

УДК 535.42:681.786

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ МАЛОГО ДИАМЕТРА С УЧЁТОМ ИХ ОТРАЖАЮЩИХ СВОЙСТВ

© Ю. В. Чугуй^{1,2,3}¹ Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,

630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41

² Новосибирский государственный университет,

630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

³ Новосибирский государственный технический университет,

630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20

E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

В рамках скалярной теории дифракции света Кирхгофа — Френеля исследованы особенности дифракционных явлений в дальней зоне на цилиндрических (металлических) объектах малых диаметров (0,01–0,5 мм) с учётом их отражающих свойств. При расчётах применялась модель цилиндра в виде экрана (нулевой толщины). Отражённая составляющая поля в дальней зоне вычислялась методом стационарной фазы. Показано, что при использовании стандартных алгоритмов обработки информации (справедливых для объектов экранного типа) влияние отражённой волны света приводит к заметной погрешности измерений, пропорциональной амплитудному коэффициенту отражения света от поверхности цилиндра. Для снижения её влияния предложен алгоритм определения диаметров таких объектов с повышенной точностью путём соответствующей обработки дифракционной картины в области углов $\theta \ll \sqrt[3]{\lambda/R}$, где λ — длина волны света, а R — радиус цилиндра. Полученные результаты могут быть использованы при разработке высокоточных дифракционных измерителей тонких цилиндрических объектов (проволоки, нити, волокна).

Ключевые слова: цилиндр, радиус, дифракция Фраунгофера, коэффициент отражения света, измерение диаметров.

DOI: 10.15372/AUT20200405

Введение. Разработка бесконтактных оптико-электронных средств прецизионного контроля диаметров цилиндрических изделий кругового типа для решения измерительных задач в различных отраслях промышленности является одной из актуальных задач приборостроения. В этот класс объектов входят как цилиндры средних и больших диаметров в диапазоне от единиц до сотен миллиметров (толстые проволоки, подшипники, валы), так и тонкие протяжённые цилиндрические изделия малых диаметров в диапазоне 0,01–0,5 мм (нити, волокна, проволоки) с разной отражательной способностью. При этом погрешность первого типа цилиндров не должна превышать 0,3 мкм, а второго — 0,05 мкм.

Существующие оптико-электронные методы определения диаметров таких объектов основаны на формировании, регистрации и обработке полей, наблюдаемых в различных плоскостях оптической системы. Эти поля регистрируются либо в изображении исходной диаметральной плоскости объекта (проекционные методы) [1], либо в удалённых от неё плоскостях — в так называемых ближней и дальней зонах. В этих случаях для целей размерного контроля абсолютно отражающих цилиндров используются интерференционные и дифракционные методы [2–4], базирующиеся на дифракции света Френеля (френелевские методы) [5] либо на дифракции Фраунгофера (фраунгоферовские методы) [6, 7]. Последние

методы положены в основу измерения диаметров тонких протяжённых цилиндрических объектов.

Существенно, что структура полей, формируемых цилиндрическими объектами, во многом задаётся их оптическими свойствами. Так, отражённая от поверхности волна, амплитуда которой зависит от отражательной способности объекта (его коэффициента отражения), интерферируя с волной, дифрагированной на объекте, может вносить заметные возмущения в наблюдаемое поле, которые усиливаются по мере увеличения угла наблюдения. Особенности структуры полей для таких объектов хорошо изучены для случая абсолютно отражающих цилиндров со средними и большими диаметрами [1–3].

Более общий подход к контролю цилиндров таких диаметров с различными коэффициентами отражения света от их поверхности исследован в [8]. Что касается важного для практики случая контроля цилиндрических протяжённых объектов малого диаметра, то разработанные в рамках скалярной теории Кирхгофа — Френеля дифракционные фраунгоферовские методы могут быть использованы лишь для абсолютно поглощающих [2] и абсолютно отражающих [7] цилиндров.

Целью данной работы являются исследования особенностей дифракционных явлений на цилиндрических объектах малого диаметра (0,01–0,5 мм) в случае произвольного (однородного по поверхности) коэффициента отражения света. В рамках скалярной теории предложен алгоритм определения диаметров таких объектов с повышенной точностью путём соответствующей обработки дифракционной картины.

Расчёт поля в дальней зоне. Рассмотрим в рамках скалярной теории Кирхгофа — Френеля дифракцию света в дальней зоне (рис. 1) на круговом отражающем цилиндре с радиусом R , освещённом плоской монохроматической волной света с амплитудой света E_0 и длиной волны λ ($R \ll \sqrt{\lambda z}$, где z — расстояние от объекта до плоскости наблюдения). Отметим, что дальняя зона реализуется также и при наблюдении поля в задней фокальной плоскости сферического объектива [9]. Будем далее характеризовать отражающие свойства цилиндра амплитудным коэффициентом отражения света μ (по модулю). Очевидно, что поле в дальней зоне можно рассматривать как сумму двух волн, одна из которых соответствует дифракции света на абсолютно поглощающем цилиндре (как на абсолютно чёрном теле, для которого $\mu = 0$), а другая — полю, формируемому в дальней зоне

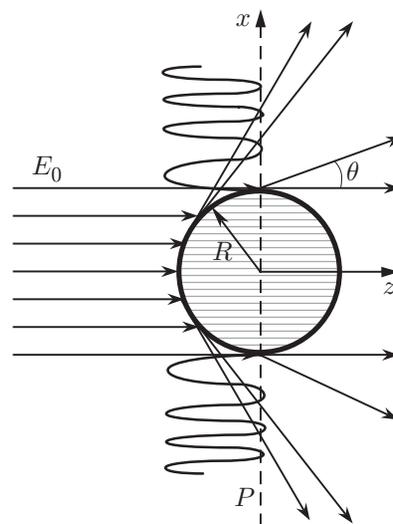


Рис. 1. Конфигурация лучей для дифракции света на круговом цилиндре радиуса R

отражённой компонентой. Так как строгая теория дифракционных явлений на цилиндрах исключительно сложна для практических применений, то в качестве модели цилиндра часто выбирается абсолютно поглощающий (нулевой толщины) экран размером $D = 2R$. Эта модель достаточно точно описывает дифракционные явления при $D \gg \lambda$ и расстоянии от объекта до плоскости наблюдения $z \gg \sqrt[3]{\lambda R^2}$ [3].

Исходя из вышеуказанного относительное амплитудное распределение поля (относительно E_0) в диаметральной плоскости P цилиндра $f(x)$ можно представить в виде суммы двух составляющих: теневой $f_1(x)$ и отражённой $f_2(x)$:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x). \quad (1)$$

Первая составляющая описывает относительное амплитудное пропускание (амплитудный коэффициент пропускания) экрана:

$$f_1(x) = 1 - \text{rect}(x/(2R)), \quad (2)$$

где $\text{rect}(t)$ — прямоугольная функция, равная 1 при $|t| < 0,5$ и нулю в остальной области [9]. Что касается отражённой составляющей $f_2(x)$ в суммарном поле $f(x)$, то при её вычислении воспользуемся известными результатами, базирующимися на методах геометрической (лучевой) оптики. Согласно им поле волны, отражённой от поверхности кругового цилиндра в его диаметральной плоскости, можно описать следующим образом [7]:

$$f_2(x) = \mu e^{j\varphi} \exp \left[j \frac{2k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{3} (|x| - R) \right)^{3/2} \right] Y(|x| - R), \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$; φ — скачок фазы, падающей на объект волны при отражении её от поверхности объекта; $Y(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, равная единице для $t > 0$ и нулю для $t < 0$. Отметим, что фаза φ меняется в зависимости от материала объекта. Наличие модуля в переменной x объясняется особенностью отражения света от поверхности цилиндра (отражённая составляющая отлична от нуля лишь для $x > R$ и $x < -R$).

Окончательно суммарное поле в диаметральной плоскости P цилиндра (см. рис. 1) можно представить в виде

$$f(x) = 1 - \text{rect} \left(\frac{x}{2R} \right) + \mu e^{j\varphi} \exp \left[j \frac{2k}{\sqrt{R}} \left(\frac{2}{3} (|x| - R) \right)^{3/2} \right]. \quad (4)$$

Найдём относительное распределение поля в дальней зоне $F(\theta)$, которое связано, как известно, преобразованием Фурье с исходным распределением $f(x)$ [9]. Его можно представить в виде компонент $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$, соответствующих дифракционной (спектру изображения $f_1(x)$) и отражённой составляющим поля. Используя (4) для поля в дальней зоне, можно получить

$$\begin{aligned} F(\theta) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-jk\theta x} dx = F_1(\theta) + F_2(\theta) = \\ &= 2\pi\delta(k\theta) - \frac{2 \sin(k\theta R)}{k\theta} + \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) e^{-jk\theta x} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

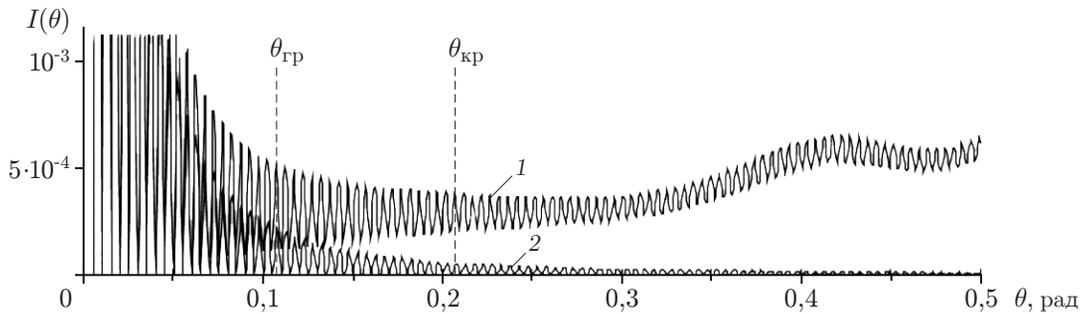


Рис. 2. Типичные дифракционные картины $\lambda = 0,633$ мкм для кругового цилиндра с радиусом $R = 60$ мкм (кривая 1) и плоского экрана размером $D = 120$ мкм (кривая 2)

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [9].

При вычислении составляющей $F_2(\theta)$ воспользуемся методом стационарной фазы. Как показывают расчёты [7], при $\theta > 0$ составляющая имеет вид $F_2(\theta) = 0,5\sqrt{3}\mu e^{j\varphi} e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda R\theta} e^{-jkR\theta^3/8} e^{-jk\theta R}$. С учётом этого для результирующего поля в плоскости P (см. рис. 1) имеем следующее выражение:

$$F(\theta) = 2\pi\delta(k\theta) - \frac{2\sin(k\theta R)}{k\theta} + 0,5\sqrt{3}\mu e^{j\varphi} e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda R\theta} e^{-jkR\theta^3/8} e^{-jk\theta R}. \quad (6)$$

Для упрощения расчётов сделаем далее замену переменных, перейдя к безразмерной переменной $\xi = k\theta R$. Найдём относительную интенсивность поля $I(\xi) = |F(\xi)|^2$. Ограничимся случаем металлических объектов, для которых $\varphi = \pi$ [10]. В результате получаем

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \left| \frac{\sin \xi}{\xi} + \mu\beta e^{j\pi/4} \sqrt{\xi} e^{-j\xi^3/(8k^2R^2)} e^{-i\xi} \right|^2 = \\ &= \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} + \sqrt{2}\mu\beta \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}} \cos\left(\frac{\xi^3}{8k^2R^2} + \xi - \frac{\pi}{4}\right) + \mu^2\beta^2\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{R}$. Отметим, что при выводе формулы (7) нами опущен член с дельта-функцией (6), так как при $\xi > 0$ он равен нулю.

Полученная дифракционная картина (7) резко отличается от картины для спектра экрана. В ней наблюдаются как высокочастотные колебания, обусловленные интерференцией полей от границ экрана (поперечная интерференция), так и низкочастотные вследствие влияния отражённой волны, приводящей к продольной интерференции полей (эквивалентных точечных источников). Для сравнения на рис. 2 приведены типичные дифракционные картины для абсолютно отражающего ($\mu = 1$) металлического цилиндра с радиусом R и плоского экрана того же размера $2D$. Отметим, что для абсолютно поглощающих объектов ($\mu = 0$) положение минимумов в этом случае определяется известной формулой $\xi_n = \pi n$ ($\theta_n = \lambda n/D$), при этом расстояние между минимумами (между дифракционными полосами) эквидистантно: оно равно π ($\theta_{n+1} - \theta_n = \lambda/D$). Однако наличие в наблюдаемом поле (6) отражённой волны с кубическим фазовым членом приводит к нарушению эквидистантности полос — к уменьшению их периода. При увеличении угла θ

усиливается вклад второго члена в выражении (7). Особенно это заметно, когда амплитуды первой и второй компонент в выражении (6) становятся одного порядка, что имеет место при граничном угле $\theta_{\text{гр}} \sim 0,5 \sqrt[3]{\lambda/R}$. Например, при $R = 60$ мкм и $\lambda = 0,633$ мкм угол $\theta_{\text{гр}} \approx 0,11$ (см. рис. 1). При таких углах фазовый кубический член $e^{-jkR\theta^3/8}$ становится весьма ощутимым, и при критическом угле $\theta_{\text{кр}} \approx \sqrt[3]{\lambda/R}$ его влияние приводит к заметному смещению положения минимумов в спектре объекта (на четверть периода полосы) [7].

Расчёт положения минимумов в дифракционной картине и определение диаметров объектов. Ограничимся рассмотрением поля в области углов θ , много меньших граничного угла $\theta \ll \theta_{\text{гр}} = 0,5 \sqrt[3]{\lambda/R}$. Для определения размера D по дифракционной картине найдём положение минимумов $\tilde{\xi}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) в распределении (7), взяв производную от функции $I(\xi)$. С этой целью представим $I(\xi)$ в виде двух слагаемых:

$$I(\xi) = G(\xi) + \mu^2 \beta^2 \xi, \quad (7a)$$

где $G(\xi) = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} + \sqrt{2} \mu \beta \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}} + \cos \left(\xi + \frac{\xi^3}{8k^2 R^2} - \frac{\pi}{4} \right)$. Для нахождения минимумов $\tilde{\xi}_n$ воспользуемся далее методом Ньютона [11], полагая, что $\tilde{\xi}_n = \xi_n + \Delta\xi_n$, где $\Delta\xi_n$ — добавки к положениям минимумов $\xi_n = \pi n$ в дифракционной картине экрана размером $2R$ ($\Delta\xi_n \ll \xi_n$). С учётом этого выражение для производной $I'(\tilde{\xi}_n)$ согласно (7a) можно представить в виде

$$I'(\tilde{\xi}_n) = G'(\xi_n + \Delta\xi_n) + \mu^2 \beta^2 = G'(\xi_n) + \Delta\xi_n G''(\xi_n) + \mu^2 \beta^2 = 0,$$

откуда следует, что добавка $\Delta\xi_n$ может быть вычислена следующим образом:

$$\Delta\xi_n = -\frac{G'(\xi_n) + \mu^2 \beta^2}{G''(\xi_n)}. \quad (8)$$

Как показывают расчёты, первая производная функции $G(\xi)$ равна $G'(\xi_n) = \mu\beta/\sqrt{\pi n}$, а вторая — $G''(\xi_n) = 2/(\pi^2 n^2)$. На основании этого положение минимумов ξ_n в дифракционной картине цилиндра с произвольным коэффициентом отражения можно приближённо определить как

$$\tilde{\xi}_n = \pi n - 0,5\mu\beta\pi^{3/2}n^{3/2} - 0,5\pi^2\mu^2\beta^2n^2. \quad (9)$$

Для удобства вычислений перейдём к угловым величинам с учётом того, что $\tilde{\xi}_n = kR\tilde{\theta}_n$, $\xi_n = kR\theta_n$, а $\Delta\xi_n = kR\Delta\theta_n$. В результате угловое положение минимумов в дифракционной картине цилиндра можно определить по формуле

$$\tilde{\theta}_n = \theta_n + \Delta\theta_n = \frac{\lambda}{D} n - \mu\gamma \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 n^{3/2} - \frac{3\mu^2}{16} \left(\frac{\lambda}{D} \right)^3 n^2, \quad (10)$$

где $\gamma = 0,25\sqrt{1,5} = 0,306$, а $\Delta\theta_n = -\mu\gamma n^{3/2}(\lambda/D)^2 - 0,187\mu^2 n^2(\lambda/D)^3$.

Из полученного выражения следует, что отражательная способность цилиндров приводит к уменьшению углового положения n -го минимума в дифракционной картине объекта на величину $\Delta\theta_n$ (по сравнению с моделью в виде экрана), что приводит к появлению систематической погрешности измерений.

Используя формулу (10), попытаемся найти алгоритм восстановления искомого параметра D путём обработки полученной измерительной информации в виде углов $\tilde{\theta}_n$. При

дальнейших расчётах будем пренебрегать последним членом в (10), так как он значительно меньше второго. Действительно, отношение этих членов равно $\mu\lambda\sqrt{n}/(8\gamma D)$ и при $\lambda = 0,63$ мкм, $D = 60$ мкм, $n = 9$ и $\mu = 1$ составляет 0,013.

Для нахождения искомого параметра D представим выражение (10) в следующем виде:

$$\tilde{\theta}_n \approx \frac{\lambda n}{D(1 + \mu\gamma\lambda n^{1/2}/D)} = \frac{\lambda n}{D + \mu\gamma\lambda n^{1/2}}. \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что $\Delta\theta_n \ll \theta_n$.

Отсюда следует, что искомый размер D можно приближённо найти по формуле

$$D \approx \hat{D} = \lambda n / \tilde{\theta}_n - \Delta D = D_{\text{изм}} - \Delta D, \quad (12)$$

где \hat{D} — восстановленное значение диаметра цилиндра D , а $D_{\text{изм}} = \lambda n / \tilde{\theta}_n$ — неточное завышенное значение диаметра, найденное по результатам измерения угловых положений минимумов $\tilde{\theta}_n$. Таким образом, для восстановления параметра D с высокой точностью необходимо из вычисленных (завышенных) значений $D_{\text{изм}}$ найти систематическую погрешность

$$\Delta D = 0,306\mu\lambda n^{1/2}. \quad (13)$$

Иными словами, добавка $\Delta D_{\text{кор}}$, корректирующая результаты измерений, должна быть выбрана $\Delta D_{\text{кор}} = -\Delta D$.

Соответственно относительная погрешность измерения параметра D имеет вид

$$\delta D = \Delta D / \hat{D} = 0,306\mu\sqrt{n} / \hat{D}. \quad (14)$$

Отметим, что величина δD при $n = \text{const}$ уменьшается обратно пропорционально диаметру D . Можно видеть, что погрешности ΔD и δ с хорошей степенью точности зависят линейно от амплитудного коэффициента отражения μ , изменяясь от максимального значения для абсолютно отражающих цилиндров ($\mu = 1$) до минимального в случае абсолютно поглощающих объектов ($\mu = 0$).

Оценим максимальные значения погрешностей ΔD и δ (при $\mu = 1$) для следующих значений параметров: $\lambda = 0,5$ мкм, $D = 50$ мкм, $n = 9$. Получаем абсолютную погрешность измерения $\Delta D = 0,46$ мкм, а относительную — 0,9 %. Если при тех же значениях λ и n диаметр D выбрать равным 500 мкм, то в этом случае относительная погрешность уменьшается в 10 раз: $\delta = 0,09$ %, а абсолютная погрешность остаётся без изменения. Таким образом, эффекты отражения света от поверхности цилиндра могут приводить к заметным погрешностям измерений при использовании стандартных алгоритмов нахождения размера D по положению дифракционных минимумов, справедливых для экранов (нулевой толщины). Уровень составляющей погрешности измерений, обусловленной отражающими свойствами цилиндра, можно заметно снизить, если согласно формуле (12) внести в результаты измерений величин $D_{\text{изм}}$ (завышенных по сравнению с исходным диаметром D из-за влияния отражения) указанную корректирующую добавку.

Оценки показывают, что систематическая погрешность измерений, обусловленная влиянием отражающих свойств цилиндров благодаря её коррекции может быть уменьшена в десятки раз. Отметим, что для задания корректирующей добавки необходимо знать значение амплитудного коэффициента отражения света от поверхности цилиндра, которое можно определить стандартным фотометрическим способом.

Заключение. В данной работе исследованы дифракционные явления в дальней зоне на цилиндрических (металлических) объектах малых диаметров в диапазоне 0,01–0,5 мм с произвольным (однородным по поверхности) коэффициентом отражения света. Расчёт поля в дальней зоне, в которой наблюдается дифракция Фраунгофера, производился в рамках скалярной теории дифракции Кирхгофа — Френеля. При вычислении дифракционной составляющей использовалась модель цилиндра диаметром D в виде поглощающего экрана (нулевой толщины) того же размера. Отражённая составляющая поля рассчитывалась методом стационарной фазы. Её появление приводит к нарушению эквидистантности дифракционных полос, наблюдаемой при дифракции Фраунгофера на объекте в виде экрана — к уменьшению их периода. Этот эффект усиливается, начиная с углов θ , больших граничного угла $\theta_{гр} = 0,5 \sqrt[3]{\lambda/R}$, при котором амплитуды дифракционной и отражённой составляющих в дальнем поле становятся соизмеримыми. На основе расчётов найдена аналитическая формула для углового положения минимумов при $\theta \ll \theta_{гр}$ с учётом отражённой составляющей поля. Показано, что абсолютная погрешность измерения диаметра цилиндра пропорциональна амплитудному коэффициенту отражения света и корню квадратному из количества регистрируемых дифракционных полос. Эта составляющая приводит к заметной систематической погрешности измерения. Для снижения влияния отражающих свойств цилиндра на результат измерения предложена их коррекция, которая позволяет уменьшить эту составляющую погрешности в десятки раз. Полученные результаты могут быть использованы при разработке высокоточных дифракционных измерителей тонких цилиндрических объектов (проволоки, нити, волокна).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dew G. D. The application of spatial filtering techniques to profile inspection, and an associated interference phenomenon // Opt. Acta: Intern. Journ. Opt. 1970. **17**, N 4. P. 237–257.
2. Kochsiek M., Kunzmann H., Tantau J. Anwendung beugungsoptischer Methoden zur Messung der Durchmesser von kleinen Wellen // PTB-Mittellungen. 1976. **86**, N 4. S. 279–282.
3. Лемешко Ю. А., Чугуй Ю. В. Размерный контроль круговых отражающих цилиндров интерференционным методом // Автометрия. 2003. **39**, № 5. С. 42–52.
4. Сахно С. П., Тымчик Г. С. Дифракционный метод контроля диаметра цилиндрических деталей // Оптико-механическая промышленность. 1987. **7**, № 5. С. 9–12.
5. Лемешко Ю. А., Чугуй Ю. В., Яровая А. К. Прецизионный размерный контроль диаметров круговых отражающих цилиндров // Автометрия. 2007. **43**, № 3. С. 112–121.
6. Belaid S., Fang Ren K., Gréhan G. et al. Enhancement of wire diameter measurements: Comparison between Fraunhofer diffraction and Lorenz-Mie theory // Opt. Eng. 1996. **35**, N 4. P. 946–950.
7. Chugui Yu. V., Pavlov A. A. Peculiarities of cylinder diameter determination by diffraction method // Proc. of XVI IMEKO World Congress. Vienna, Austria, Sept. 25–28, 2000. Topic 2. P. 169–174.
8. Чугуй Ю. В. Повышение точности френелевского метода измерений диаметров круговых металлических цилиндров с произвольным коэффициентом отражения света // Автометрия. 2019. **55**, № 6. С. 108–116. DOI: 10.15372/AUT20190614.
9. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 721 с.
11. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

Поступила в редакцию 04.02.2020

После доработки 02.03.2020

Принята к публикации 10.03.2020