}).$$

При расчётах погрешность операций над числами составляла $2,2 \cdot 10^{-16}$, а результаты вычислений представлены с точностью до четвёртого знака после запятой.

Для построения семейства ОИК использовался метод Рунге — Кутты 4-го порядка. В целях наглядности для оценки точности применялась частная невязка $\bar{\varepsilon}_{x_i} = |x_i(t, x_0) - \tilde{x}_i(t, x_0)|$, $i \in \{1, 2\}$, как функция от времени t и начального условия x_0 . Так, на рис. 1 представлена зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_{x_1}$ от t и x_{10} для фиксированных значений $x_{20} = 104$ и $x_{30} = 0,0063$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\varepsilon_{x_1} = \max_{x_0} \varepsilon_{x_1}(x_0) = 0,0020$, где

$$\varepsilon_{x_1}(x_0) = \max_t |\tilde{x}_1(t, x_0) - x_1(t, x_0)|,$$

что составляет 0,3237 %. Этот максимум соответствует узлу с координатами $t = 27$, $x_{10} = 2,1466$, $x_{20} = 104$, $x_{30} = 0,0063$. На усечённой области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ (где $\bar{G}_{x_0} = \{[1,3170, 1,7454], [120, 180], [0,0070, 0,0090]\}$ и $\bar{G}_t = [7, 63]$) была получена общая невязка $\varepsilon_{x_1} = 0,0004$, что составляет 0,1853 %. Максимум соответствует узлу ($t = 36$, $x_{10} = 1,5065$, $x_{20} = 128$, $x_{30} = 0,0070$).

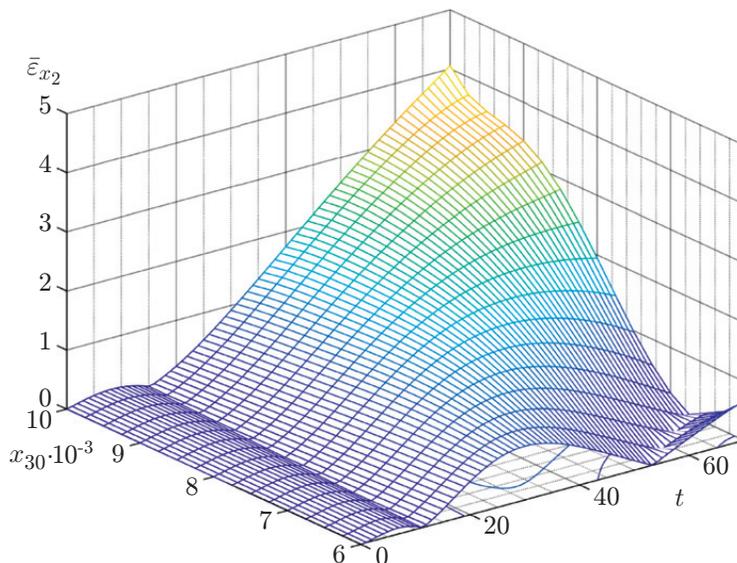


Рис. 2. Зависимость частной невязки $\bar{\epsilon}_{x_2}$ от t и x_{30} для фиксированных значений x_{10} и x_{20}

На рис. 2 представлена зависимость частной невязки $\bar{\epsilon}_{x_2}$ от t и x_{30} для фиксированных значений $x_{10} = 2,1466$ и $x_{20} = 124$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\epsilon_{x_2} = \max_{x_0} \epsilon_{x_2}(x_0) = 4,0542$, где

$$\epsilon_{x_2}(x_0) = \max_t |\tilde{x}_2(t, x_0) - x_2(t, x_0)|,$$

что составляет 0,17441 %. Этот максимум соответствует узлу ($t = 70, x_{10} = 2,14658, x_{20} = 124, x_{30} = 0,01$). На усечённой области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ получили общую невязку $\epsilon_{x_2} = 0,6355$, что составляет 0,036708 %. Максимум соответствует узлу ($t = 63, x_{10} = 1,506454, x_{20} = 180, x_{30} = 0,009$).

Данные результаты наглядно демонстрируют возможность существенного повышения точности численно-аналитического решения дифференциального уравнения при усечении исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$.

Учитывая, что измеряемый параметр может быть представлен в виде

$$y = \beta = 2\{\arctg[\exp(z_1)] - \pi/4\},$$

на рис. 3. приведён трёхмерный график частной невязки

$$\bar{\epsilon}_\beta = |\gamma(t, x_0) - \tilde{\gamma}^*(t, x_0)|$$

как функции от t и x_{10} для фиксированных значений $x_{20} = 108$ и $x_{30} = 0,00625$.

Соответственно на рис. 4 рассмотрен случай зависимости $\bar{\epsilon}_\beta$ от t и x_{30} для фиксированных значений $x_{10} = 2,1466$ и $x_{20} = 108$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\epsilon_\beta = \max_{x_0} \epsilon_\beta(x_0) = 0,098842$, где

$$\epsilon_\beta(x_0) = \max_t |\tilde{\beta}(t, x_0) - \beta(t, x_0)|,$$

что составляет 0,3303 %. Максимум соответствует узлу ($t = 31, x_{10} = 2,14658, x_{20} = 108, x_{30} = 0,00625$). На усечённой области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ получили общую невязку $\epsilon_\beta = 0,01993$,

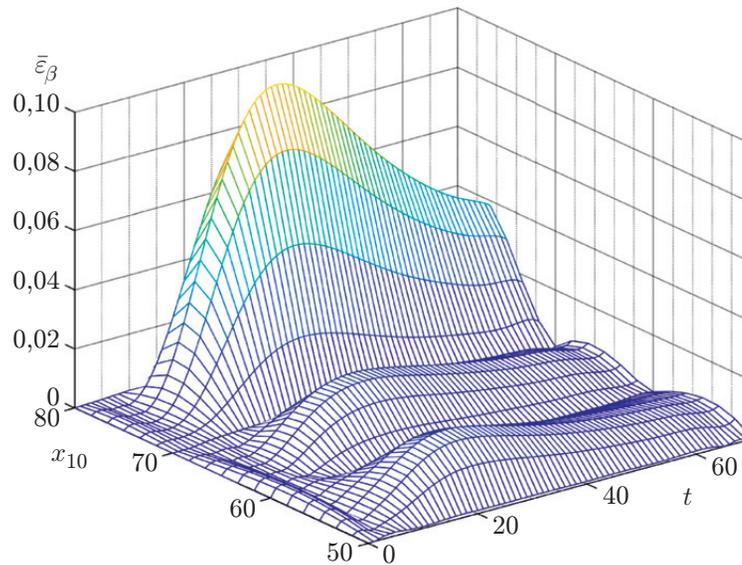


Рис. 3. Зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_\beta$ от t и x_{10} для фиксированных значений x_{20} и x_{30}

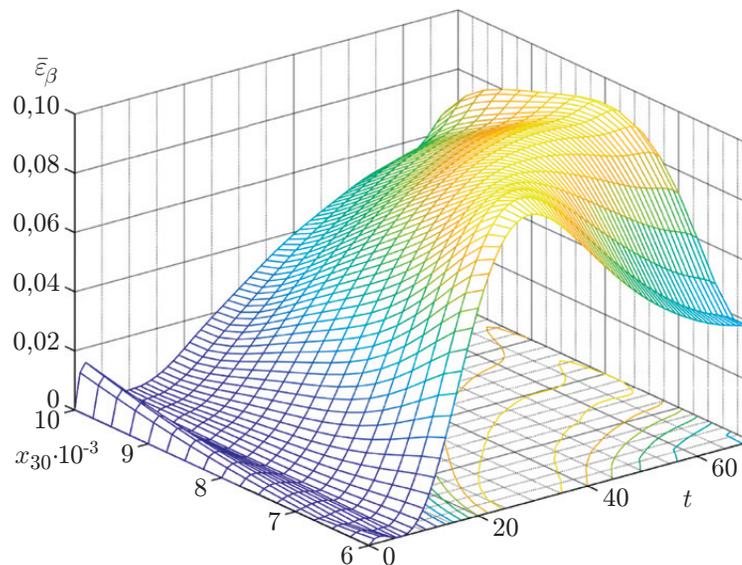


Рис. 4. Зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_\beta$ от t и x_{30} для фиксированных значений x_{10} и x_{20}

что составляет 0,2197 %. Максимум соответствует узлу ($t = 38, x_{10} = 1,506454, x_{20} = 128, x_{30} = 0,007$).

Соответственно для производной $y^{(1)} = \beta^{(1)}$ на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\varepsilon_\beta^{(1)} = \max_{x_0} \varepsilon_\beta^{(1)}(x_0) = 5,4919$, где

$$\varepsilon_\beta^{(1)}(x_0) = \max_t |\tilde{\beta}^{(1)}(t, x_0) - \beta^{(1)}(t, x_0)|,$$

что составляет 6,952 %. Максимум соответствует узлу ($t = 1, x_{10} = 2,436246, x_{20} = 100, x_{30} = 0,006$). На усечённой области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ получили общую невязку $\varepsilon_\beta^{(1)} = 3,1612$, что

составляет 5,586 %. Максимум соответствует узлу ($t = 8$, $x_{10} = 1,735415$, $x_{20} = 120$, $x_{30} = 0,007$).

Результаты численного эксперимента наглядно показывают возможность качественного описания как входных, так и выходных параметров ДО даже на вычислительных сетках малого объёма с помощью разработанного численно-аналитического метода. Для уменьшения негативных краевых эффектов необходимо сужать области задания параметров t и x_0 .

Заключение. Развитый численно-аналитический метод исследования многомерных ДО ориентирован в первую очередь на случаи, связанные с решением прикладных задач [4–7, 9, 10, 14, 15], требующих вычислений в реальном времени. Данный метод предполагает вынесение основного объёма вычислений на предварительный этап, не связанный непосредственно с наблюдением за ДО. К концу этого этапа на базе семейства ОИК мы должны сформировать аналитическое решение дифференциального уравнения и аналитическое выражение для измеряемого выхода ДО, справедливые для заданной области изменения временной координаты, начального условия и параметров неопределённости.

Используя метод [1], полученные результаты несложно обобщить для задачи активной идентификации измеряемого выхода многомерного ДО, а при соответствующей размерности вектора измеряемых параметров (когда выполняется необходимое условие наблюдаемости) и для задачи активной идентификации математической модели самого ДО. Такая идентификация связана с проведением заранее спланированного эксперимента [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булычев Ю. Г., Кондрашов А. Г., Раду П. Ю. Идентификация динамического объекта с использованием семейства экспериментальных опорных интегральных кривых // Автоматика. 2019. 55, № 1. С. 98–110. DOI: 10.15372/AUT20190113.
2. Булычев Ю. Г. Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. 28, № 10. С. 1482–1490.
3. Булычев Ю. Г., Елисеев А. В. Вычислительная схема инвариантно-несмещённого оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. 48, № 4. С. 580–592.
4. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978. 384 с.
5. Булычев Ю. Г., Манин А. П. Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000. 252 с.
6. Булычев Ю. Г., Васильев В. В., Джуган Р. В. и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов / Под ред. А. П. Манина, В. В. Васильева. М.: Машиностроение–Полет, 2016. 439 с.
7. Булычев Ю. Г., Булычев В. Ю., Ивакина С. С., Насенков И. Г. Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 6. С. 133–143.
8. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 232 с.
9. Брандин В. Н., Разоренов Г. Н. Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
10. Льюнг Л. О точности модели в идентификации систем // Техническая кибернетика. 1992. № 6. С. 55–64.

11. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
12. **Иванов В. В.** Методы вычислений на ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
13. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
14. **Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т.** Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974. 340 с.
15. **Красовский А. А.** Науковедение и состояние теории процессов управления. Обзор // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 3–19.
16. **Воробьев Л. М.** К теории полета ракет. М.: Машиностроение, 1970. 223 с.

Поступила в редакцию 22.08.2019

После доработки 08.11.2019

Принята к публикации 12.11.2019
