

УДК 519.1

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСНО-ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФИЗИЧЕСКИ РЕАЛИЗУЕМЫХ ПОИСКОВЫХ АЛГОРИТМОВ

© А. Л. Резник, А. А. Соловьев, А. В. Торгов

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su,
solowey@rambler.ru,
torgov@iae.nsk.su*

Исследуются быстродействующие алгоритмы обнаружения и локализации случайно распределённых импульсно-точечных объектов, способных генерировать в случайные моменты времени мгновенные дельта-импульсы. Поиск осуществляется с помощью приёмного устройства (детектора), которое свободно перемещается в пределах поискового интервала и динамически перестраивает размер сканирующего окна. В представленной работе априорная информация о распределении разыскиваемого сигнального источника ограничивается одномерными функциями со ступенчатой плотностью распределения вероятности, что обеспечивает физическую реализуемость алгоритмов. Рассчитаны параметры оптимального поиска в зависимости от априорной плотности распределения разыскиваемого сигнального источника и требуемой точности локализации.

Ключевые слова: импульсно-точечный источник, оптимальный поиск, точность локализации.

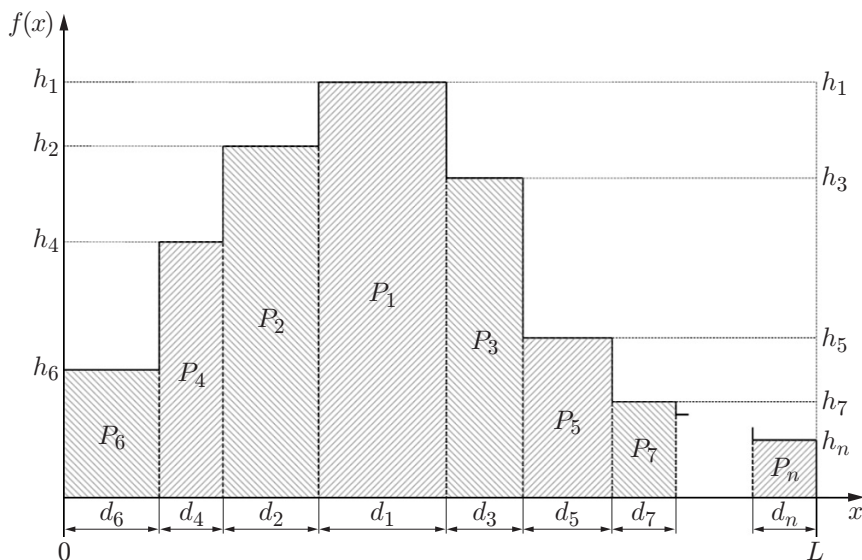
DOI: 10.15372/AUT20200606

Введение. При цифровой регистрации и последующей программной обработке быстропротекающих динамических процессов различной физической природы один из наиболее трудоёмких и алгоритмически сложных моментов связан с устранением импульсных помех, создаваемых точечными источниками со случайным пространственным распределением. Для успешного решения таких задач требуется, как правило, высокоточное определение координат объектов-источников излучения, причём в большинстве практически важных приложений сделать это необходимо за минимальное (в статистическом плане) время. Под импульсно-точечным источником далее будет пониматься объект пренебрежимо малых угловых размеров (математическая точка), имеющий случайную плотность распределения $f(x)$ на интервале поиска $(0, L)$ и генерирующий в случайные моменты времени бесконечно короткие импульсы (дельта-функции). Паузы между импульсами имеют показательную плотность распределения $\gamma(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$. Требуется за минимальное (в статистическом плане) среднее время поиска локализовать источник с точностью ε . Поиск объекта ведётся с помощью регистрирующего устройства (приёмника) с произвольно перестраиваемым во времени окном обзора. Импульс фиксируется, если точечный источник в момент генерации импульса находится в окне обзора приёмного устройства. При регистрации очередного импульса происходит уточнение положения источника на координатной оси, в результате чего интервал поиска сужается, а процедура локализации повторяется до фиксации следующего импульса и т. д. Вообще, при построении оптимального по времени поискового алгоритма возможна и противоположная ситуация, когда в определённые моменты времени текущий диапазон поиска не сужается, а расширяется. Такой подход наиболее эффективен в тех случаях, когда в исходном (априорном) распределении

случайного разыскиваемого источника имеются значительные перепады плотности. Рассматриваемая в данной работе одномодальная ступенчатая плотность распределения отвечает этим требованиям. Главное преимущество одномодальных ступенчатых функций заключается в том, что их применение позволяет разработать физически реализуемый алгоритм локализации, осуществляемый односвязным сканирующим окном детектора. Ещё одно полезное свойство ступенчатых функций — они удобный инструмент аппроксимации непрерывных функций распределения, поэтому любое продвижение в вопросах построения оптимальных поисковых алгоритмов для многоступенчатых плотностей распределения случайных импульсных источников оказывает непосредственное влияние на прогресс в области построения оптимальных поисковых алгоритмов для непрерывных плотностей распределения.

В математическом плане задачи построения алгоритмов оптимального поиска случайных импульсно-точечных объектов возникают во многих научно-технических приложениях. В частности, такие вопросы являются классическими в областях, связанных с обнаружением и оценением сигнальных объектов [1–3]. В ядерной физике с такими проблемами сталкиваются при регистрации элементарных частиц камерами, обладающими «мёртвым временем», в течение которого счётчик «запирается» и регистрация частиц не происходит [4]. В задачах технической диагностики [5], в математической теории связи [6] и в теории надёжности [7] подобные исследования требуются при разработке методов устранения неисправностей, проявляющихся в виде перемежающихся отказов. В астрофизике и космологии [8–9] с такими проблемами сталкиваются при поиске барстеров — вспыхивающих галактических рентгеновских источников. В современных разделах информатики эти методы востребованы при построении алгоритмов обнаружения слабоконтрастных и мало-размерных объектов на зашумлённых цифровых изображениях [10–13], например, в теории сигналов аналогичные задачи возникают при оценивании надёжности регистрации случайных точечных полей [14, 15].

Постановка задачи. Предмет представленной работы — исследование и создание алгоритмов многоэтапной локализации случайного импульсного источника, имеющего одномодальную ступенчатую плотность распределения $f(x)$ на интервале поиска $(0, L)$ (рисунк).



Пример одномодальной ступенчатой плотности распределения случайного импульсно-точечного источника на поисковом интервале $(0, L)$

Одномодальность в данном случае означает, что исходная функция $f(x)$, характеризующая плотность распределения вероятности разыскиваемого источника, на начальном участке монотонно возрастает, достигая своего максимума h_1 , а затем монотонно спадает. Соблюдение требования одномодальности необходимо для того, чтобы алгоритм локализации был физически реализуем с помощью непрерывного перемещения односвязного сканирующего окна приёмника-детектора. Естественно, что процесс локализации должен начинаться с осмотра самой высокой ступеньки площадью P_1 , имеющей высоту h_1 и ширину d_1 (т. е. $P_1 = h_1 \times d_1$). Предполагается, что детектирование-осмотр наивысшей ступеньки будет проходить в течение периода времени t_1 , продолжительность которого подлежит определению, с помощью апертуры шириной l_1 (это значение также необходимо будет рассчитать). Поскольку на начальном этапе поисковой процедуры осматривается только одна ступенька с наивысшей плотностью распределения вероятности h_1 , то при отсутствии регистрируемых импульсов будет происходить постепенное понижение значения h_1 с одновременным повышением высоты всех остальных ступенек h_i , $i = \overline{2, n}$, исходной плотности распределения $f(x)$ (т. е. динамически изменяющаяся функция времени $h_1(t)$ в этот период времени будет монотонно убывать, в то время как высоты остальных ступенек $h_i(t)$, $i = \overline{2, n}$, будут монотонно возрастать). Расчёт длительности промежутка времени t_1 , по истечении которого диапазон поиска должен быть расширен, является одним из главных параметров оптимальной процедуры локализации. Вообще, в отсутствие регистрируемых детектором сигнальных импульсов момент переключения приёмного устройства (детектора) на расширенный поиск должен осуществляться тогда, когда уменьшающаяся по величине плотность $h_1(t)$ совпадёт со второй по величине и возрастающей плотностью $h_2(t)$. При этом во всех проводимых расчётах нужно корректно учесть, что если до истечения времени t_1 детектором будет зафиксирован импульс, то это будет означать, что первый этап локализации закончен. Дальнейшее уточнение координат источника-генератора случайных импульсов (вплоть до достижения требуемой точности ε) должно вестись уже исключительно внутри апертуры l_1 , в пределах которой разыскиваемый импульсный объект имеет равномерное распределение. Для ведения такого поиска можно воспользоваться оптимальной по времени многоэтапной процедурой локализации случайного равномерно распределённого точечного импульсного источника [15].

Рассмотрим второй вариант, когда в течение времени t_1 не происходит фиксация импульса. В этом случае осуществляется «переформатирование» исходной плотности вероятности $f(x)$, а именно: 1) исходные фрагменты с линейными размерами d_1 и d_2 , соответствующие ступенькам h_1 и h_2 , объединяются в один фрагмент-ступеньку $d_1^{(2)}$ (здесь и далее по тексту верхний индекс в круглых скобках для всех переменных будет означать номер поискового этапа); 2) в соответствии с алгоритмом, который будет приведён, пересчитывается высота $h_1^{(2)}$ новой объединённой ячейки; 3) осуществляется пересчёт высот всех остальных ступенек $h_i^{(2)}$, $i = \overline{2, n-1}$. Далее описанная процедура локализации повторяется на следующем этапе, но уже применительно к модифицированной плотности вероятности $f^{(2)}(x)$. Такая рекурсивная процедура с постоянно расширяющимся диапазоном поиска будет повторяться многократно до тех пор, пока на одном из этапов не будет зафиксирован сигнальный импульс. Если же ни на одном из $n - 1$ предварительных этапов такая фиксация не произойдёт, то на последнем n -м этапе поиск завершится вышеупомянутой процедурой оптимальной равномерной локализации, которая формально не имеет ограничений на время исполнения. Основная задача представляемого далее исследования — расчёт набора временных интервалов $t_1^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, зависящий от характеристик одномодальной ступенчатой плотности распределения разыскиваемого источника, который минимизирует полное время его локализации с заданной точностью.

Вариационная задача, определяющая оптимальную стратегию локализации одномодального случайного импульсно-точечного источника. Покажем, как производится расчёт временного интервала t_1 , задающего предельную (пороговую) длительность первого этапа поиска. При проведении вычислений будут считаться заданными следующие параметры:

— числовые характеристики, описывающие одномодальную ступенчатую функцию $f(x)$;

— мощность λ пуассоновского генератора мгновенных импульсов;

— ширина l_1 окна детектора на первом этапе сканирования.

Если при начальном детектировании самой высокой ступеньки h_1 в течение времени t_1 не фиксируется ни один импульс, то исходная вероятность P_1 переходит в вероятность $P_1(t_1) = P_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}$, а высота ступеньки $h_1 = P_1/d_1$ соответственно преобразуется в величину

$$h_1(t_1) = \frac{P_1(t_1)}{d_1} = \frac{P_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}}{d_1} = h_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}. \quad (1)$$

Падение интегральной площади под ступенькой h_1 за время проведения первого этапа составит величину

$$\Delta = P_1 - P_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1} = P_1(1 - e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}).$$

Такое падение плотности под первой ступенькой h_1 должно, естественно, компенсироваться пропорциональным приростом плотности под всеми остальными ступеньками функции $f(x)$. Коэффициент этого роста K равен:

$$K = \frac{(1 - P_1) + P_1(1 - e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1})}{1 - P_1},$$

так что

$$h_2(t_1) = h_2 \frac{(1 - P_1) + P_1(1 - e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1})}{1 - P_1}. \quad (2)$$

Поскольку искомая продолжительность промежутка времени t_1 соответствует тому моменту, когда мгновенные значения $h_1(t)$ и $h_2(t)$ динамически изменяющейся функции плотности $f_t(x)$ совпадут, то, приравнявая (1) и (2), получаем

$$h_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1} = h_2 \frac{1 - P_1 e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}}{1 - P_1}.$$

Отсюда определяется величина $k = e^{-\lambda(l_1/d_1)t_1}$, задающая такое понижение вероятности $P_1(t_1)$, при котором плотности $h_1(t_1)$ и $h_2(t_1)$ выравниваются:

$$k = \frac{h_2}{h_1(1 - P_1) + h_2 P_1}.$$

Тем самым найден временной порог

$$t_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1}{l_1} \ln \frac{h_1(1 - P_1) + h_2 P_1}{h_2}, \quad (3)$$

задающий длительность осмотра-детектирования наивысшей ступеньки h_1 , по истечении которого (и при обязательном отсутствии зафиксированных импульсов) алгоритм должен

быть перестроен на второй этап локализации, в котором поиск источника будет вестись уже в объединённом сегменте $d_1^{(2)} = d_1 + d_2$.

В данной работе поставлена задача построения физически реализуемого алгоритма локализации случайного импульсно-точечного источника, имеющего одномодальную ступенчатую плотность распределения $f(x)$. Идея алгоритма заключается в том, что в процессе локализации осуществляется поэтапное выравнивание исходной плотности распределения вероятности разыскиваемого источника по всему интервалу поиска. При этом возможны два варианта. Первый характеризуется тем, что ни на одном из предварительных этапов детектору не удаётся зафиксировать ни одного импульса, в результате чего исходная ступенчатая функция плотности полностью выравнивается на всём интервале поиска, так что дальнейшая задача сводится к построению многоэтапной процедуры локализации равномерно распределённого импульсного источника. Во втором случае на одном из предварительных этапов должна произойти фиксация детектором сигнального импульса, после чего дальнейший поиск сводится к стандартному алгоритму оптимальной по времени локализации равномерно распределённого источника, но уже не на всём поисковом интервале, а лишь внутри сегмента, на котором этот импульс был зафиксирован.

Следующий шаг в нашем рассмотрении — постановка вариационной задачи, решение которой полностью определит оптимальные параметры физически реализуемой процедуры локализации одномодального случайного импульсно-точечного источника. Без ограничения общности можно считать, что представленная на рисунке функция априорной плотности распределения вероятности разыскиваемого источника $f(x)$ задана на интервале $(0, 1)$, а требуемая точность локализации ε удовлетворяет условию $0 < \varepsilon < 1$ (при несоблюдении этих ограничений проблема решается стандартной нормировкой абсолютной точности ε на длину поискового интервала L).

Прежде чем приступить к уточнению основной задачи, формализуем процесс реформатирования поискового алгоритма при его переходе с i -го на очередной $(i + 1)$ -й этап. Для этого необходимо рассчитать вспомогательные величины

$$K^{(i)} = \frac{h_1^{(i)}}{(1 - P_1^{(i)})h_1^{(i)} + P_1^{(i)}h_2^{(i)}} = \frac{1}{(1 - P_1^{(i)}) + P_1^{(i)}h_2^{(i)}/h_1^{(i)}};$$

$$k^{(i)} = \frac{h_2^{(i)}}{(1 - P_1^{(i)})h_1^{(i)} + P_1^{(i)}h_2^{(i)}} = \frac{1}{(1 - P_1^{(i)})h_1^{(i)}/h_2^{(i)} + P_1^{(i)}}, \quad (4)$$

с применением которых определяются параметры, характеризующие изменившуюся функцию плотности распределения вероятности $f^{(i+1)}(x)$:

$$n^{(i+1)} = n^{(i)} - 1;$$

$$P_1^{(i+1)} = P_1^{(i)}k^{(i)} + P_2^{(i)}K^{(i)}; \quad P_m^{(i+1)} = P_{m+1}^{(i)}K^{(i)}, \quad m = \overline{2, n^{(i+1)}};$$

$$d_1^{(i+1)} = d_1^{(i)} + d_2^{(i)}; \quad d_m^{(i+1)} = d_{m+1}^{(i)}, \quad m = \overline{2, n^{(i+1)}};$$

$$h_m^{(i+1)} = P_m^{(i+1)}/d_m^{(i+1)}, \quad m = \overline{1, n^{(i+1)}}.$$
(5)

Пороговое время $t_1^{(i+1)}$ для максимальной продолжительности $(i + 1)$ -го этапа задаётся выражением

$$t_1^{(i+1)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(i+1)}}{l_1^{(i+1)}} \ln \frac{h_1^{(i+1)}(1 - P_1^{(i+1)}) + h_2^{(i+1)}P_1^{(i+1)}}{h_2^{(i+1)}} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(i+1)}}{l_1^{(i+1)}} \ln \frac{1}{k^{(i+1)}}. \quad (6)$$

Наличие соотношений (4)–(6) даёт возможность в явном виде представить полное время локализации разыскиваемого источника. В принципе, это можно сделать стандартным путём, представив подлежащее оптимизации время в виде

$$\langle \tau \rangle = \sum_{i=1}^n P_i \langle \tau_i \rangle \Rightarrow \min, \quad (7)$$

где P_i — априорная вероятность того, что источник расположен в сегменте с номером i , $\langle \tau_i \rangle$ — полное усреднённое время локализации источника в предположении, что он находится в i -м сегменте. Однако в нашем случае полное время локализации удобнее разбить на компоненты не по принадлежности разыскиваемого объекта к сегменту его размещения, как это сделано в (7), а по тому, на какой этап приходится момент первой фиксации импульса от объекта. Удобство от такого переформатирования соотношения (7) обеспечивается тем, что полное время локализации случайного источника напрямую задаётся номером этапа, на котором фиксируется первый импульс вне зависимости от номера сегмента, к которому принадлежит разыскиваемый объект. Поэтому подлежащее минимизации полное время локализации объекта удобнее записать в виде соотношения

$$\langle \tau \rangle = \sum_{j=1}^n Q_j \langle T_j \rangle \Rightarrow \min. \quad (8)$$

Здесь Q_j — усреднённая по всем возможным сегментам размещения разыскиваемого источника априорная вероятность того, что первая фиксация импульса произойдёт на этапе поиска с номером j ; $\langle T_j \rangle$ — полное время локализации источника при условии, что первая фиксация импульса происходит на этапе с номером j . Для нахождения вероятностей Q_j сначала необходимо рассчитать матрицу Q , каждый элемент которой q_{ij} представляет собой вероятность того, что при условии размещения разыскиваемого импульсного источника в сегменте i первый регистрируемый детектором импульс придёт на j -й этап поиска. В табл. 1 приведена i -я строка такой матрицы, которая из-за ограничений на длину визуализируемой строки представлена в транспонированном виде. В качестве короткого комментария заметим, что случайный источник, расположенный в сегменте i , не может быть зафиксирован ранее i -го этапа, поэтому для $j = \overline{1, i-1}$ все вероятности $q_{ij} = 0$. Каждый из представленных коэффициентов $k^{(i)}$ соответствует вероятности того, что на i -м этапе за время $t_1^{(i)}$, являющееся пороговым для i -го этапа, не будет зафиксировано ни одного импульса. А вот величина $1 - k^{(i)}$, являющаяся первым элементом приводимой i -й строки и отвечающая в матрице вероятностей за элемент q_{ii} , представляет собой вероятность противоположного события, характеризующегося тем, что на i -м этапе такая фиксация обязательно произойдёт. Следующий элемент $q_{ii+1} = k^{(i)}(1 - k^{(i+1)})$ показывает, что для наступления события, соответствующего вероятности q_{ii} , необходимо, чтобы на i -м этапе не произошла фиксация импульса, а на следующем $(i + 1)$ -м этапе, наоборот, такая фиксация обязана состояться. Случай, когда ни на одном из $(n - 1)$ предварительных

Таблица 1

Транспонированная i -я строка матрицы Q для условных вероятностей q_{ij} того, что случайный источник из i -го сегмента будет впервые зафиксирован на j -м этапе

$$\begin{aligned}
 q_{i1} &= 0 \\
 q_{i2} &= 0 \\
 &\vdots \\
 q_{ii-1} &= 0 \\
 q_{ii} &= 1 - k^{(i)} \\
 q_{ii+1} &= k^{(i)}(1 - k^{(i+1)}) \\
 q_{ii+2} &= k^{(i)}k^{(i+1)}(1 - k^{(i+2)}) \\
 q_{ii+3} &= k^{(i)}k^{(i+1)}k^{(i+2)}(1 - k^{(i+3)}) \\
 &\vdots \\
 q_{in-2} &= k^{(i)}k^{(i+1)}k^{(i+2)} \dots k^{(n-3)}(1 - k^{(n-2)}) \\
 q_{in-1} &= k^{(i)}k^{(i+1)}k^{(i+2)} \dots k^{(n-2)}(1 - k^{(n-1)}) \\
 q_{in} &= k^{(i)}k^{(i+1)}k^{(i+2)} \dots k^{(n-3)}k^{(n-2)}k^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

этапов не фиксируется ни одного импульса, описывается вероятностью q_{in} , являющейся последним элементом i -й строки.

Теперь, когда алгоритм расчёта условных вероятностей q_{ij} получен, для нахождения величин Q_j остаётся выполнить простую операцию построчного суммирования

$$Q_j = \sum_{i=1}^j q_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Перейдём к вычислению величин $\langle T_j \rangle$ из соотношения (8), каждая из которых в общем случае разбивается на три компоненты: $T_{j,1} = t_1^{(1)} + t_1^{(2)} + \dots + t_1^{(j-1)}$ — суммарную продолжительность всех этапов, завершившихся к моменту фиксации первого импульса и на которых импульс не был зафиксирован; $T_{j,2}$ — среднее время от начала j -го этапа до момента регистрации импульса; $T_{j,3}$ — среднюю продолжительность завершающего этапа поиска, представляющего собой многоэтапную оптимальную процедуру локализации случайного равномерно распределённого источника. Компоненту $T_{j,1}$ дополнительно вычислять не требуется — она определяется соотношениями (3) и (6):

$$T_{j,1} = t_1^{(1)} + t_1^{(2)} + \dots + t_1^{(j-1)} = \sum_{m=1}^{j-1} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(m)}}{l_1^{(m)}} \ln \frac{1}{k^{(m)}} \right).$$

Аналитическое представление компоненты $T_{j,3}$ известно (табл. 2, рассчитанная в [15]):

$$T_{j,3} = \frac{1}{\lambda} \left\langle \tau_{opt}^* \frac{\varepsilon}{L} \right\rangle = \frac{M_{opt}}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{l_1^{(j)}} \right)^{-1/M_{opt}},$$

где M_{opt} — количество этапов в процедуре оптимального поиска равномерно распределённого на интервале $(0, 1)$ случайного импульсного источника, зависящее от требуемой точности локализации.

Таким образом, остаётся отыскать компоненту $T_{j,2}$, которая описывает усреднённое по ансамблю реализаций время, проходящее от начала j -го этапа до момента регистра-

Таблица 2

Параметры оптимального поиска случайного равномерно распределённого импульсного источника для системы с одним приёмным устройством

Требуемая точность локализации (ε/L)	Оптимальное число этапов при заданной точности локализации M_{opt}	Окна обзора приёмной системы на каждом из M_{opt} этапов оптимального поиска $W_m, m = \overline{1, M_{opt}}$	Среднее время локализации $\frac{1}{\lambda} \langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/L) \rangle$
$\frac{1}{4} \leq \frac{\varepsilon}{L} < 1$	1	$W_1 = \varepsilon$	$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-1}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \leq \frac{\varepsilon}{L} \leq \frac{1}{4}$	2	$W_1 = (\varepsilon/L)^{1/2} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)L = \varepsilon$	$\frac{2}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-1/2}$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \leq \frac{\varepsilon}{L} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^6$	3	$W_1 = (\varepsilon/L)^{1/3} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)^{2/3} L$ $W_3 = (\varepsilon/L)L = \varepsilon$	$\frac{3}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-1/3}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\left(\frac{M}{M+1}\right)^{M(M+1)} \leq \frac{\varepsilon}{L} \leq \left(\frac{M-1}{M}\right)^{M(M-1)}$	M	$W_1 = (\varepsilon/L)^{1/M} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)^{2/M} L$ \vdots $W_m = (\varepsilon/L)^{m/M} L$ \vdots $W_M = (\varepsilon/L)^{M/M} L = \varepsilon$	$\frac{M}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-1/M}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{\varepsilon}{L} \rightarrow 0$ $\frac{\varepsilon}{L} \approx e^{-M_\infty}$	$M_\infty \approx -\ln(\varepsilon/L)$	$W_1 = (\varepsilon/L)^{1/M_\infty} L = e^{-1} L$ $W_2 = (\varepsilon/L)^{2/M_\infty} L = e^{-2} L$ \vdots $W_m = (\varepsilon/L)^{m/M_\infty} L = e^{-m} L$ \vdots $W_{M_\infty} = e^{-M_\infty} L = (\varepsilon/L)L = \varepsilon$	$\frac{M_\infty}{\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{-1/M_\infty} \approx$ $\approx -\frac{\ln(\varepsilon/L)}{\lambda} \times$ $\times \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{1/\ln(\varepsilon/L)} =$ $= -\frac{e \ln(\varepsilon/L)}{\lambda}$

ции первого импульса при условии, что на этом этапе импульс достоверно был зафиксирован. Для этого рассмотрим следующий пример. Пусть нам известно, что случайный источник генерирует мгновенные импульсы, интервалы между которыми имеют показательную плотность распределения $g(t) = \mu e^{-\mu t}$, т. е. имеется пуассоновский источник мощностью μ , который наблюдается в течение времени T . Достоверно известно, что за это время было зарегистрировано не менее одного импульса. Вопрос: каково математическое ожидание $\langle \tau \rangle_T$ времени, прошедшего от начала наблюдения до регистрации первого импульса? Ответ: поскольку безусловная вероятность регистрации хотя бы одного им-

пульса на интервале наблюдения длительностью T есть $\int_0^T g(t) dt = 1 - e^{-\mu T}$, то условная плотность распределения паузы от начала наблюдения до регистрации первого импульса запишется в виде

$$g_T(t) = \begin{cases} \frac{\mu e^{-\mu t}}{1 - e^{-\mu T}}, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Следовательно, среднее время будет равно:

$$\langle \tau \rangle_T = \int_0^{\infty} t g_T(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-\mu T}} \int_0^T t \mu e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu} - T \frac{e^{-\mu T}}{1 - e^{-\mu T}}. \quad (9)$$

Возвращаясь к задаче отыскания среднего времени $T_{j,2}$, проходящего от начала j -го этапа до момента регистрации первого импульса, нужно в соотношение (9) подставить $\lambda l_1^{(j)}/d_1^{(j)}$ вместо μ и $t_1^{(j)}$ вместо T . В результате получим

$$T_{j,2} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(j)}}{l_1^{(j)}} - t_1^{(j)} \frac{e^{-\lambda l_1^{(j)} t_1^{(j)} / d_1^{(j)}}}{1 - e^{-\lambda l_1^{(j)} t_1^{(j)} / d_1^{(j)}}}. \quad (10)$$

С учётом (6) окончательное выражение для компоненты $T_{j,2}$ примет вид

$$T_{j,2} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(j)}}{l_1^{(j)}} - t_1^{(j)} \frac{k^{(j)}}{1 - k^{(j)}} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1^{(j)}}{l_1^{(j)}} \left(1 - \frac{k^{(j)}}{1 - k^{(j)}} \ln \frac{1}{k^{(j)}} \right). \quad (11)$$

В результате вариационная задача (8), определяющая оптимальную стратегию локализации случайного импульсно-точечного источника с одномодальным ступенчатым распределением, сводится к минимизации по параметрам $l_1^{(j)}$, $j = \overline{1, n-1}$, выражения

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle = & \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{\lambda} \left[\sum_{m=1}^{j-1} \left(\frac{d_1^{(m)}}{l_1^{(m)}} \ln \frac{1}{k^{(m)}} \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \delta_{jn}) \left(\frac{d_1^{(j)}}{l_1^{(j)}} \left(1 - \frac{k^{(j)}}{1 - k^{(j)}} \ln \frac{1}{k^{(j)}} \right) \right) + \langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/l_1^{(j)}) \rangle \right] \Rightarrow \min. \end{aligned} \quad (12)$$

Входящие в (12) величины q_{ij} , $d_1^{(m)}$, $k^{(m)}$ не зависят от переменных $l_1^{(j)}$, $j = \overline{1, n-1}$, и могут быть рассчитаны заранее; мощность источника λ и точность локализации ε известны; среднее время исполнения процедуры оптимального поиска равномерно распределённого источника $\langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/l_1^{(j)}) \rangle$ определяется стандартно в соответствии с табл. 2. Два небольших уточнения касаются особенностей проведения заключительного n -го этапа поиска, который может понадобиться в том случае, если не удастся зафиксировать импульс ни на одном из начальных $n-1$ этапов. Первое уточнение относится к множителю $(1 - \delta_{jn})$, где δ_{jn} —

символ Кронекера. Присутствие этого множителя в выражении (12) объясняется тем, что на n -м этапе сразу по окончании $(n - 1)$ -го этапа осуществляется процедура оптимальной локализации равномерно распределённого сигнального источника, без проведения дополнительного сокращённого этапа, заканчивающегося фиксацией импульса. Второе уточнение тоже касается заключительного n -го этапа. Поскольку на нём детектируется весь поисковый интервал $(0, 1)$, то формально следует положить $l_1^{(n)} = d_1^{(n)} = 1$.

Прежде чем перейти к отысканию аналитического решения оптимизационной задачи (12), нам потребуется провести ряд преобразований. Сначала перепишем соотношение (12) в эквивалентной форме, упорядочив все слагаемые в соответствии с варьируемыми параметрами $l_1^{(s)}$, $s = \overline{1, n - 1}$:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{l_1^{(j)}} A^{(s)} + \sum_{s=1}^n Q_s \langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/l_1^{(s)}) \rangle \right) \Rightarrow \min. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение

$$A^{(s)} = d_1^{(s)} \ln \frac{1}{k^{(s)}} \sum_{j=s+1}^n Q_j + d_1^{(s)} \left(1 - \frac{k^{(s)}}{1 - k^{(s)}} \ln \frac{1}{k^{(s)}} \right),$$

причём все входящие в $A^{(s)}$ и Q_s величины не зависят от переменных $l_1^{(s)}$, $s = \overline{1, n - 1}$, и могут быть рассчитаны заранее. Проведение строгой оптимизационной процедуры в отношении выражения (13) затрудняется достаточно сложной зависимостью среднего времени оптимального поиска $\langle \tau_{opt}^* \rangle$ от требуемой точности локализации $\varepsilon/l_1^{(s)}$. Поэтому при решении прикладных задач, в которых возникает необходимость минимизации среднего времени обнаружения и локализации малоразмерных импульсных источников, может быть рекомендовано приближение из табл. 2, описывающее функцию $\langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/l_1^{(s)}) \rangle$ в асимптотике, т. е. при высоких требованиях к точности локализации:

$$\langle \tau_{opt}^*(\varepsilon/L) \rangle = -e \ln(\varepsilon/L). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), продифференцируем и приравняем к нулю все частные производные (13) по переменным $l_1^{(s)}$, $s = \overline{1, n - 1}$. В результате получим оптимальный набор

$$l_{1,opt}^{(s)} = \frac{1}{e} \frac{A^{(s)}}{Q_s}, \quad s = \overline{1, n - 1}, \quad (15)$$

минимизирующий среднее время локализации (13). Таким образом, вариационная задача (12) решена: найдены оптимальные размеры сканирующих окон на каждом из $n - 1$ предварительных этапов. Оптимальная пороговая продолжительность сканирования на каждом из них определяется соотношением (6). Завершается поиск всегда многоэтапной процедурой оптимальной локализации равномерно распределённого случайного импульсного источника, которая обеспечивает достижение требуемой точности ε .

Другим эффективным методом локализации, достаточно простым в реализации и при этом близким по времени к оптимальному алгоритму, может быть поисковая схема, в соответствии с которой следует отказаться от поиска оптимальных размеров сканирующих окон детектора, а вместо этого на первом этапе запрограммировать приёмное устройство на осмотр целиком самой высокой ступеньки без фактического сканирования. Затем по прошествии определённого времени (оно может быть легко рассчитано заранее), когда значения исходной функции $f(x)$ в ступеньках с самой высокой и второй по величине

плотностью сравниваются, обе ступеньки объединяются в одну и процедура осмотра уже расширенной ступеньки шириной $d_1^{(2)} = d_1^{(1)} + d_2^{(1)}$ повторяется. Так продолжается либо до момента фиксации импульса, либо до момента выравнивания плотностей на всём поисковом интервале. В любом случае процесс локализации завершается этапом оптимальной локализации случайного равномерно распределённого импульсного объекта. На самом деле эта процедура является частным случаем описанного выше оптимизированного алгоритма с той лишь разницей, что теперь в вариационной задаче (12) предлагается не искать оптимальные окна (15), а сразу положить для всех варьируемых переменных $l_1^{(j)} = d_1^{(j)}$, $j = \overline{1, n-1}$. Хотя чисто теоретически таким способом организованный упрощённый процесс локализации уступает оптимизированному алгоритму в среднем времени поиска, для большинства стандартных распределений случайных импульсных источников этот проигрыш не может быть значительным по двум причинам. Во-первых, процесс выравнивания плотностей в упрощённом алгоритме протекает быстрее, чем в оптимальном поисковом алгоритме; во-вторых, заключительные этапы локализации у обоих алгоритмов эквивалентны — это оптимальная локализация равномерно распределённого импульсного источника. А выигрывает оптимизированная процедура за счёт того, что у неё точнее учитываются связи между априорным распределением разыскиваемого источника, параметрами оптимального алгоритма локализации равномерно распределённого импульсного объекта и требуемой точностью локализации.

Заключение. Отличительной особенностью предложенных алгоритмов оптимальной локализации случайных импульсно-точечных источников, имеющих многоступенчатую одномодальную плотность распределения вероятности на интервале поиска, является то, что в практических приложениях они могут быть физически реализованы с помощью перемещения односвязной сканирующей апертуры с динамически программируемым размером окна обзора. В перспективе планируется расширить применение построенных оптимальных алгоритмов на двумерный случай. Ещё одним перспективным направлением исследований является построение физически реализуемых алгоритмов локализации случайных импульсно-точечных объектов с помощью приёмных систем с несколькими детекторами.

Финансирование. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00128) и Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация № ААА-А17-117052410034-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Poor H.** An Introduction to Signal Detection and Estimation. New York: Springer-Verlag, 1985. 262 p.
2. **Szegedy C., Toshev A., Erhan D.** Deep neural networks for object detection // Advances in Neural Information Processing Systems. 2013. **26**. P. 1–8.
3. **Cao G., Xie X., Yang W. et al.** Feature-fused SSD: Fast detection for small objects // Computer Vis. and Pattern Recognition. Cornell Univers., 2018. 8 p. URL: arXiv:1709:05054 (дата обращения: 19.08.2020).
4. **Gruppen C., Buvat I.** Handbook of Particle Detection and Imaging. Berlin: Springer, 2011. 1268 p.
5. **Биргер И. А.** Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978. 240 с.
6. **Shannon C. E.** A mathematical theory of communication // The Bell System Technic. Journ. 1948. P. 379–423, 623–656.
7. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965. 524 с.

8. **Zhu X., Wen L., Hobbs G. et al.** Detection and localization of single-source gravitational waves with pulsar timing arrays // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. **449**, N 2. P. 1650–1663.
9. **Weinberg S.** Cosmology. New York: Oxford University Press, 2008. 593 p.
10. **Kirichuk V. S., Mokin K. Yu., Reznik A. L.** Algorithms for processing of series of digital aerospace images based on automatic search for the conjugate points // Pattern Recogn. and Image Analysis. 2001. **11**, N 1. P. 192–194.
11. **Громилин Г. И., Косых В. П., Попов С. А., Стрельцов В. А.** Подавление фона с резкими перепадами яркости в последовательности изображений динамических малоразмерных объектов // Автометрия. 2019. **55**, № 3. С. 3–12. DOI: 10.15372/AUT20190301.
12. **Клочко В. К.** Обнаружение движущихся объектов пассивной сканирующей системой // Автометрия. 2019. **55**, № 1. С. 72–79. DOI: 10.15372/AUT20190110.
13. **Резник А. Л., Ефимов В. М., Соловьев А. А., Торгов А. В.** О безошибочном считывании случайных дискретно-точечных полей // Автометрия. 2012. **48**, N 5. P. 93–103.
14. **Резник А. Л., Тузиков А. В., Соловьев А. А., Торгов А. В.** Оптимальные по быстродействию алгоритмы поиска случайных импульсно-точечных источников для систем с несколькими приёмными устройствами // Автометрия. 2017. **53**, N 3. P. 3–11. DOI: 10.15372/AUT20170301.
15. **Reznik A. L., Tuzikov A. V., Soloviev A. A. et al.** Time-optimal algorithms focused on the search for random pulsed-point sources // Computer Opt. 2019. **43**, N 4. P. 605–610.

Поступила в редакцию 19.08.2020

После доработки 21.10.2020

Принята к публикации 25.10.2020
