

УДК 535.42:681.786

## РАСЧЁТ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЁМНОГО АССИМЕТРИЧНОГО АБСОЛЮТНО ПОГЛОЩАЮЩЕГО КРАЯ ОБЪЕКТА В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ

© Ю. В. Чугуй<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,  
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет,  
630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

<sup>3</sup>Новосибирский государственный технический университет,  
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20  
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

Применительно к размерному контролю 3D-объектов аналитически исследованы особенности формирования в дифракционно-ограниченной проекционной системе изображений объёмного асимметричного абсолютно поглощающего края — основного фрагмента протяжённых (по глубине) пластин постоянной толщины. Изучены структуры и профили интенсивностей в изображениях передней и задней граней объекта соответственно при малых и больших апертурах оптической системы для различных соотношений скоса объекта  $c$ , размера зоны Френеля  $\delta_d \sim \sqrt{\lambda d}$  ( $\lambda$  — длина волны света,  $d$  — толщина объекта) и угловой апертуры оптической системы  $2\theta_0$ . В случае, когда скос  $c \ll \delta_d$ , при большой глубине фокусировки системы имеет место смещение профиля интенсивности в изображении 3D-края, пропорциональное зоне Френеля и величине скоса. Аналитически показано, что при больших скосах ( $c \gg \delta_d$ ) и малых апертурах системы в плоскости, сопряжённой с передней гранью, наблюдается чёткое изображение либо передней грани (задняя грань находится в тени), либо задней грани (передняя грань затенена задней гранью). Получены и исследованы формулы для профиля изображения задней грани в случае значительных объёмных эффектов, когда глубина фокусировки системы много меньше толщины объекта. Результаты расчётов находятся в хорошем согласии с результатами компьютерного моделирования.

*Ключевые слова:* дифракция Френеля и Фраунгофера, фурье-оптика, пространственная фильтрация, изображения и спектры 3D-объектов, объёмный край, 3D размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20200609

**Введение.** Разработка когерентно-оптических систем для бесконтактного контроля трёхмерных (3D) объектов с чёткой теневой проекцией в виде протяжённых (по глубине) пластин постоянной толщины требует создания доступной для практики теории формирования пространственных спектров и изображений в таких системах. Теория должна адекватно описывать дифракционные явления и позволять путём обработки измерительной информации по определённым алгоритмам получать с высокой точностью геометрические характеристики 3D-объектов. Поскольку существующая теория Кирхгофа — Френеля, справедливая для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1], может приводить к значительным погрешностям при применении её к 3D-объектам, а строгие [1, 2] и приближённые [3, 4] подходы для расчёта дифракционных явлений на таких объектах чрезвычайно сложны для инженерных применений, в [5] предложена конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах — сравнительно простая в математическом отношении, физически наглядная и в то же время достаточно точная. Она основана на

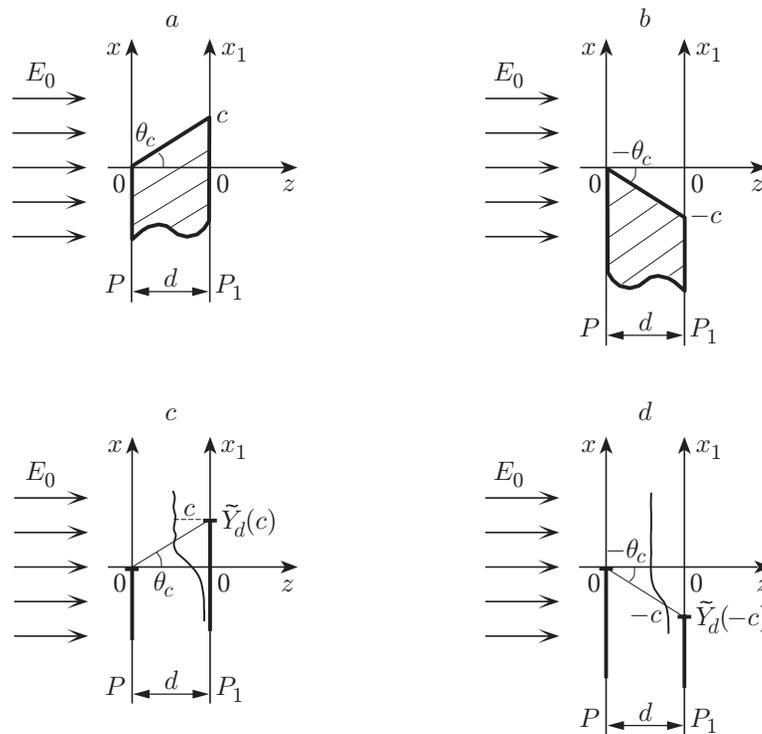


Рис. 1. 3D абсолютно поглощающий край с положительным ( $c > 0$ ) и отрицательным ( $c < 0$ ) скосами: сечения объектов ( $a$ ,  $b$ ) и модели в виде эквивалентных диафрагм ( $c$ ,  $d$ )

модели эквивалентных диафрагм. Теория позволяет при расчётах полей применять приближение Кирхгофа — Френеля [6] и хорошо согласуется с экспериментальными данными. В [7] изучены дифракционные явления на объёмном крае протяжённой пластины симметричного типа, у которой внутренняя плоская поверхность перпендикулярна внешним граням, расположенным перпендикулярно оптической оси. Путём численных расчётов в [8] исследованы дифракционные явления в более общем случае — на протяжённых пластинах асимметричного типа (со скосом). Внутренняя плоская грань у таких объектов не перпендикулярна к их внешним граням.

В предлагаемой работе приведены аналитические расчёты полей в изображениях передней и задней граней указанных объектов. В расчётах использована предложенная в [5] аппроксимация френелевской функции (комплексного интеграла Френеля) в классе элементарных функций, которая описывает дифракционные явления на полуплоскости. Эта аппроксимация была успешно применена при анализе особенностей формирования изображений плоских объектов в пространственно-неинвариантной оптической системе [9], а также при исследовании в аналитическом виде её импульсного отклика [10].

**Модель объёмного абсолютно поглощающего края и оптическая система для формирования и фильтрации его изображений.** Рассматриваемый объект является типичным элементом протяжённых пластин. Исследованию подлежали изображения таких тел с положительными (рис. 1,  $a$ ) и отрицательными (рис. 1,  $b$ ) скосами, которые характеризуют степень асимметрии 3D-объекта. Как показано в [5], модель такого объекта с абсолютно поглощающей внутренней поверхностью можно представить в виде двух полуплоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$  (рис. 1,  $c$ ,  $d$ ). Она может быть

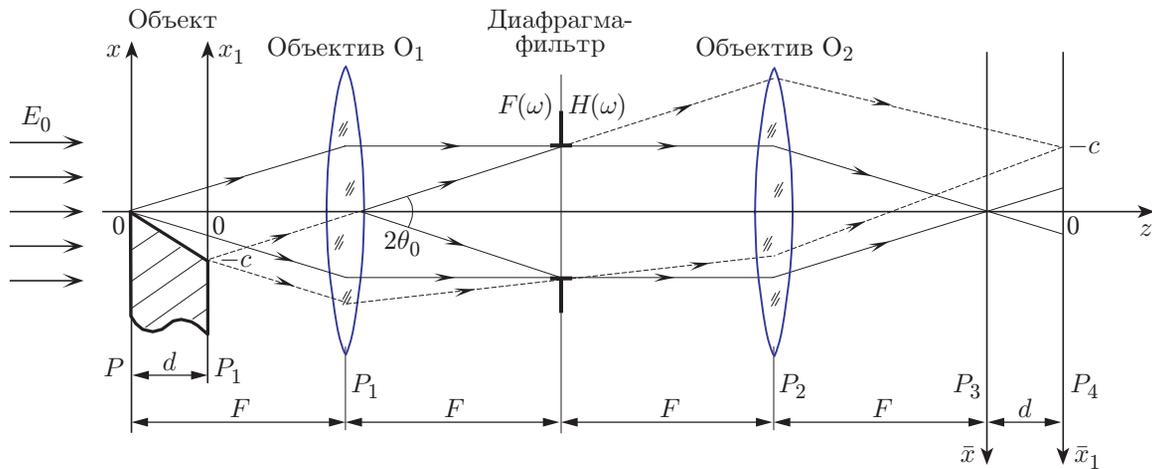


Рис. 2. Схема когерентно-оптической проекционной системы  $4F$  для формирования изображения объектов

охарактеризована следующими двумя граничными функциями:

$$f(x) = Y(x); \quad g(x_1) = Y(x_1 - c). \quad (1)$$

На рис. 2 представлена схема стандартной когерентно-оптической системы  $4F$  для формирования изображений  $3D$ -объектов на базе двух фурье-звеньев [6]. Исходный объект освещается плоской монохроматической волной света с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой света  $E_0$ . Он устанавливается так, чтобы его передняя грань совпадала с передней фокальной плоскостью  $P$  объектива  $O_1$ . Этим объективом в результате прямого преобразования Фурье в задней фокальной плоскости формируется дифракционная картина Фраунгофера  $F(\theta)$  ( $\theta$  — угол дифракции), которая соответствует полю, наблюдаемому в дальней зоне. Полученное поле  $F(\theta)$  фильтруется апертурной диафрагмой-фильтром с угловыми размерами  $2\theta_0$ , которая осуществляет низкочастотную фильтрацию поля  $F(\theta)$ . Результирующее распределение далее объективом  $O_2$  подвергается обратному преобразованию Фурье, в результате которого в задней фокальной плоскости  $P_3$  объектива  $O_2$  формируется отфильтрованное изображение передней грани  $3D$ -края протяжённой пластины, а в плоскости  $P_4$  — изображение её задней грани.

В случае положительного скоса ( $c > 0$ ) задняя грань находится в освещённой области, что приводит к затенению передней грани (см. рис. 1, *a*). И наоборот, при отрицательном скосе ( $c < 0$ )  $3D$ -объекта освещённой является передняя грань, в то время как задняя находится в её тени (см. рис. 1, *b*). С точки зрения геометрической оптики на выходе системы при  $c > 0$  должно формироваться изображение задней грани, а при  $c < 0$  — изображение передней грани. Однако в рамках волновой оптики переход от одного изображения к другому происходит не резко, а постепенно — в пределах некоторой переходной зоны.

Далее установлено, что профиль интенсивности формируемых изображений, а также размер переходной зоны зависят не только от фундаментального параметра  $N = \theta_0/\theta_{кр}$ , но также от отношения скоса  $c$  к размеру зоны Френеля  $\delta_d \sim \sqrt{\lambda d}$  в плоскости  $P_1$  или, другими словами, от отношения угла скоса  $\theta_c = c/d$  к критическому углу дифракции,  $\theta_c/\theta_{кр} = c/\sqrt{\lambda d}$ .

**Формирование и анализ изображений передней грани  $3D$ -края.** Исследуем сначала особенности формирования изображений передней грани  $3D$  абсолютно поглощающего асимметричного края. Будем полагать, что апертура системы  $2\theta_0$  много меньше

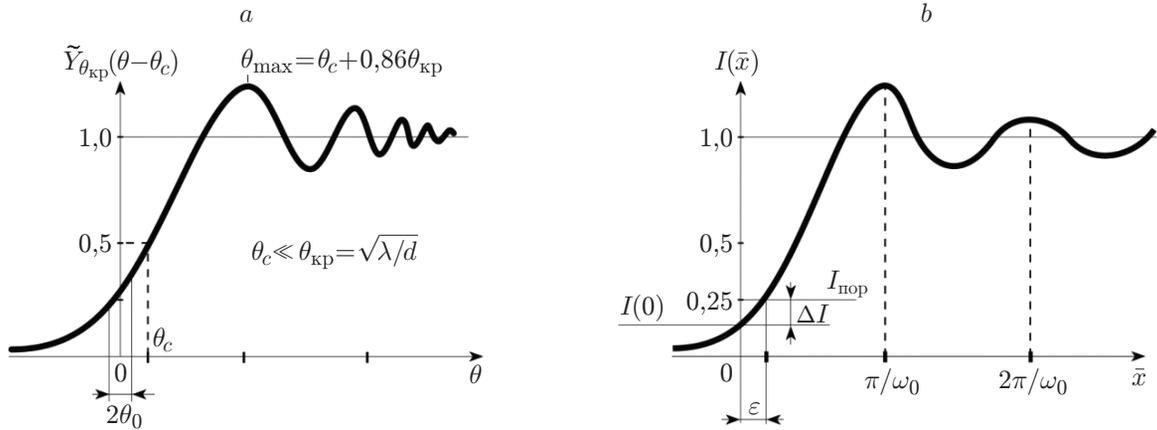


Рис. 3. Формирование изображения передней грани 3D-края с малым скосом  $c \ll \sqrt{\lambda d}$ : смещённая френелевская функция  $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$  на угол скоса  $\theta_c = c/d \ll \theta_{кр}$  (а) и профиль интенсивности изображения 3D-края при  $c \ll \sqrt{\lambda d}$  (б)

критического угла дифракции  $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$ , при котором объёмные свойства 3D-объекта проявляются в полной мере. Иными словами, в этом случае глубина фокусировки системы  $\Delta d = \lambda/\theta_0^2$  много больше толщины объекта:  $\Delta d = \lambda/\theta_0^2 \gg d$ . В дальнейшем степень проявления объёмных эффектов в спектрах и изображениях 3D-объектов будем характеризовать параметром  $N = \theta_{кр}/\theta_0$ . При  $N \gg 1$  эти эффекты слабы, а при  $N \ll 1$  они значительны.

Воспользуемся полученной в [5] формулой для поля в дальней зоне  $F(\theta)$  (нормированного на  $E_0$ ) 3D асимметричного абсолютно поглощающего края:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1}[\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2}], \quad (2)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака,  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $\tilde{Y}_d(x) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi) e^{jk(x-\xi)^2/(2d)} d\xi$  и

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta) = \frac{e^{-j\pi/4}}{\theta_{кр}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\varphi) e^{jk(\theta-\varphi)^2 d/2} d\varphi$$
 — интегралы Френеля в комплексном виде (далее

для краткости — френелевские функции) в координатном и угловом представлениях соответственно [7, 11, 12]. Первый член в (2) описывает проходящую (недифрагированную) волну света, второй — первичную дифракцию на передней грани с последующим виньетированием дифрагированной волны задней гранью, а третий член соответствует вторичной дифракции света на задней грани.

Исследуем далее особенности формирования изображений двух типов 3D-объектов: с малым скосом по сравнению с размером зоны Френеля, т. е. при  $c \ll \sqrt{\lambda d} = \delta_d$  ( $\theta_c/\theta_{кр} \ll 1$ ), и с большим  $c$ , т. е. при  $c \gg \delta_d$  ( $\theta_c \gg \theta_{кр}$ ).

В первом случае при малых угловых апертурах  $\theta_0 \ll \theta_{кр}$  ( $N = \theta_{кр}/\theta_0 \gg 1$ ) объёмные эффекты, как известно, выражены слабо [7]. Это позволяет френелевские функции  $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$  и  $\tilde{Y}_d(c)$  линеаризировать следующим образом (рис. 3, а):

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) = 0,5 + e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c)/\theta_{кр},$$

$$\tilde{Y}_d(c) = 0,5 + e^{-j\pi/4} c/\delta_d = 0,5 + e^{-j\pi/4} \theta_c/\theta_{кр}.$$

После подстановки разложений в выражение (2) для поля  $F(\theta)$  с учётом  $c \ll \delta_d$  можно получить следующее выражение:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1} - e^{j\pi/4} \delta_d/(2\pi) - 0,5c. \quad (3)$$

Используя (3), нетрудно найти распределение амплитуды поля  $f_{\omega_0}(\bar{x})$  в изображении передней грани после фильтрации спектра апертурной диафрагмой (см. рис. 2), выступающей в качестве низкочастотного фильтра пространственных частот с передаточной функцией  $H(\omega) = \text{Rect}(\omega/(2\omega_0))$ , где  $\omega = k\theta$  — пространственная частота, а  $2\omega_0$  — ширина полосы пропускаемых фильтром частот:

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega) e^{j\omega\bar{x}} d\omega = \Phi_{\omega_0}(\bar{x}) - \left( \frac{e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda d}}{2\pi} + \frac{1}{2} c \right) \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}}, \quad (4)$$

где функция  $\Phi_{\omega_0}(\bar{x}) = Y(\bar{x}) \otimes \sin(\omega_0\bar{x})/(\pi\bar{x})$  описывает распределение амплитуды поля в дифракционно-ограниченном изображении полуплоскости, связанное с интегральным си-

нусом  $\text{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$   $\Phi_{\omega_0}(x) = 0,5 + \text{si}(\omega_0 x)/\pi$  [11]. Соответственно распределение ин-

тенсивности света  $I(\bar{x})$  (нормированное на  $I_0 = E_0^2$ ) в плоскости  $P_3$  системы согласно (4) изменяется по закону

$$I(\bar{x}) = |f_{\omega_0}(\bar{x})|^2 = \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}) - \frac{\delta_d}{\sqrt{2\pi}} \Phi_{\omega_0}(\bar{x}) \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}} - c\Phi_{\omega_0}(\bar{x}) \frac{\sin(\omega_0\bar{x})}{\pi\bar{x}}. \quad (5)$$

Определим теперь смещение профиля интенсивности  $I(\bar{x})$  в изображении края (рис. 3, *b*), воспользовавшись тем, что значение (нормированное) интенсивности в точке  $\bar{x} = 0$ , соответствующей геометрической границе полуплоскости ( $d = 0$ ), равно  $I_{d=0}(\bar{x} = 0) = \Phi_{\omega_0}^2(0) = 0,25$  (именно эта величина ( $I_{\text{пор}} = 0,25$ ) положена в основу порогового алгоритма нахождения геометрического положения границы объекта). Из выражения (5) нетрудно получить значение интенсивности  $I(0)$  для протяжённого края ( $d \neq 0$ ):

$$I(0) \approx 0,25 - \frac{\delta_d\omega_0}{2\pi^2\sqrt{2}} - \frac{c\omega_0}{2\pi}.$$

Для того чтобы найти смещение профиля  $\varepsilon$  изображения 3D-края, учтём, что в точке  $x = 0$  производная  $dI/dx$  равна  $I'_x(x = 0) = \omega_0/\pi$  [6]. Так как  $\varepsilon = \Delta I/I'_x$  (см. рис. 3, *b*), где  $\Delta I = I(0) - I_{d=0}(0)$ , то для приведённого смещения  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon/\sqrt{\lambda d}$  получаем следующую формулу:

$$\hat{\varepsilon} = -0,11 - 0,5c/\sqrt{\lambda d} = -0,11 - 0,5\hat{c}, \quad (6)$$

где приведённый скос  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$ . Таким образом, при нахождении смещения края известным пороговым алгоритмом возникает систематическая погрешность  $\varepsilon$ , которая содержит постоянную составляющую  $\varepsilon_0 = -0,11\sqrt{\lambda d}$ , приводящую к смещению границы 3D-объекта в освещённую область (в конечном счёте, к уменьшению размера объекта), а также переменную  $\varepsilon_c$ , прямо пропорциональную скосу  $c$ . Если, например, выбрать толщину объекта  $d = 1$  мм, а длину волны  $\lambda = 0,5$  мкм, то постоянное смещение края  $\varepsilon_0 = -2,5$  мкм.

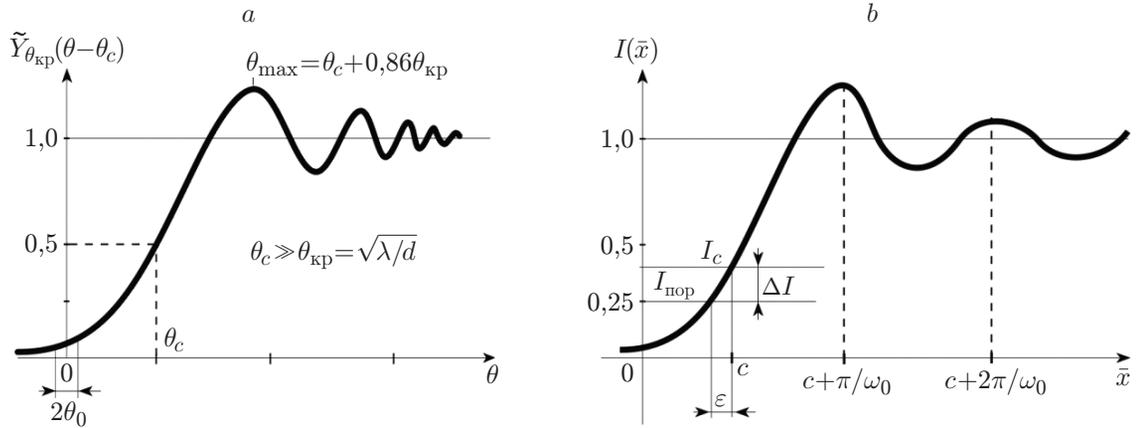


Рис. 4. Формирование изображения передней грани 3D-края с большим положительным скосом  $c \gg \sqrt{\lambda d}$ : смещённая френелевская функция  $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$  на угол скоса  $\theta_c \gg \theta_{кр} \gg \theta_0$  (a) и профиль интенсивности изображения 3D-края при  $c \gg \sqrt{\lambda d}$  (b)

Что касается поля в плоскости  $P_4$  изображения задней грани, то, как показывают расчёты [7], при слабой объёмности ( $N = \theta_{кр}/\theta_0 \gg 1$ ) профили интенсивностей в изображениях передней и задней граней практически совпадают.

Изучим далее структуру поля  $F(\theta)$  в случае большого положительного скоса с 3D-объекта, когда его величина значительно больше размера зоны Френеля (см. рис. 1, a, c), т. е. при  $c \gg \sqrt{\lambda d}$  ( $\theta_c \gg \theta_{кр}$ ). Для этих целей используем аппроксимацию френелевской функции  $\tilde{Y}_d(x)$ , предложенную в [5]. При координатном и угловом представлениях она имеет следующий вид:

$$\tilde{Y}_d(x) \approx Y(x) - \frac{0,5 e^{jkx^2/2d}}{\beta e^{-j\pi/4} x/\sqrt{\lambda d} + \text{sgn } x},$$

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) \approx Y(\theta - \theta_c) - \frac{0,5 e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\beta e^{-j\pi/4} (\theta - \theta_c)/\theta_{кр} + \text{sgn } (\theta - \theta_c)},$$

где  $\text{sgn}(t)$  — знаковая функция [6], а параметр  $\beta = 2$  при  $x \ll \sqrt{\lambda d}$  и  $\beta \rightarrow \pi$  при  $x \gg \sqrt{\lambda d}$ . Полагая по-прежнему, что  $N \gg 1$ , выражение  $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$  с учётом  $\theta_0 \ll \theta_c$  (рис. 4, a) можно заметно упростить:

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) = -\frac{e^{j\pi/4} e^{-jk\theta c} e^{jk\theta_c^2/2d}}{2\pi(\theta - \theta_c)/\theta_{кр}} \approx \frac{e^{j\pi/4} e^{-jk\theta c} e^{jk\theta_c^2 d/2}}{2\pi\theta_c} \theta_{кр} \left(1 + \frac{\theta}{\theta_c}\right).$$

Подставляя приведённые выше выражения в формулу (2), для поля в дальней зоне  $F(\theta)$  можно получить следующее выражение:

$$F(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{e^{-jk\theta c}}{jk\theta} + \frac{\delta_d}{4\pi^2 \hat{c}^2} e^{-j\pi/4} e^{jk c^2/2d} e^{-jk\theta c}. \quad (7)$$

Видно, что дифракционное поле в дальней зоне содержит три члена, два из которых соответствуют спектру полуплоскости, смещённой на величину  $c$ , а третий отражает влияние

объёмности объекта на его спектр, причём амплитуда этого члена уменьшается довольно быстро: обратно пропорционально квадрату скоса  $c$ .

Распределения амплитуды и интенсивности поля в плоскости  $P_3$  изображения передней грани формируемого рассматриваемой дифракционно-ограниченной системой (см. рис. 2) имеют вид

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \Phi_{\omega_0}(\bar{x} - c) + \frac{\delta_d}{4\pi^3 \hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} - c)]}{(\bar{x} - c)} e^{-j\pi/4} e^{jk^2/2d}, \quad (8)$$

$$I(\bar{x}) = |f_{\omega_0}(\bar{x})|^2 \approx \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x} - c) + \frac{\delta_d}{2\pi^3 \hat{c}^2} \Phi_{\omega_0}(\bar{x} - c) \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} - c)]}{\bar{x} - c} \cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4). \quad (9)$$

При большом положительном скосе ( $c \gg \delta_d$ ) действующим краем оказывается граница задней грани и наблюдается небольшое смещение профиля её изображения (второй член), которое заметно уменьшается при увеличении скоса  $\hat{c}$ .

Значение интенсивности  $I(\bar{x})$  в точке  $\bar{x} = c$ , соответствующей геометрическому положению границы задней грани в её изображении (рис. 4,  $b$ ), с учётом  $\Phi_{\omega_0}(\bar{x} = c) = 0,5$  для значения интенсивности  $I(\bar{x} = c)$  нетрудно получить следующее выражение:

$$I(\bar{x} = c) = 0,25 + \frac{\delta_d \omega_0}{4\pi^3 \hat{c}^2} \cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4). \quad (10)$$

В этом случае при  $c \gg \sqrt{\lambda d}$  приведённая погрешность  $\varepsilon$  определения границы  $\bar{x} = c$  при использовании порогового алгоритма имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{I}(c) - 0,25}{\omega_0/\pi} = \frac{\cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4)}{4\pi^2 \hat{c}^2} \leq \frac{1}{4\pi^2 \hat{c}^2}. \quad (11)$$

Изменение погрешности в зависимости от положения края носит колебательный характер, причём, как и следовало ожидать, эти колебания быстро затухают. Если выбрать, например,  $d = 1$  мм,  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d} = 3$ , а  $\lambda = 0,5$  мкм ( $\delta = \sqrt{\lambda d} = 22,4$  мкм), то погрешность определения положения заднего края согласно (11) равна  $\varepsilon = 0,06$  мкм, т. е. пренебрежимо мала.

Исследуем далее случай больших отрицательных скосов  $c < 0$ , когда  $|c| \gg \sqrt{\lambda d}$ . Используя вышеприведённый подход нахождения поля в изображении передней грани при  $N \gg 1$ , нетрудно найти распределение амплитуды поля  $f_{\omega_0}(\bar{x})$  в случае больших отрицательных скосов:

$$f_{\omega_0}(\bar{x}) = \Phi_{\omega_0}(\bar{x}) + \frac{e^{-j\pi/4} e^{jk^2/2d} \delta_d}{4\pi^3 \hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} + c)]}{\bar{x} + c}. \quad (12)$$

Первый член  $\Phi_{\omega_0}(\bar{x})$  в полученном изображении описывает профиль интенсивности в дифракционно-ограниченном изображении передней грани, описываемой функцией  $Y(x)$ , которая соответствует полуплоскости с границей в точке  $x = 0$ . Влияние на это поле задней грани, сдвинутой в тень (относительно оптической оси) на величину  $-c$ , представлено вторым членом, вклад которого в поле  $\hat{f}_{\omega_0}(\bar{x})$  при увеличении скоса  $c$  (как и в случае  $c > 0$ ) падает обратно пропорционально квадрату  $\hat{c}$ . Более того, в этом случае имеет место дополнительное уменьшение этого вклада в соответствии с поведением функции  $\sin[\omega_0(\bar{x} - c)]/(\bar{x} - c)$ .

Распределение интенсивности в изображении  $3D$ -объекта согласно (12) имеет вид

$$I(\bar{x}) \approx \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}) + \frac{\delta_d}{2\pi^3\hat{c}^2} \Phi_{\omega_0}(\bar{x}) \frac{\sin[\omega_0(\bar{x} + c)]}{\bar{x} + c}, \quad (13)$$

а погрешность определения границы передней грани (в точке  $\bar{x} = c$ ) изменяется по закону

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\pi\Delta I}{\omega_0} = \pi \frac{I(0) - 0,25}{\omega_0} = \frac{\sin(\omega_0 c)}{4\pi^2\hat{c}^2\omega_0 c}. \quad (14)$$

Из сравнения формул (11) и (14) следует, что влияние задней грани на изображение передней грани, благодаря множителю  $\sin(\omega_0 c)/(\omega_0 c)$ , слабее, чем в случае положительного скоса.

**Формирование и анализ изображения задней грани  $3D$ -объекта.** Исследуем особенности формирования изображения задней грани  $3D$  абсолютно поглощающего асимметричного края в дифракционно-ограниченной системе, когда объёмные эффекты выражены достаточно сильно:  $\theta_0 \gg \theta_{кр}$  ( $N \ll 1$ ). Будем исходить из известного выражения для поля задней грани [7]

$$g(x_1) = \tilde{Y}_d(x_1)Y(x_1 - c). \quad (15)$$

Рассмотрим два случая, когда скос  $c$  достаточно мал по сравнению с размером зоны Френеля ( $c \ll \sqrt{\lambda d}$  или  $\theta_c \ll \theta_{кр}$ ) и когда он значителен ( $c \gg \sqrt{\lambda d}$  или  $\theta_c \gg \theta_{кр}$ ).

При малых скосах, воспользовавшись линейной аппроксимацией френелевской функции  $\tilde{Y}_d(x_1)$  в окрестности  $x_1 = 0$ , а именно  $\tilde{Y}_d(x_1) = 0,5 + e^{-j\pi/4} x_1/\sqrt{\lambda d}$  (рис. 5), поле в плоскости  $P_1$  можно представить в виде

$$g(x_1) = (0,5 + e^{-j\pi/4} x_1/\sqrt{\lambda d})Y(x_1 - c). \quad (16)$$

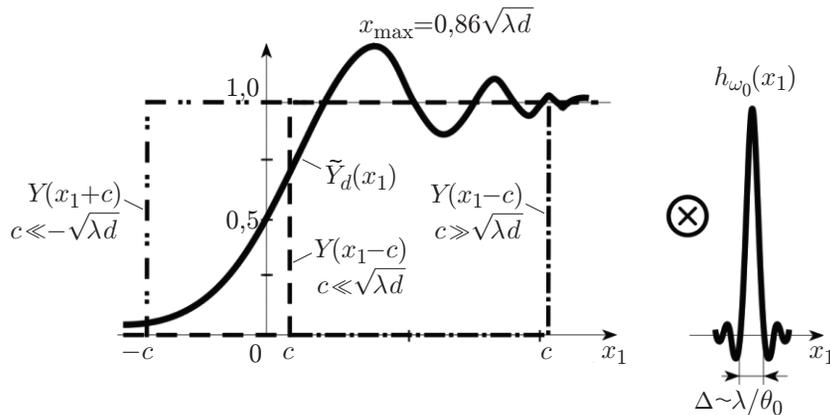


Рис. 5. Формирование изображения задней грани  $3D$ -края при различных скосах  $c$ : исходное поле в плоскости задней грани  $P_1$  при малых скосах  $c \ll \sqrt{\lambda d}$ , при больших положительных скосах  $c \gg \sqrt{\lambda d}$  и больших отрицательных скосах  $c < 0$  ( $|c| \gg \sqrt{\lambda d}$ ),  $\tilde{Y}_d(x_1)$  — френелевское изображение передней грани в плоскости  $P_1$  (см. рис. 2),  $Y(x_1 - c)$  и  $Y(x_1 + c)$  — ступенчатые функции, смещённые на величину  $c$  и  $-c$ ,  $h_{\omega_0}(x_1)$  — импульсный отклик дифракционно-ограниченной системы

Используя выражение, для распределений амплитуды и интенсивности поля в дифракционно-ограниченном изображении задней грани (16), можно получить следующие выражения:

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = 0,5\Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 - c) + \frac{e^{-j\pi/4}\bar{x}_1}{\delta_d} \Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 - c) - \frac{e^{j\pi/4} \cos[\omega_0(\bar{x}_1 - c)]}{\pi\delta_d\omega_0}, \quad (17)$$

$$I(\bar{x}_1) \approx 0,25\Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}_1 - c) + \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{2}\delta_d} \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}_1 - c) - \frac{\Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 - c) \cos[\omega_0(\bar{x}_1 - c)]}{\pi\sqrt{2}\delta_d\omega_0}. \quad (18)$$

Важно подчеркнуть, что полученные распределения справедливы при сформулированном нами ранее условии:  $\theta_0 \gg \theta_{кр}$  ( $N \ll 1$ ). Это означает, что характерный размер импульсного отклика системы  $\Delta \sim \lambda/\theta_0$  много меньше размера зоны Френеля, т. е.  $\Delta \ll \delta = \sqrt{\lambda d}$  (см. рис. 5). В этом случае глубина фокусировки системы  $\Delta z$  много меньше толщины объекта  $d$ :  $\Delta z \sim \lambda/\theta^2 \ll d$ .

Если теперь принять во внимание, что значение интенсивности света в точке  $\bar{x}_1 = c$  равно

$$I(c) \approx 0,0625 + \frac{c}{4\sqrt{2}\delta_d} + \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\delta_d\omega_0}, \quad (19)$$

то для смещения края (и соответственно погрешности  $\varepsilon$ ) можно получить выражение

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda d}} = -0,093N + \frac{\hat{c}}{8\sqrt{2}} N + \frac{N^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \approx -0,093N + 0,09\hat{c}N. \quad (20)$$

Так как в рассматриваемом случае скос  $\hat{c} \ll 1$ , то основной вклад в погрешность согласно (20) даёт первый член, не зависящий от скоса. Его вклад в погрешность можно заметно снизить, если выбрать порог не на уровне 0,25 (как это мы делали до этого), а на уровне 0,0625, который учитывает постоянную составляющую (равную 0,5) в распределении  $\tilde{Y}_d(x)$ , освещающем заднюю грань.

Исследуем далее случай 3D-края с большим положительным скосом ( $c \gg \sqrt{\lambda d}$ ). С учётом того что аппроксимированная френелевская функция в этом случае может быть представлена в виде (см. рис. 5)

$$\tilde{Y}_d(x_1) \approx Y(x_1) - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi x_1} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d},$$

для распределений амплитуды  $g_{\omega_0}(x)$  и интенсивности поля  $I(\bar{x})$  в дифракционно-ограниченном изображении задней грани, как показывают расчёты, можно получить следующие выражения:

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = \Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 - c) - \frac{\delta_d}{2\pi} e^{j\pi/4} \frac{e^{jk\bar{x}_1^2/2d}}{\bar{x}_1} \Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 - c), \quad (21)$$

$$I(\bar{x}_1) = |g_{\omega_0}(\bar{x}_1)|^2 = \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}_1 - c) \left[ 1 - \frac{\delta_d}{\pi\bar{x}_1} \cos\left(\frac{k\bar{x}_1^2}{2d} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (22)$$

При этом значение интенсивности поля в точке  $\bar{x}_1 = c$  равно

$$I(\bar{x}_1 = c) = 0,25 - \frac{\cos(\pi\hat{c}^2 + \pi/4)}{4\pi\hat{c}}. \quad (23)$$

Как и следовало ожидать, при  $\sqrt{\lambda d}/c \rightarrow 0$  значение  $I(\bar{x} = c)$  стремится к 0,25. При этом изменение интенсивности света носит колебательный характер, причём амплитуда колебаний уменьшается до нуля в соответствии с поведением френелевской функции при  $x \gg \delta_d$  [6].

Систематическая приведённая погрешность определения положения границы края 3D-объекта будет равна

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda d}} = \frac{\Delta I \lambda}{2\delta_d \theta_0} = \frac{(I(c) - 0,25)\lambda}{2\delta_d \theta_0} = -\frac{N}{8\pi\hat{c}} \cos(\pi\hat{c}^2 + \pi/4), \quad (24)$$

и, например, при  $\hat{c} = 3$  и  $N = 0,3$  максимальное значение приведённой погрешности не превышает  $-0,015$ , что при толщине объекта  $d = 10$  мм составляет  $\varepsilon = -1$  мкм.

Из сравнения выражений (24) и (13) следует, что в рассматриваемом случае погрешность нахождения задней грани убывает медленнее (обратно пропорционально  $c$ ), что объясняется сильным влиянием объёмных эффектов при углах  $\theta_0 \gg \theta_{кр}$ .

Для 3D-края с большим отрицательным скосом, когда задняя грань находится в тени (см. рис. 5), френелевская функция  $\tilde{Y}_d(x)$  затухает по закону

$$\tilde{Y}_d(x_1) = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi|x_1|} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d}.$$

В этом случае распределение амплитуды поля в плоскости задней грани  $P_1$  (см. рис. 5) изменяется следующим образом:

$$g(x_1) = \tilde{Y}_d(x)Y(x_1 + c) = \frac{\delta_d}{2\pi|x_1|} e^{j\pi/4} e^{jkx_1^2/2d} Y(x_1 + c). \quad (25)$$

Как показывают расчёты, распределения амплитуды и интенсивности поля в дифракционно-ограниченном изображении задней грани имеют вид

$$g_{\omega_0}(\bar{x}_1) = \frac{\delta_d}{2\pi|x_1|} e^{j(kx_1^2/2d + \pi/4)} \Phi_{\omega_0}(\bar{x}_1 + c), \quad (26)$$

$$I(\bar{x}_1) = \frac{\lambda d}{4\pi^2 x_1^2} \Phi_{\omega_0}^2(\bar{x}_1 + c), \quad (27)$$

а значение интенсивности в точке  $\bar{x}_1 = -c$ , соответствующей геометрическому положению границы смещённой полуплоскости в её изображении, равно

$$I(\bar{x}_1 = c) = \frac{1}{16\pi^2 \hat{c}^2}. \quad (28)$$

Видно, что интенсивность поля в изображении задней грани, находящейся в теневой области, быстро падает обратно пропорционально  $\hat{c}^2$  и, например, при  $\hat{c} = 3$  составляет 0,07 % от интенсивности волны, освещающей объект. Таким образом, информация о задней грани, находящейся в тени на расстоянии  $c$ , равно нескольким зонам Френеля, практически исчезает. Более того, в выходной плоскости системы не наблюдается также и изображения передней грани в силу его сильной расфокусировки при большой апертуре оптической системы  $\theta_0 \gg \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$ , при которой глубина фокусировки системы  $\Delta d$  много меньше толщины объекта:  $\Delta d \sim \lambda/\theta^2 \ll d$ .

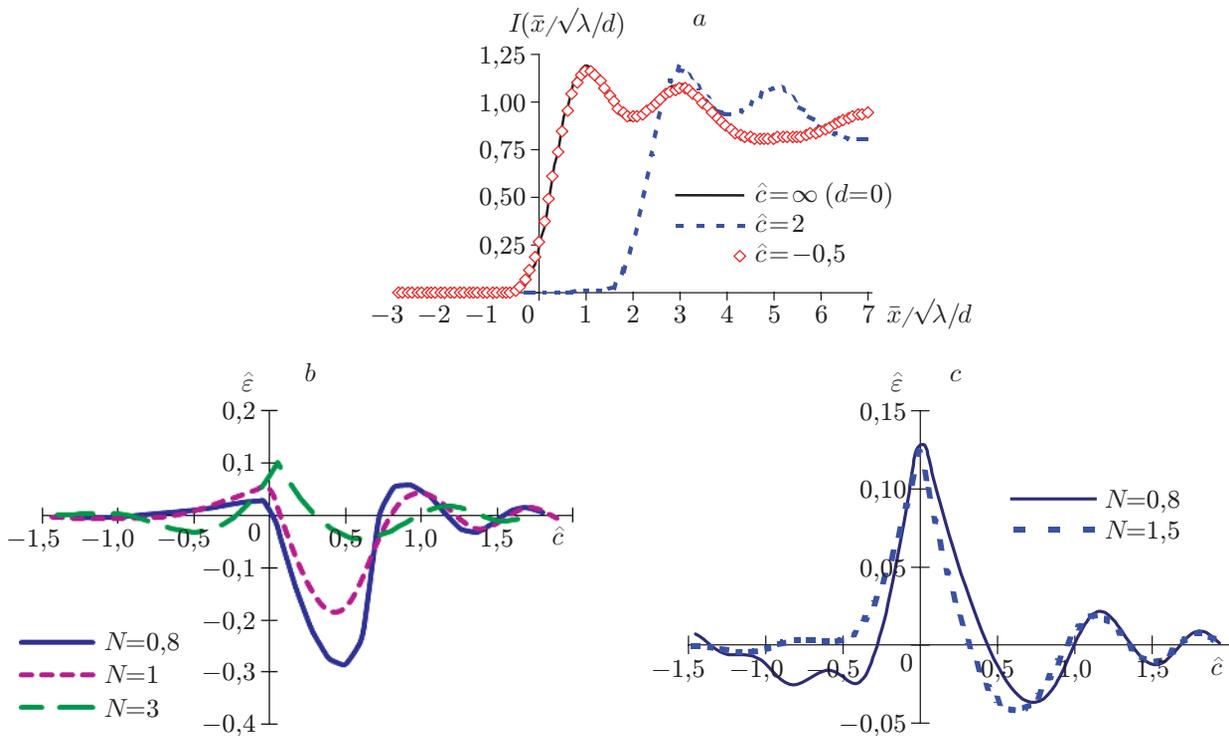


Рис. 6. Результаты компьютерных расчётов профилей изображений объёмного абсолютно поглощающего асимметричного края: изображение передней грани 3D-объекта в дифракционно-ограниченной оптической системе при параметре объёмности  $N = 2$  и различных значениях приведённого скоса  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$  (a); смещение положения границы передней (b) и задней (c) граней (относительно 25 % порога) в изображении объёмного края в зависимости от скоса  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$  при различных значениях параметра объёмности  $N$

**Сравнение полученных оценок с результатами компьютерного моделирования.** В [8] путём компьютерных расчётов получены профили изображений 3D абсолютно поглощающего асимметричного края при различных значениях приведённого скоса  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$ :  $\infty$  ( $d = 0$ ), 2 и 0,5. На рис. 6, a приведены графики профиля интенсивности  $I(\bar{x}/\sqrt{\lambda d})$  в изображении передней грани объекта в дифракционно-ограниченной проекционной системе при параметре объёмности  $N = 2$ . В случае, когда задняя грань находится в тени передней грани ( $\hat{c} = -0,5$ ), профиль изображения передней грани протяжённого края практически не отличается от случая тонкого края ( $d = 0$ ). При положительных скосах  $c$  имеет место смещение профиля изображения на величину, равную параметру  $c$ .

На рис. 6, b, c приведены графики поведения погрешности  $\varepsilon$  определения границы 3D-края в зависимости от скоса  $\hat{c}$ . Погрешность находилась методом пороговой обработки (на уровне 25 %) профилей выходных распределений интенсивности по формуле  $\hat{\varepsilon} = \hat{x}_{\text{реал}} - \hat{x}_{\text{тен}}$ , где  $\hat{x}_{\text{реал}}$  — вычисленное приведённое (к  $\sqrt{\lambda d}$ ) значение координаты границы грани, а  $\hat{x}_{\text{тен}}$  — приведённое значение координаты теневого действующего края (при «схлопывании» протяжённого края до нулевой толщины  $d = 0$ ), причём  $\hat{x}_{\text{тен}} = 0$  при  $c < 0$  и  $\hat{x}_{\text{тен}} = \hat{c}$  при  $c > 0$ . Вычисления выполнялись для изображений передней (см. рис. 6, b) и задней (см. рис. 6, c) граней. В первом случае значения параметра  $N$  были выбраны следующими: 0,8; 1; 3. Очевидно, что ошибка нахождения координаты передней грани границы 3D-края уменьшается при увеличении  $N$ . Она колеблется в интервале

$-0,2/N \leq \varepsilon \leq (2\sqrt{2}\pi)^{-1}$  [8]. Отметим, что для симметричного края ( $c = 0$ ) абсолютная погрешность его смещения  $|\varepsilon| = 0,11\sqrt{\lambda d}$ , что согласуется с ранее полученными результатами [7]. Поведение погрешности для задней грани при  $c > 0$  также носит колебательный характер с затуханием, обратно пропорциональным квадрату скоса  $c$ . Это согласуется с полученными нами теоретическими расчётами. В случае задней грани значения  $N$  выбирались равными 0,8 и 1,5 (см. рис. 6,  $c$ ). При  $c > 0$  колебания затухают медленнее (чем в предыдущем случае) по закону  $c^{-1}$ , что находится в соответствии с полученными теоретическими результатами. Максимальная погрешность определения границы задней грани имеет место при  $c = 0$ .

Таким образом, очевидно хорошее согласие полученных аналитических оценок с результатами компьютерного моделирования полей в изображениях  $3D$  абсолютно поглощающего асимметричного края.

**Заключение.** Применительно к размерному контролю  $3D$ -объектов исследованы в аналитическом виде особенности формирования в дифракционно-ограниченной проекционной системе изображений объёмного асимметричного абсолютно поглощающего края — основного фрагмента протяжённых (по глубине) пластин постоянной толщины. Исследования выполнены на основе конструктивной теории дифракционных явлений на таких объектах с использованием модели эквивалентных диафрагм. При расчётах использована аппроксимация интеграла Френеля (комплексного вида) элементарными функциями.

Изучены структуры изображений передней и задней граней  $3D$ -объекта соответственно при малых и больших апертурах оптической системы для различных соотношений скоса объекта  $c$  и размера зоны Френеля  $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$ . Показано, что в случае, когда скос много меньше размера зоны Френеля, при большой глубине фокусировки системы в плоскости изображения передней грани имеет место смещение профиля интенсивности изображения, пропорциональное зоне Френеля и величине скоса  $c$ . Такое смещение ведёт к систематической погрешности измерения. Установлено, что в случае больших скосов структура изображения в плоскости, сопряжённой с плоскостью передней грани, зависит от знака скоса  $c$ . Так, при положительном скосе, когда задняя грань находится в освещённой области, а передняя затенена задней гранью, наблюдается изображение задней грани, причём погрешность определения границы в изображении задней грани обратно пропорциональна квадрату скоса. При отрицательном скосе, когда задняя грань находится в теневой области, поле на выходе системы соответствует изображению передней грани. При этом влияние задней грани гораздо слабее, чем в случае положительного скоса.

Получены формулы для профиля изображений задней грани в случае значительных объёмных эффектов, когда глубина фокусировки системы много меньше толщины объекта. Показано, что погрешность определения границы объекта при положительном скосе уменьшается обратно пропорционально его значению. Такое медленное её затухание объясняется сильным влиянием объёмных эффектов. Из сравнения полученных результатов с результатами компьютерного моделирования следует, что они находятся в хорошем согласии.

Результаты исследования могут быть использованы при разработке когерентно-оптических систем для  $3D$  прецизионного контроля объектов, в том числе цилиндров [13].

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Е. С. Арсениной за техническую помощь при подготовке статьи.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация проекта № АААА-А17-117121270018-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Хенл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
4. Keller J. V. Geometrical theory of diffraction // JOSA. 1962. **52**, Iss. 2. P. 116–130.
5. Chugui Yu. V., Krivenkov B. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. **6**, N 5. P. 617–626.
6. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
7. Чугуй Ю. В. Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
8. Chugui Yu. V., Sokolov V. A. Formation and filtering in coherent light the images of 3D asymmetric edges // Proc. of the 6th ISMQC IMEKO Symp. Metrology for Quality Control in Production. Vienna, Austria, 8–10 Sept., 1998. P. 117–124.
9. Чугуй Ю. В. Расчёт положения границы объекта при его проецировании в пространственно-неинвариантной когерентно-оптической системе // Автометрия. 2016. **52**, № 6. С. 50–60. DOI: 10.15372/AUT20160607.
10. Чугуй Ю. В. Расчёт и анализ импульсного отклика проекционных пространственно-неинвариантных систем // Автометрия. 2018. **54**, № 6. С. 34–47. DOI: 10.15372/AUT20180604.
11. Папулис А. Теория системы и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
12. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамова, И. Стишина. М.: Наука, 1979. 832 с.
13. Чугуй Ю. В. Дифракционные явления в дальней зоне на цилиндрических объектах малого диаметра с учётом их отражающих свойств // Автометрия. 2020. **56**, № 4. С. 41–47. DOI: 10.15372/AUT20200405.

*Поступила в редакцию 18.05.2020*

*После доработки 13.07.2020*

*Принята к публикации 20.07.2020*

---