

УДК 519.652

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА. Ч. II

© Ю. Г. Булычев¹, А. Г. Кондрашов², П. Ю. Радуга³, А. В. Ячменёв¹

¹Акционерное общество «Всероссийский научно-исследовательский институт «Градиент»»,
344000, г. Ростов-на-Дону, просп. Соколова, 96

²Акционерное общество «Научно-производственное объединение «Квант»»,
173001, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 73

³Акционерное общество «Калужский научно-исследовательский
радиотехнический институт»,
249192, г. Жуков Калужской области, ул. Ленина, 2
E-mail: ProfBulychev@yandex.ru

С использованием ранее построенного численно-аналитического метода описания входных и выходных параметров многомерного динамического объекта для заданного множества допустимости (Ч. I) в данной работе развивается метод оптимального оценивания значений непрерывных линейных функционалов (числовых характеристик) от измеряемых параметров на основе некорректных данных, содержащих не только флуктуационную погрешность, но и сингулярную помеху (Ч. II). Метод обеспечивает максимально возможную декомпозицию вычислительных процедур, не требует выполнения традиционных операций линеаризации и выбора начального приближения, а также не связан с расчётом спектральных коэффициентов в конечных линейных комбинациях (с заданными базисными функциями), описывающих интегральные кривые дифференциального уравнения, измеряемые параметры и сингулярную помеху. Анализируются случайные и методические погрешности, приводятся иллюстративный пример и рекомендации по практическому применению полученных результатов.

Ключевые слова: непрерывный линейный функционал (числовая характеристика), некорректные данные, сингулярная помеха, опорные интегральные кривые, метод множителей Лагранжа, условия несмещённости и инвариантности.

DOI: 10.15372/AUT20200612

Введение. В [1] предложен численно-аналитический метод описания и оценивания входных и выходных параметров многомерного динамического объекта (ДО), который отражает суть процедуры построения приближённого общего решения обыкновенного дифференциального уравнения на основе семейства высокоточных опорных интегральных кривых (ОИК) для заданной области допустимости значений временной координаты, начального условия и параметров неопределённости, входящих в правую часть уравнения. В представленной работе продолжено развитие этого метода, связанное с оптимальным оцениванием различных непрерывных линейных функционалов (НЛФ) (далее называемых числовыми характеристиками) от измеряемых параметров ДО на основе некорректных данных. Такие данные представляют собой аддитивные наблюдения отсчётов параметров, флуктуационных погрешностей и сингулярных помех. При этом для описания погрешностей используется традиционная гауссовская шумовая модель, а для формирования моделей измеряемых параметров и помех применяются соответствующие конечные линейные комбинации с заданными базисными функциями и неизвестными спектральными коэффициентами.

Аналогичная задача (вычисление НЛФ на интегральных кривых дифференциального уравнения ДО) решалась в [2], где была использована идея автокомпенсационного оптимального оценивания, инвариантного к сингулярной помехе, не требующего традиционного расширения пространства состояний и допускающего раздельное оценивание любой числовой характеристики интегральной кривой. Показано, что такой подход обеспечивает максимально возможную декомпозицию процедуры оценивания значений НЛФ, при этом не возникает необходимость расчёта спектральных коэффициентов в линейных комбинациях интегральной кривой и сингулярной помехи, что существенно снижает объём и повышает оперативность вычислений при исследовании поведения ДО. Кроме того, не предполагается выполнение традиционных процедур линеаризации и выбора начального приближения, так как реализуются простейшие вычислительные операции оптимального оценивания в виде векторно-матричных сложений и умножений.

К недостаткам метода, рассмотренного в [2], можно отнести то, что рассматривается лишь скалярный ДО, а в качестве измеряемого параметра выступает непосредственно интегральная кривая ДО, а это, как правило, не вполне соответствует потребностям практики. Кроме того, говорится лишь об оценке НЛФ этой кривой, хотя для большинства прикладных задач более актуальным является оценивание числовых характеристик (например, производных различных порядков) измеряемого выхода ДО. Так, для триангуляционных измерительных комплексов важной является задача нахождения производных от пеленгов (азимута и угла места) движущихся источников излучений, измеряемых каждой приёмной позицией комплекса. Использование указанных числовых характеристик позволяет решать актуальные задачи прогнозирования угловых траекторий (при срыве и пропуске наблюдений) и отождествления пеленгов группы источников для многопозиционного комплекса [3–5]. Если используемому функционалу можно сопоставить некоторый инвариант (временной, пространственный или пространственно-временной [6]), то появляется возможность решения и многих других задач многопозиционной локации и навигации, например компенсация систематических ошибок измерений [4].

Данная работа является дальнейшим развитием метода [2] в направлении оптимального оценивания НЛФ для многомерных ДО, принимая во внимание отмеченные недостатки, и ориентирована на реальные информационно-измерительные комплексы, при построении которых основополагающим выступает критерий точность-оперативность с учётом жёстких ограничений на вычислительные ресурсы. Это требует обеспечения максимально возможной декомпозиции и распараллеливания применяемых алгоритмов.

Предлагаемые далее результаты в совокупности с [1] составляют суть развиваемого численно-аналитического метода описания и оценивания входных и выходных параметров многомерного ДО.

Постановка задачи. Пусть многомерный ДО описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (в форме Коши)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T], \quad x \in G_x, \quad (1)$$

где t — время; $G_t = [t_0, t_0 + T]$ — отрезок времени, на котором исследуется ДО; $x = x(t, x_0) = [x_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^T$ — решение уравнения с начальным условием $x_0 = x(t_0, x_0) = [x_{i0}, i = \overline{1, I}]^T \in G_{x0} \subseteq G_x$; G_x — замкнутая выпуклая область, соответствующая всем возможным состояниям ДО, стартующего с любым начальным условием, принадлежащим гиперпараллелепипеду $G_{x0} = \{x_0 \in G_{x0}: c_i \leq x_{i0} \leq d_i, i = \overline{1, I}\}$; $f(t, x)$ — функция, удовлетворяющая на множестве допустимости $G_{xt} = \{G_x, G_t\}$ известным условиям существования и единственности решения уравнения (1) с постоянной Липшица L_0 и, кроме того, обеспечивающая на G_{xt} требуемую гладкость этого решения, характерную для рассматриваемого класса ДО.

Согласно [1], используя семейство ОИК необходимого объёма, общее решение $x(t, x_0)$ уравнения (1) на множестве G_{xt} с требуемой точностью можно представить как

$$x_i(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} b_{ikr} \lambda_{xir}(x_0) \psi_{xk}(t) = \Psi_x^\top(t) B_i \Lambda_{xi}(x_0), \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

где $\Psi_x(t) = [\psi_{xk}(t), k = \overline{1, M_t}]^\top$ и $\Lambda_{xi}(x_0) = [\lambda_{xir}(x_0), r = \overline{1, M_x}]^\top$ — векторы заданных гладких базисных функций от аргументов t и x_0 ; $B_i = [b_{ikr}, k = \overline{1, M_t}, r = \overline{1, M_x}]$ — матрица вычисляемых коэффициентов, соответствующих i -й координате вектора состояния ДО.

Зададимся также векторным уравнением измеряемого выхода ДО

$$y = \varphi(t, x), \quad y \in G_{yt}, \quad (3)$$

где $y = [y_j, j = \overline{1, J}]^\top = [\gamma_j(t, x_0), j = \overline{1, J}]^\top$ — вектор измеряемых параметров (в общем случае нелинейная функция выхода); $\varphi(t, x)$ — гладкая функция своих аргументов.

В соответствии с [1] семейство ОИК порождает для каждого измеряемого параметра y_j семейство выходных траекторий того же объёма, при этом с требуемой точностью на множестве G_{xt} можно воспользоваться представлением

$$y_j = \gamma_j(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_{r=1}^{M_x} w_{jkr} \lambda_{yjr}(x_0) \psi_{yjk}(t) = \Psi_{yj}^\top(t) W_j \Lambda_{yj}(x_0), \quad j = \overline{1, J}, \quad (4)$$

где $\Psi_{yj}(t) = [\psi_{yjk}(t), k = \overline{1, M_t}]^\top$ и $\Lambda_{yj}(x_0) = [\lambda_{yjr}(x_0), r = \overline{1, M_x}]^\top$ — векторы заданных гладких базисных функций от аргументов t и x_0 соответственно; $W_j = [w_{jkr}, k = \overline{1, M_t}, r = \overline{1, M_x}]$ — матрица вычисляемых коэффициентов, соответствующих параметру y_j .

На выходных траекториях $y_j = \gamma_j(t, x_0)$ вводится семейство Ω НЛФ $\omega\{\gamma_j(t, x_0)\} \in \mathbb{R}^1$, которые необходимы при решении тех или иных целевых задач, связанных с наблюдением за конкретным ДО.

Воспользуемся дискретными уравнениями наблюдения

$$h_{jn} = \gamma_{jn}(x'_0) + s_{jn} + \xi_{jn}, \quad j = \overline{1, J}, \quad n = \overline{0, N_j}, \quad (5)$$

где $h_{jn} = h_j(t_{jn})$; $\gamma_{jn}(x'_0) = \gamma_j(t_{jn}, x'_0)$; $s_{jn} = s_j(t_{jn})$; $\xi_{jn} = \xi_j(t_{jn})$; $t_{jn} \in G_t$.

В этом уравнении $x'_0 \in G_{x0}$ — неизвестное начальное условие, с которым стартует ДО, $s_j(t)$ — сингулярная помеха, $\xi_j(t)$ — флуктуационная погрешность. Введение индекса j во временную сетку $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ позволяет рассмотреть случай асинхронных измерений различных функций выхода исследуемого ДО.

Помеху опишем как

$$s_j(t) = C_j^\top \Theta_j(t), \quad (6)$$

где $C_j = [c_{jp}, p = \overline{1, M_{sj}}]^\top$ — вектор неизвестных спектральных коэффициентов; $\Theta_j(t) = [\theta_{jp}(t), p = \overline{1, M_{sj}}]^\top$ — вектор заданных базисных функций; M_{sj} — заданное число степеней свободы (на практике зачастую прибегают к упрощению $M_{sj} = M_s$ и $\Theta_j(t) = \Theta(t)$).

По аналогии с [3] вектор $\Theta_j(t)$, соответствующий измеряемому параметру $y_j = \gamma_j(t, x_0)$ для всех $t \in G_t$ и $G_{x0} \subseteq G_x$, может формироваться из семейства базисов, которые в большей степени соответствуют основным факторам неопределённости, отвечающим различным наиболее вероятным условиям наблюдения ДО с помощью параметра y_j . Такое семейство должно предусматривать возможность появления сингулярных

помех самого разного типа, с которыми можно столкнуться на практике при исследовании конкретного ДО в различных условиях наблюдения.

Шум $\xi_j(t)$ на измерительной сетке $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и невырожденной корреляционной матрицей K_{Ξ_j} .

Введём векторные обозначения:

$$H_j = [h_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^\top, \quad Y_j = [\gamma_{jn}(x'_0), n = \overline{0, N_j}]^\top,$$

$$S_j = [s_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^\top, \quad \Xi_j = [\xi_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^\top.$$

Это позволяет перейти к векторному уравнению наблюдения

$$H_j = Y_j + S_j + \Xi_j. \quad (7)$$

Для фиксированного $j \in \overline{1, J}$ из множества Ω выберем произвольный функционал ω , такой что $\omega\{\gamma_j(t, x'_0)\} = \omega_j$. На основе наблюдения H_j необходимо дать оценку ω_j^* значения ω_j , т. е. определить числовую характеристику измеряемого параметра $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$, соответствующую неизвестному начальному условию $x'_0 \in G_{x_0}$ и заданному функционалу $\omega \in \Omega$. Оценку будем искать в классе линейных оценок [1]:

$$\omega_j^* = P_j^\top H_j = P_j^\top (Y_j + S_j + \Xi_j) = P_j^\top Y_j + P_j^\top S_j + P_j^\top \Xi_j = \omega_{Y_j}^* + \omega_{S_j}^* + \omega_{\Xi_j}^*, \quad (8)$$

где $P_j = [p_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^\top$ — вектор искомых весовых коэффициентов, здесь и далее индекс «*» соответствует некоторой оценке.

В силу линейности процедуры (8) при фиксированном векторе P_j дисперсия ошибки вычисления характеристики ω_j находится как

$$\sigma_j^2 = P_j^\top K_{\Xi_j} P_j. \quad (9)$$

Выбор оптимального значения P_j^* для вектора P_j соответствует критерию

$$P_j^* = \min_{P_j} \sigma_j^2, \quad (10)$$

при этом должны выполняться условия несмещённости оценки

$$(P_j^*)^\top Y_j = \omega\{\gamma_j(t, x'_0)\} = \omega_j \quad (11)$$

и её инвариантности к помехе

$$(P_j^*)^\top S_j = 0. \quad (12)$$

Требуется с учётом (1)–(12) применительно к областям G_{x_0} и G_t :

— сформировать алгоритм нахождения вектора P_j^* весовых коэффициентов и оценки ω_j^* числовой характеристики, обеспечивающих выполнение сформулированного критерия оптимальности (10) при заданных ограничениях (11) и (12);

— рассмотреть возможность оценивания различных по смыслу НЛФ на основе наблюдения H_j ;

— исследовать статистическую и методическую погрешности алгоритма оценивания;

— определить условия и границы применимости развиваемого метода;

— дать комментарии к достигаемому вычислительному эффекту;

— привести иллюстративный пример.

Оценивание числовых характеристик от измеряемых параметров многомерного динамического объекта. Данный этап связан непосредственно с обработкой поступающих измерений и согласно современной концепции должен характеризоваться минимальными вычислительными затратами и заданной оперативностью, позволяющими обеспечить вышеупомянутый режим реального времени.

Используя (8), распространим известную процедуру обобщённого инвариантного несмещённого оценивания (ОИНО) [7] на задачу вычисления числовых характеристик измеряемого выхода ДО. С учётом (3) и (4) выходную траекторию $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$ с заданной точностью можно представить как

$$y_j = \gamma_j(t, x'_0) = \Psi_{y_j}^\top(t) \bar{Y}_j = \bar{Y}_j^\top \Psi_{y_j}(t), \quad j = \overline{1, J}, \quad (13)$$

где $\bar{Y}_j = [\gamma_j(t(k), x'_0), k = \overline{1, M_t}]^\top$ — вектор временных отсчётов траектории $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$ на вычислительной сетке $\{t(k)\}_{k=1}^{M_t}$ малого объёма (следует различать Y_j и \bar{Y}_j , а также измерительную $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ и вычислительную $\{t(k)\}_{k=1}^{M_t}$ сетки).

Полагаем, что выполняются характеристические условия

$$\Psi_{y_j}^\top(t(k)) \bar{Y}_j = \bar{Y}_j^\top \Psi_{y_j}(t(k)) = \gamma_j(t(k), x'_0). \quad (14)$$

Вектор временных отсчётов координаты $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$ на измерительной сетке $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ (где $N_j \gg M_t$) зададим следующим образом:

$$Y_j = \Psi_{y_j}^\top \bar{Y}_j = \bar{Y}_j^\top \Psi_{y_j}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (15)$$

где $\Psi_{y_j} = [\psi_{y_jkn}, k = \overline{1, M_t}, n = \overline{0, N_j}]$ — матрица отсчётов $\psi_{y_jkn} = \psi_{y_jk}(t_{jn})$ базисных функций j -го измеряемого параметра.

В силу линейности функционала $\omega \in \Omega$ условие несмещённости его оценки можно представить в виде

$$P_j^\top Y_j = \omega\{\gamma_j(t, x_0)\} = [\omega\{\Psi_{y_j}(t)\}]^\top \bar{Y}_j = P_j^\top \Psi_{y_j}^\top \bar{Y}_j = \omega_j, \quad (16)$$

где $\omega\{\Psi_{y_j}(t)\} = [\omega\{\psi_{y_jk}(t)\}, k = \overline{1, M_t}]^\top$ — вектор значений функционала ω на базисных функциях измеряемых параметров.

Отсюда получаем окончательное условие

$$\Psi_{y_j} P_j = \omega\{\Psi_{y_j}(t)\}. \quad (17)$$

Поскольку необходимо, чтобы

$$\omega\{s_j(t)\} = \omega\{C_j^\top \Theta_j(t)\} = C_j^\top \omega\{\Theta_j(t)\} = P_j^\top S_j = 0, \quad (18)$$

то условие инвариантности оценки к сингулярной помехе можно преобразовать к виду

$$\Theta_j P_j = [0]_{M_{s_j} \times 1}, \quad (19)$$

где $[0]_{M_{s_j} \times 1}$ — нулевой вектор-столбец размерности $M_{s_j} \times 1$; $\Theta_j = [\theta_{jns}, s = \overline{1, M_{s_j}}, n = \overline{0, N_j}]$ — матрица отсчётов $\theta_{jns} = \theta_{js}(t_{jn})$ базисных функций помехи.

Задача нахождения оптимальной оценки P_j^* вектора P_j решается методом условной оптимизации Лагранжа. В итоге получаем следующую процедуру автокомпенсационного оценивания применительно к измеряемому выходу ДО (по аналогии с [7]):

$$P_j^* = Z_{j1} \Psi_{y_j}^\top (\Psi_{y_j} Z_{j1} \Psi_{y_j}^\top)^{-1} \omega\{\Psi_{y_j}(t)\}, \quad (20)$$

$$\omega_j^* = [P_j^*]^\top H_j = H_j^\top P_j^*, \quad (21)$$

где

$$Z_{j1} = Z_{j2} K_{\Xi j}^{-1}, \quad (22)$$

$$Z_{j2} = E_j - K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top (\Theta_j K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top)^{-1} \Theta_j, \quad (23)$$

E_j — единичная матрица размерности $(N_j + 1) \times (N_j + 1)$.

В выражениях (20)–(23) имеем следующие размерности для матриц:

$$\Psi_{yj}(t) \rightarrow M_t \times 1, \quad \omega\{\Psi_{yj}(t)\} \rightarrow M_t \times 1, \quad \Psi_{yj} \rightarrow M_t \times (N_j + 1),$$

$$Z_{j1} \rightarrow (N_j + 1) \times (N_j + 1), \quad Z_{j2} \rightarrow (N_j + 1) \times (N_j + 1), \quad (\Psi_{yj} Z_{j1} \Psi_{yj}^\top)^{-1} \rightarrow M_t \times M_t,$$

$$Z_{j1} \Psi_{yj}^\top \rightarrow (N_j + 1) \times M_t, \quad (\Theta_j K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top)^{-1} \rightarrow M_{sj} \times M_{sj},$$

$$(\Theta_j K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top)^{-1} \Theta_j \rightarrow M_{sj} \times (N_j + 1), \quad K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top \rightarrow (N_j + 1) \times M_{sj}.$$

Несложно проверить, что данные размерности соответствуют основным правилам выполнения векторно-матричных операций.

Анализ сформированной оценки числовой характеристики. Из (20)–(23) непосредственно вытекает, что матрицы $K_{\Xi j}$, $\Theta_j K_{\Xi j}^{-1} \Theta_j^\top$ и $\Psi_{yj} Z_{j1} \Psi_{yj}^\top$ должны быть невырожденными и хорошо обусловленными, что соответствует получению единственного и устойчивого решения P_j^* . Данный вопрос относится к сфере оптимального планирования измерительного эксперимента и в представленной работе не рассматривается. При рациональном выборе основных параметров процедуры (20)–(23) можно избежать необходимости решения некорректной (с вычислительной точки зрения) задачи оценивания.

Для дисперсии оптимальной оценки ω_j^* числовой характеристики ω_j имеем следующее выражение (по аналогии с [7]):

$$\sigma_j^2 = [P_j^*]^\top K_{\Xi j} P_j^* = [\omega\{\Psi_{yj}(t)\}]^\top W_{j1} \Psi_{yj} Z_{j1}^\top K_{\Xi j} Z_{j1} \Psi_{yj}^\top W_{j2} \omega\{\Psi_{yj}(t)\}, \quad (24)$$

где

$$W_{j1} = (\Psi_{yj} Z_{j1}^\top \Psi_{yj}^\top)^{-1}, \quad (25)$$

$$W_{j2} = (\Psi_{yj} Z_{j1} \Psi_{yj}^\top)^{-1}. \quad (26)$$

Выражения (20)–(26) имеют явный векторно-матричный вид, что существенно упрощает их применение в любой вычислительной среде. Оценка ω_j^* числовой характеристики ω_j формируется сразу без промежуточного вычисления спектральных коэффициентов измеряемого параметра и сингулярной помехи, т. е. без расширения пространства состояний. Кроме того, эта оценка является несмещённой, поскольку достигается инвариантность результата оценивания к сингулярной помехе. В силу этого алгоритм нахождения значения

НЛФ на базе выражений (20)–(23) можно отнести к классу линейных автокомпенсационных алгоритмов.

Усреднённая методическая погрешность δ_j оценивания числовой характеристики ω_j , обусловленная тем, что в спектральном представлении измеряемого выхода ДО не учитывается «хвост» $\Delta_j(t, x_0) = \gamma_j(t, x_0) - \Psi_{y_j}^\top(t)W_j\Lambda_{y_j}(x_0)$ бесконечного ряда, равна (используя символ математического ожидания $M[\cdot]$ и обозначение $\Delta_j = [\Delta(t_n, x_{j0}), n = \overline{0, N}]^\top$)

$$\delta_j = M[\omega_j - \omega_j^*] = M[\omega\{\Psi_{y_j}^\top(t)W_j\Lambda_{y_j}(x_0)\} + \omega\{\Delta_j(t, x_0)\} - \omega_{Y_j}^* - \omega_{\Delta_j}^* - \omega_{S_j}^* - \omega_{\Xi_j}^*],$$

где

$$\omega_{Y_j}^* = (P_j^*)^\top Y_j, \quad \omega_{\Delta_j}^* = (P_j^*)^\top \Delta_j, \quad \omega_{S_j}^* = P_j^\top S_j, \quad \omega_{\Xi_j}^* = P_j^\top \Xi_j.$$

Поскольку

$$\omega\{\Psi_{y_j}^\top(t)W_j\Lambda_{y_j}(x_0)\} = \omega_{y_j}^*$$

— условие несмещённости,

$$\omega_{S_j}^* = P_j^\top S_j = 0$$

(условие инвариантности) и $M[\Xi_j] = 0$ (шум является центрированным), то получаем

$$\delta_j = M[\omega\{\Delta_j(t, x_0)\} - (P_j^*)^\top \Delta_j - P_j^\top \Xi_j] = \omega\{\Delta_j(t, x_0)\} - (P_j^*)^\top \Delta_j. \quad (27)$$

Таким образом, методическая погрешность оценивания (27) в среднем определяется значением НЛФ на «хвосте» бесконечного ряда и линейной оценкой этого значения.

Оценивание выходных траекторий многомерного динамического объекта.

Для нахождения оптимальной траектории j -го измеряемого выхода ДО ($j \in \overline{1, J}$) достаточно найти оптимальные (сглаженные) оценки $y_{j(k)}^*$ траектории $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$ в узлах $t_{(k)}$ вычислительной сетки с учётом некорректных наблюдений. Если истинные значения $y_{j(k)} = \gamma_j(t_{(k)}, x'_0)$ рассматривать как некоторый НЛФ $\omega_{(k)} \in \Omega$ на траектории $y_j = \gamma_j(t, x'_0)$, т. е.

$$y_{j(k)} = \omega_{(k)}\{\gamma_j(t, x'_0)\},$$

то с учётом (20)–(23) можно воспользоваться оценками

$$\omega_{j(k)}^* = y_{j(k)}^* = H_j^\top Z_{j1} \Psi_{y_j}^\top (\Psi_{y_j} Z_{j1} \Psi_{y_j}^\top)^{-1} \omega_{(k)}\{\Psi_{y_j}(t)\}, \quad j = \overline{0, J}, \quad (28)$$

положив здесь

$$\omega_{(k)}\{\Psi_{y_j}(t)\} = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^\top \quad (29)$$

— нулевой столбец с единицей в k -й позиции.

Зная векторную оценку $\bar{Y}_j^* = [y_{j(k)}^*, k = \overline{1, M_t}]^\top$ для вектора $\bar{Y}_j = [\gamma_j(t_{(k)}, x'_0), k = \overline{1, M_t}]^\top$, с учётом (28) находим оптимальные скалярные траектории

$$y_j^* = \Psi_{y_j}^\top(t) \bar{Y}_j^*, \quad j = \overline{1, J}, \quad t \in G_t, \quad (30)$$

для всех измеряемых параметров ДО.

Таким образом, несмотря на то что рассматриваемый ДО и его выход являются нелинейными, оценивание НЛФ на выходных траекториях ДО осуществляется в рамках линейной процедуры без привлечения традиционно используемых процедур линеаризации нелинейных функций [3, 4, 8].

Оценивание векторной числовой характеристики. Задачу ОИНО также можно обобщить на случай, который связан с оценкой векторной числовой характеристики $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^\top$ на выходных траекториях ДО. В этом случае линейная векторная оценка ω_j^* НЛФ $\omega\{\gamma_j(t, x_0)\}$ для j -го измеряемого параметра находится в векторно-матричном виде

$$\omega_j^* = P_j^* H_j, \quad (31)$$

где $P_j^* = [p_{jdn}^*, d = \overline{1, D}, n = \overline{0, N}]$ — оценка матрицы P_j весовых коэффициентов.

Матрица P_j определяется из условия минимизации следа корреляционной матрицы

$$K_j = P_j K_{\Xi j} P_j^\top. \quad (32)$$

Несложный анализ показывает, что данная задача разбивается на D подзадач, связанных с ОИНО по каждой координате вектора $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^\top$, т. е. достигается максимально возможная декомпозиция вычислительной процедуры.

Анализ вычислительной эффективности. Для оценки вычислительной эффективности развитого метода достаточно воспользоваться результатами работы [7], в которой демонстрируется возможность реализации процедуры ОИНО на основе распределённой обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется быстродействием распределённой среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода, и способом программирования. В [7] показано, поскольку процедура ОИНО не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на её основе методы оценивания позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности, а также дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере.

Предлагаемый метод описания и оценивания входных и выходных параметров многомерного ДО (Ч. I и II) позволяет вынести основной объём численно-аналитических операций на первый (предварительный) этап (Ч. I), не связанный непосредственно с обработкой измерений. На второй (основной) этап (Ч. II), который ориентирован на такую обработку, приходится простейшие векторно-матричные операции, легко реализуемые в реальном времени в современных вычислительных средах. В разработанном методе отсутствуют традиционные операции совместного оценивания указанных ранее спектральных коэффициентов (что обеспечивает пропорциональное снижение размерности обрабатываемых матриц), линеаризации нелинейных функций (а следовательно, выбора начальных условий для запуска соответствующих итерационных алгоритмов), при этом все интересующие нас НЛФ на выходных траекториях ДО оцениваются отдельно (т. е. достигается соответствующая декомпозиция вычислительных процедур).

Рекомендации. В качестве НЛФ могут рассматриваться, например:

— выборочное значение j -го измеряемого параметра в произвольной точке $t' \in G_t$:

$$\omega\{\Psi_y(t)\} = [\psi_{yk}(t'), \quad k = \overline{1, M_t}]^\top;$$

— значение производной r -го порядка в точке t' :

$$\omega\{\Psi_y(t)\} = [\psi_{yk}^{(r)}(t'), \quad k = \overline{1, M_t}]^\top;$$

— значение определённого интеграла на отрезке $[t_0, t_0 + T]$:

$$\omega\{\Psi_y(t)\} = \left[\int_{t_0}^{t_0+T} \psi_{yk}(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, M_t} \right]^\top;$$

— значение спектрального коэффициента $v_{jk}(y_0)$:

$$\omega\{\Psi_y(t)\} = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^\top,$$

т. е. имеем нулевой вектор-столбец размером M_t , у которого на k -й позиции стоит единица.

Несмещённые оценки этих и других НЛФ, инвариантные к сингулярной помехе, можно получить по результатам некорректных наблюдений, если в алгоритме (20)–(23) раскрыть вектор $\omega\{\Psi_y(t)\}$ с учётом специфики используемого НЛФ.

Предложенный алгоритм ОИНО можно выполнять на подвижной сетке (скользящем окне) $\{t_{j,r+l-1}\}_{l=-\bar{n}_j/2}^{\bar{n}_j/2} \in G_t$, где $(\bar{n}_{j+1} + 1)$ — объём скользящего окна, индекс r характеризует положение его центрального узла в момент времени $t_{jr} \in G_t$, а индекс j позволяет занумеровать узлы скользящего окна при фиксированном r .

Очевидно, что для формирования полномерного скользящего окна объёмом $\bar{n}_{j+1} + 1$ необходимо выполнение неравенств

$$1 + \bar{n}_j/2 \leq r \leq 1 + N_j - \bar{n}_j/2, \quad -\bar{n}_j/2 \leq l \leq \bar{n}_j/2,$$

в противном случае алгоритм ОИНО реализуется на неполномерном скользящем окне нарастающего объёма (это относится к краям временного отрезка $[t_0, T]$).

Известно, что точность оценивания сглаженного значения измеряемого параметра наибольшая в середине скользящего окна, что также в полной мере относится к нахождению различных НЛФ (например, производных), которые соответствуют некоторой произвольной точке $t' \in G_t$, являющейся одним из узлов подвижной сетки. Алгоритм ОИНО несложно реализовать и на адаптивном скользящем окне, объём которого меняется оптимальным образом с учётом условий наблюдения за ДО.

Иллюстративный пример. Для оценки эффективности предлагаемого метода ограничимся ДО [1], соответствующим ракете, движущейся в однородном поле силы тяжести, при линейном законе расхода массы и отсутствии сопротивления среды [9]. Криволинейное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений (здесь время измеряется в секундах)

$$\frac{dz_1}{dt} = -g_0 z_2^{-1}, \quad \frac{dz_2}{dt} = c_v \eta (1 - \eta t)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(z_1),$$

где $z_1 = x_1$ — фазовая координата (безразмерная), соответствующая углу β (рад) наклона вектора скорости к горизонту; $z_1 = \ln [\operatorname{tg}(\pi/4 + \beta/2)]$; $z_2 = x_2$ — величина скорости ракеты (м/с); g_0 — ускорение силы тяжести (м/с²); $\eta = x_3$ — удельный расход массы ракеты (с⁻¹); c_v — относительная скорость отбрасываемых частиц (м/с).

Далее полагаем, что $g_0 = 9,80665$, $c_v = 2290$, $t_0 = 0$, $T = 70$, $x_{i0} = x_i(0) \in G_{x_i} = [c_i, d_i]$, $i = 1, 3$, $c_1 = 1,0107$, $d_1 = 2,4362$, $c_2 = 100$, $d_2 = 200$, $c_3 = r = 0,0060$, $d_3 = p = 0,0100$. В качестве измеряемого параметра y используем угол β , т. е. $J = 1$, $y = \beta$ (далее в формулах индекс j опускается), $I_1 = 2$, $I_2 = 1$, при этом $f_1(t, x) = -g_0 x_2^{-1}$, $f_2(t, x) = c_v x_3 (1 - x_3 t)^{-1} - g_0 \operatorname{th}(x_1)$, $f_3(t, x) \equiv 0$, $m = (m_1, m_2, m_3)$, $M_{x_1} = 4$, $M_{x_2} = 6$, $M_{x_3} = 5$, $M_x = M_{x_1} M_{x_2} M_{x_3} = 120$, $M_t = 11$, $M_s = 2$, $\psi_{xk}(t) = L_{(k)}(t)$, $t_{(k)} = 7(k - 1)$, $k = \overline{1, 11}$, $L_{(m)}(x_0) = L_{(m_1, m_2, m_3)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = L_{(m_1)}(x_{10}) L_{(m_2)}(x_{20}) L_{(m_3)}(x_{30})$.

Для формирования уравнения наблюдения за ДО также принято: $x'_{10} = 1,7354$, $x'_{20} = 112$, $x'_{30} = 0,080$, $s(t) = c_1 \theta_1(t) + c_2 \theta_2(t)$, $c_1 = 5$, $\theta_1(t) = \sin(0,64t)$, $c_2 = 15$, $\theta_2(t) = \exp(-0,07t)$, $K_\Xi = \operatorname{diag}(\sigma, \dots, \sigma)$, $\sigma = \pi/360$, $\{t_n\}_{n=0}^N$, $N = 70$, $t_n - t_{n-1} = 1$, $\bar{n} = 20$, $11 \leq r \leq 61$.

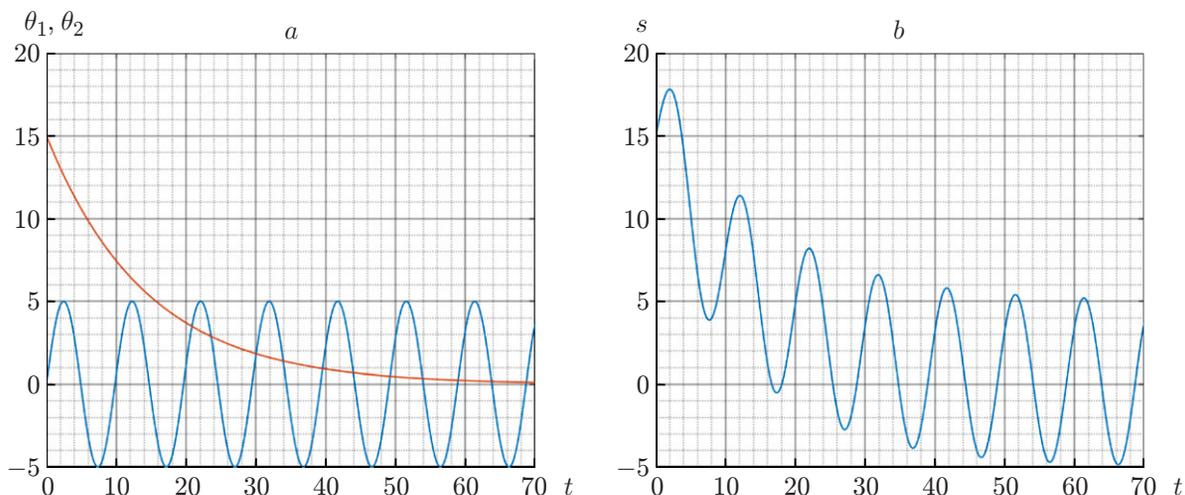


Рис. 1. Зависимости, характеризующие сингулярную помеху: *a* — семейство базисных функций, *b* — сингулярная помеха

При расчётах погрешность операций над числами составляла $2,2 \cdot 10^{-16}$, а результаты вычислений представлены с точностью до четвёртого знака после запятой.

Алгоритм ОИНО реализовывался на полномерном скользящем окне с 21 узлом, при этом первая оценка измеряемого параметра и его производной относится к текущему моменту времени $t_{20} = 20$, а последняя — к моменту $t_{70} = 70$. Именно при $t_{20} = 20$ было сформировано первое полномерное скользящее окно, а при $t_{70} = 70$ — последнее. Поскольку все оценки привязываются к середине скользящего окна, то первая полученная оценка соответствовала моменту $t_{10} = 10$, а последняя — моменту $t_{60} = 60$. Следовательно, приводимые ниже характеристики точности относятся к усечённому отрезку времени $\bar{G}_t = [10, 60]$.

На рис. 1 приведены графики зависимостей, характеризующие сингулярную помеху $s(t)$.

С использованием датчика случайных чисел и принятых исходных данных сформировано уравнение наблюдения, при этом на рис. 2 представлены графики истинного значения выходного параметра $y = \beta$ и наблюдения $h = y + s + \xi$.

Начиная с момента времени $t_n = 20$ для каждого положения скользящего окна (всего 51 положение, т. е. $11 \leq r \leq 61$) формировались текущие оценки β_n^* и $\beta_n^{(1)*}$, соответствующие центральному узлу. Для описания выходной координаты $y(t) = \beta(t)$ в пределах скользящего окна использовалась линейная комбинация из трёх первых полиномов Лежандра, т. е.

$$M_t = 3, \quad \psi_{yk}(t) = P_{k-1}(\tau) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{d^{k-1}[(\tau^2 - 1)^{k-1}]}{d\tau^{k-1}},$$

$$k = \overline{1, 3}, \quad \tau = \tau(t), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Для перехода от параметра $\tau \in [-1, 1]$ к временной координате $t \in [t_{j,r-\bar{n}_j/2-1}, t_{j,r+\bar{n}_j/2-1}] \in G_t$ применялось линейное преобразование

$$t = [t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} + t_{j,r+\bar{n}_j/2-1} - \tau(t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} - t_{j,r+\bar{n}_j/2-1})]/2.$$

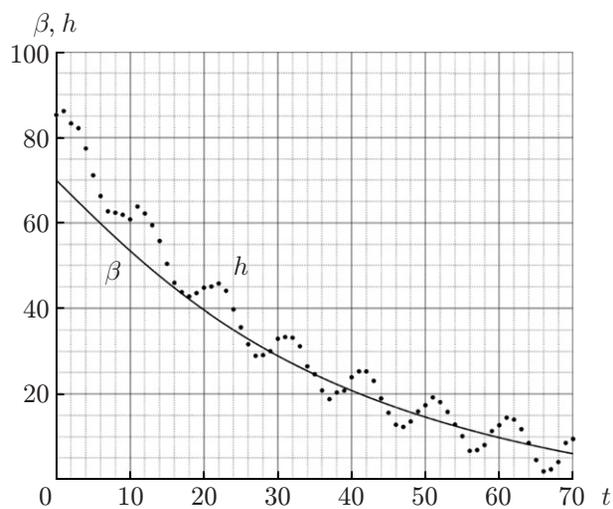


Рис. 2. Графики измеряемого параметра и наблюдения

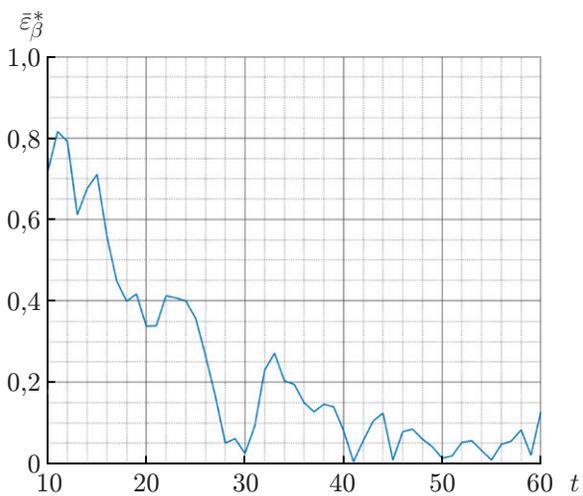


Рис. 3. Невязка оценивания выходной координаты

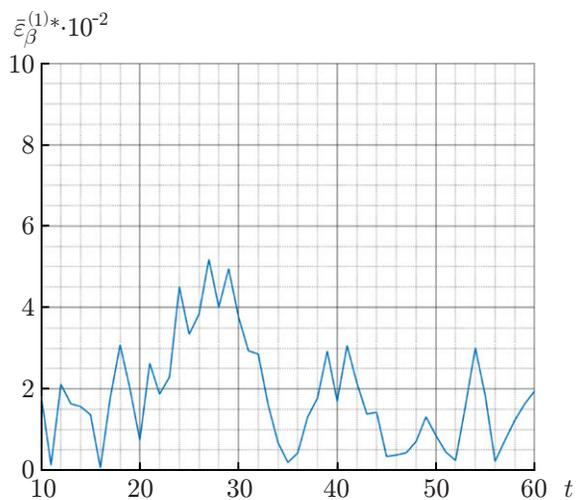


Рис. 4. Невязка оценивания производной выходной координаты

Далее представлены графики зависимости частной невязки $\bar{\varepsilon}_\beta^*$ оценивания выходной координаты (рис. 3) и её производной $\bar{\varepsilon}_\beta^{(1)*}$ (рис. 4) от времени при фиксированном начальном условии $x'_0 = [1,7354; 112; 0,0800]^T$, при этом общая невязка для выходной координаты составляет $\varepsilon_\beta^* = \max_t \bar{\varepsilon}_\beta^* = 0,8162$ (1,5717 %), а для производной $\varepsilon_\beta^{(1)*} = \max_t \bar{\varepsilon}_\beta^{(1)*} = 0,0518$ (5,0601 %).

Результаты моделирования подтверждают возможность эффективного решения задачи оценивания НЛФ на выходных траекториях многомерного ДО даже при некорректных наблюдениях, содержащих сингулярную помеху.

Заключение. Развитый численно-аналитический метод оценивания НЛФ (числовых характеристик) для многомерных ДО ориентирован в первую очередь на случаи, связанные с решением прикладных задач [3–6, 9–12], требующих вычислений в реальном времени. Он предполагает формирование вектор-столбца (для скалярной числовой характеристики) или матрицы весовых коэффициентов (для векторной числовой характеристики) алгоритма ОИНО, учитывающих спектральный состав измеряемых параметров, сингулярной помехи и статистические характеристики флуктуационного шума. Любая линейная числовая характеристика поведения ДО находится в виде скалярного произведения вектора наблюдений и соответствующего вектора весовых коэффициентов.

Развитый метод не предполагает выполнения процедур линеаризации (даже если ДО и его выход являются нелинейными), не требует расширения пространства состояний и не связан с необходимостью самостоятельного расчёта спектральных коэффициентов в линейных комбинациях выходных траекторий и сингулярной помехи. Метод допускает возможность комбинирования с традиционными подходами к решению прикладных задач, связанных с оптимальной обработкой наблюдений, идентификацией и планированием измерительного эксперимента [3–6, 9–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булычев Ю. Г., Кондрашов А. Г., Радуга П. Ю., Ячменёв А. В. Численно-аналитический метод описания и оценивания входных и выходных параметров многомерного динамического объекта. Ч. 1 // Автометрия. 2020. **56**, № 3. С. 68–80. DOI: 10.15372/AUT20200308.
2. Булычев Ю. Г., Кондрашов А. Г., Радуга П. Ю. Идентификация динамического объекта с использованием семейства экспериментальных опорных интегральных кривых // Автометрия. 2019. **55**, № 1. С. 98–110. DOI: 10.15372/AUT20190113.
3. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978. 384 с.
4. Булычев Ю. Г., Манин А. П. Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000. 252 с.
5. Булычев Ю. Г., Васильев В. В., Джуган Р. В. и др. Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов / Под ред. А. П. Манина, В. В. Васильева. М.: Машиностроение–Полет, 2016. 439 с.
6. Булычев Ю. Г., Булычев В. Ю., Ивакина С. С., Насенков И. Г. Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 6. С. 133–143.
7. Булычев Ю. Г., Елисеев А. В. Вычислительная схема инвариантно-несмещённого оценивания значений линейных операторов заданного класса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. **48**, № 4. С. 580–592.

8. **Брандин В. Н., Разоренов Г. Н.** Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
9. **Воробьев Л. М.** К теории полета ракет. М.: Машиностроение, 1970. 223 с.
10. **Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т.** Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974. 340 с.
11. **Красовский А. А.** Науковедение и состояние теории процессов управления. Обзор // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 3–19.
12. **Льюнг Л.** О точности модели в идентификации систем // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1992. № 6. С. 55–64.

Поступила в редакцию 10.09.2019

После доработки 07.11.2019

Принята к публикации 12.11.2019
