

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 621.396.96

ОЦЕНКА ЧАСТОТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛЧМ-СИГНАЛА ПО ВЫБОРКЕ НАРАСТАЮЩЕГО ОБЪЁМА

© В. А. Щербачёв

*Акционерное общество «Всероссийский научно-исследовательский институт “Градиент”»,
344000, г. Ростов-на-Дону, просп. Соколова, 96
E-mail: vove64@mail.ru*

Предложен алгоритм совместной оценки частоты и скорости её изменения по выборке нарастающего объёма сигнала с линейной частотной модуляцией. Предложенный алгоритм допускает рекуррентное вычисление оценок, учитывающих наличие временной корреляции ошибок исходных разностно-фазовых измерений. Метод решения отличается вычислительной эффективностью, а результирующая оценка при возрастании входного отношения сигнал/шум стремится к оптимальной по минимуму дисперсии.

Ключевые слова: ЛЧМ-сигнал, разностно-фазовые измерения, рекуррентная оценка.

DOI: 10.15372/AUT20210101

Введение. Сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) широко используются в системах гидро- и радиолокации, в частности в радиолокаторах с синтезированной апертурой [1]. Кроме того, линейная частотная модуляция возникает в задачах наблюдения сигналов от подвижных источников, например при траекторной обработке объектов дальней космической связи [2].

Цифровая оценка параметров ЛЧМ-сигналов ранее исследовалась в различных постановках, например, в работах [3–5], где предлагались оценки на основе принципа максимального правдоподобия. Оптимизация по полной выборке принятого сигнала, как правило, применяемая в подобных методах, требует значительных вычислительных затрат, что ограничивает их использование в системах реального времени.

Регрессия разностно-фазовой кривой, предложенная в [6] для оценки частоты монохроматического излучения по полной выборке доступных данных, позволяет исключить операции восстановления полной фазы из измеренных по модулю 2π остатков. Но переход от последовательности независимых шумовых отсчётов к последовательным разностям вызывает окраску погрешности исходных данных, требующую учёта при синтезе оценки. Близким прототипом предлагаемого исследования служит работа [5], где параметры ЛЧМ-сигнала оцениваются на основе известного рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК) [7]. Необходимое для применения данной рекуррентной процедуры отсутствие временной корреляции [7] достигается в [6] дополнительными операциями восстановления линии полной фазы. Такие операции, включающие двойные дифференцирование и интегрирование, влекут дополнительные вычислительные издержки и требования к входному отношению сигнал/шум (ОСШ).

В данной работе предлагается оценка частотных параметров ЛЧМ-сигнала по разностно-фазовым измерениям с учётом возникающей окраски шума. Алгоритм, реализующий предложенную оценку, не требует накопления и хранения всей принятой реализации сигнала, а выполняется по выборке нарастающего объёма, что делает его применимым в системах обработки сигналов реального времени.

Целью данной работы являются синтез вычислительно-эффективного алгоритма оценки частоты и скорости её изменения для последовательной выборки разностной фазы входного ЛЧМ-сигнала и исследование достижимой точности полученных оценок.

Постановка задачи. Пусть отсчёты комплексного ЛЧМ-сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного белого шума, удовлетворяют модели

$$x_n = A \exp \left[j2\pi \left(\frac{f_0}{f_S} n + \frac{v}{2f_S^2} n^2 \right) \right] + \zeta_n, \quad n = \overline{0, N}, \quad (1)$$

где A — комплексная амплитуда, f_0 — мгновенная частота в начальный момент наблюдения, v — скорость изменения частоты, f_S — частота дискретизации. Неизвестные параметры модели A , f_0 , v предполагаются постоянными на интервале наблюдения, а комплексный входной шум ζ_n обладает свойствами

$$M\{\zeta_n\} = 0, \quad M\{\zeta_n \zeta_k^*\} = \begin{cases} \sigma_\zeta^2, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \quad (2)$$

где M — математическое ожидание. Предположение об отсутствии взаимной корреляции случайной последовательности ζ_n оправдано выбором частоты дискретизации f_S , согласованной с полосой предварительной фильтрации сигнала (1).

Ставится задача оценки параметров f_0 , v по последовательности разностно-фазовых измерений:

$$\Delta\varphi_n = \angle(x_{n+1}x_n^*) = \theta_0 + \theta_1 n + \Delta\varepsilon_n, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$

где $\Delta\varepsilon_n \approx |A|^{-1} \Im(\zeta_{n+1} - \zeta_n)$; функции $\angle(z)$, $\Im(z)$ означают аргумент и мнимую составляющую комплексного числа z соответственно. Параметры регрессии в (3) определены как

$$\theta_1 = \frac{2\pi v}{f_S^2}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi f_0}{f_S} + \frac{\theta_1}{2}. \quad (4)$$

Для погрешностей измерений $\Delta\varepsilon_n$ известно [5, 6, 8], что при достаточно высоких, например более 10 дБ, входных ОСШ $\rho = |A|^2 \sigma_\zeta^{-2}$ справедливы предположения

$$M\{\Delta\varepsilon_n\} = 0, \quad M\{\Delta\varepsilon_n \Delta\varepsilon_k\} = \frac{1}{2\rho} \begin{cases} 2, & n = k, \\ -1, & |n - k| = 1, \\ 0, & |n - k| > 1, \end{cases} \quad (5)$$

где ненулевая корреляция соседних отсчётов обусловлена функциональной зависимостью соседних отсчётов (3).

В данной работе рассматриваются оценки вектора параметров $\boldsymbol{\theta} = [\theta_0 \ \theta_1]^\top$ по измерениям (3) при сохранении статистических предположений (5). Взаимно однозначное соответствие параметров в (4) позволяет при заданной оценке $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ считать оценками частотных параметров ЛЧМ-сигнала физические величины $f_0(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, $v(\hat{\boldsymbol{\theta}})$.

Оценка по полной выборке. Предположим, что весь набор измерений (3) объединён в вектор $\Delta\boldsymbol{\varphi}(N) \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, тогда оценка Гаусса — Маркова [7] имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(N) = (\mathbf{H}^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{K}^{-1} \Delta\boldsymbol{\varphi}(N) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^\top(N) \\ \mathbf{w}_1^\top(N) \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varphi}(N), \quad (6)$$

$$\text{где } \mathbf{H}(N) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}(N) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{— ковариационная мат-}$$

рица вектора измерений $\Delta\varphi$, нормированная на $(2\rho)^{-1}$ (5); компоненты весовых функций $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ имеют вид

$$w_i^0 = 5\alpha_0 i^3 - \alpha_0(8N+9)i^2 + \alpha_0(3N+4)(N+1)i;$$

$$w_i^1 = -\frac{10\alpha_0}{N-1}i^3 + \alpha_0\left(\frac{30}{N-1} + 15\right)i^2 + \alpha_0\left(\frac{10N(N-1) - 20}{N-1} - 15(N+1)\right)i; \quad (7)$$

$$\alpha_0(N) = \frac{12}{N(N+1)(N+2)(N+3)}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Соотношения (7) получаются из определения (6) прямыми вычислениями с учётом возможности аналитического обращения \mathbf{K}^{-1} [6].

Величина $\hat{\theta}(N)$ в данной работе понимается как искомая оптимальная оценка, а все последующие операции — эффективные способы её вычисления. Явное указание параметра N подчёркивает зависимость оценки (6) от выборки сигнала (1), наблюдаемого на интервале $n = \overline{0, N}$. Согласно второму равенству (6) оценка $\hat{\theta}(N)$ может быть вычислена без матричных операций прямым суммированием данных (3) с весами (7), но предполагает накопление выборки объёма N и вычисление весов, соответствующих данному объёму.

Оценка по выборке нарастающего объёма. Пусть данные (1) поступают последовательно во времени, тогда на каждый момент k ($0 < k \leq N$) для текущего набора отсчётов $0 \leq n \leq k$ доступен вектор измерений $\Delta\varphi(k) \in \mathbb{R}^{k \times 1}$, а потребителя интересует наилучшая оценка $\hat{\theta}(k)$, возможная на данный момент, $k > 2$. Вычисление последовательности оценок $\hat{\theta}(3), \hat{\theta}(4), \dots$ возможно непосредственно из (6), но оно потребует хранения выборки нарастающего объёма и многократного перерасчёта весовых коэффициентов (7) для возрастающего параметра N .

Известный рекуррентный МНК [5, 7], предполагая отсутствие временной корреляции между отсчётами шума исходных измерений, позволяет исключить избыточные вычисления и накопление входной реализации. В рассматриваемом случае (6) применение рекуррентного МНК требует замены матрицы \mathbf{K} единичной матрицей, что снизит оптимальность оценки (6) вследствие её замены невзвешенной среднеквадратической оценкой. С учётом специального вида весовых функций (7) стало возможным построение аналога рекуррентного метода, сохраняющего оптимальные свойства оценки (6).

Поскольку аналогичные специальные случаи могут возникать и в других приложениях, сформулируем сначала схему вычислений в обобщённом виде. Пусть линейная регрессия скалярного параметра θ по последовательности измерений $(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)$ определена в виде

$$\hat{\theta}(k) = \sum_{n=1}^k w_n(k)y_n, \quad w_n(k) = \sum_{m=0}^M q_m(k)n^m, \quad (8)$$

где оптимальные веса $w_n(k)$ имеют полиномиальный вид с заданными коэффициентами $q_m(k)$, $m = \overline{0, M}$. Тогда оценка (8) может быть тождественно представлена в виде

$$\hat{\theta}(k) = \sum_{n=1}^k \left(\sum_{m=0}^M q_m(k) n^m \right) y_n = \sum_{m=0}^M q_m(k) \sum_{n=1}^k y_n n^m. \quad (9)$$

Если на практике порядок M существенно меньше ожидаемых интервалов наблюдения, то последовательный алгоритм оценивания целесообразно записать в виде автомата $A(k)$ со скалярными входом и выходом:

$$y_k \rightarrow \boxed{A(k)} \rightarrow \hat{\theta}(k). \quad (10)$$

Состояние автомата $A(k)$ на каждом такте k характеризуется счётчиком тактов $k = 0, 1, \dots$ от начала наблюдения и $M + 1$ регистрами накопления

$$r_m(k) = \begin{cases} 0, & k \leq 0, \\ r_m(k-1) + y_k k^m, & k > 0, \end{cases} \quad m = \overline{0, M}, \quad (11)$$

а выход автомата (10) согласно (9) имеет вид $\hat{\theta}(k) = \sum_{m=0}^M q_m(k) r_m(k)$.

Подав на вход автомата (10) измерения (3), заметим, что для применения предложенной схемы вычислений к оценке (7), (8) достаточно трёх регистров r_1, r_2, r_3 (11), а результирующие оценки (6) на каждом такте $k > 2$ определяются как

$$\hat{\theta}_0(k) = \sum_{m=1}^3 q_m^0(k) r_m(k); \quad \hat{\theta}_1(k) = \sum_{m=1}^3 q_m^1(k) r_m(k), \quad (12)$$

где соответствующие коэффициенты вычисляются из (7):

$$q_1^0(k) = \alpha_0(k)(3k+4)(k+1); \quad q_2^0(k) = -\alpha_0(k)(8k+9); \quad q_3^0(k) = 5\alpha_0(k);$$

$$q_1^1(k) = 5\alpha_0(k) \left(\frac{2k(k-1)-4}{k-1} - 3(k+1) \right); \quad (13)$$

$$q_2^1(k) = 5\alpha_0(k) \left(\frac{6}{k-1} + 3 \right); \quad q_3^1(k) = -\frac{10\alpha_0(k)}{k-1}.$$

Таким образом, вычисления (11)–(13) обеспечивают последовательность оценок $\hat{\theta}(k)$, каждая из которых совпадает с определением (6) для $N = k$, т. е. является оптимальной в оговорённом смысле на данный момент наблюдения. Сложность вычисления последовательности оценок $\hat{\theta}(3), \hat{\theta}(4), \dots, \hat{\theta}(N)$ согласно предложенному алгоритму (11)–(13) асимптотически составляет $O(N)$ операций против $O(N^2)$ операций, необходимых для вычисления той же последовательности при оценке по полной выборке (6) на каждом шаге. Кроме того, алгоритм (11)–(13) требует фиксированного объёма памяти $O(1)$, не зависящего от времени наблюдений, в отличие от требований к памяти $O(N)$, необходимой для реализации оценки по полной выборке.

Характеристики точности оценки. Для оценок $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$, удовлетворяющих (6), известна [7] ковариационная матрица оценки, которая, учитывая предположения (5), принимает вид

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(k) = \frac{1}{2\rho} (\mathbf{H}(k)^\top \mathbf{K}(k)^{-1} \mathbf{H}(k))^{-1}. \quad (14)$$

При численном моделировании характеристик точности удобно перейти от вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}$ к вектору нормированных, физически безразмерных параметров

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} f_0 f_S^{-1} \\ v f_S^{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

компоненты которого также соответствуют начальной частоте и скорости её изменения, но с необходимой нормировкой на частоту дискретизации. Тогда ковариационную матрицу оценки $\boldsymbol{\nu}(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k))$, учитывая (14), запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{00}^2(k) & \sigma_{01}^2(k) \\ \sigma_{01}^2(k) & \sigma_{11}^2(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi^2\rho} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}}(k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Скалярными характеристиками точности, введёнными в (16), служат среднеквадратические отклонения (СКО) $\sigma_{00}(k)$, $\sigma_{11}(k)$ оценок нормированных начальной частоты и скорости её изменения соответственно.

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма и численной оценки его точности было проведено моделирование ЛЧМ-сигнала, наблюдаемого на фоне псевдослучайного гауссова шума и предложенного алгоритма оценивания. Выборочные результаты проведённого моделирования иллюстрируются на рис. 1–3.

На рис. 1 приведены спектральная плотность мощности (СПМ) входного комплексного ЛЧМ-сигнала с полосой 200 МГц и нулевой центральной частотой, а также спектральная плотность мощности данного сигнала в смеси с шумом при ОСШ $\rho = 10$ дБ.

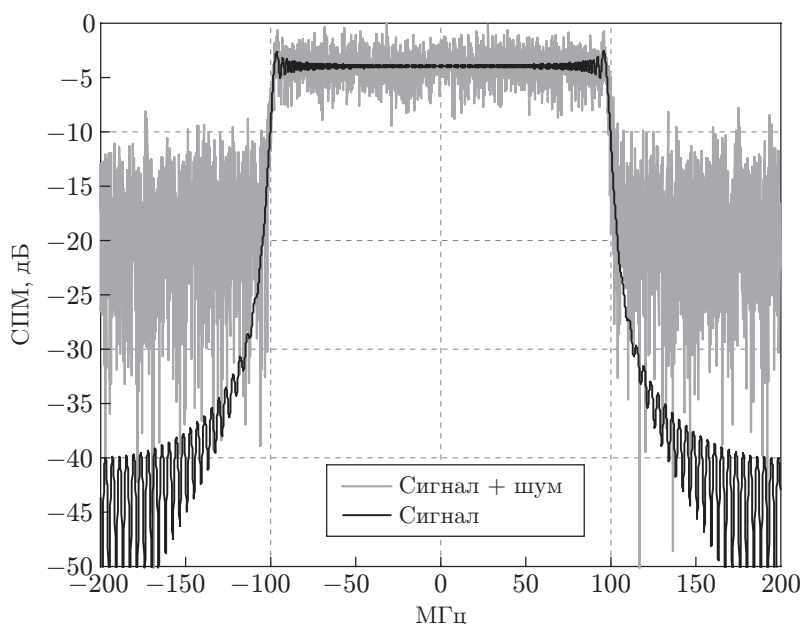


Рис. 1

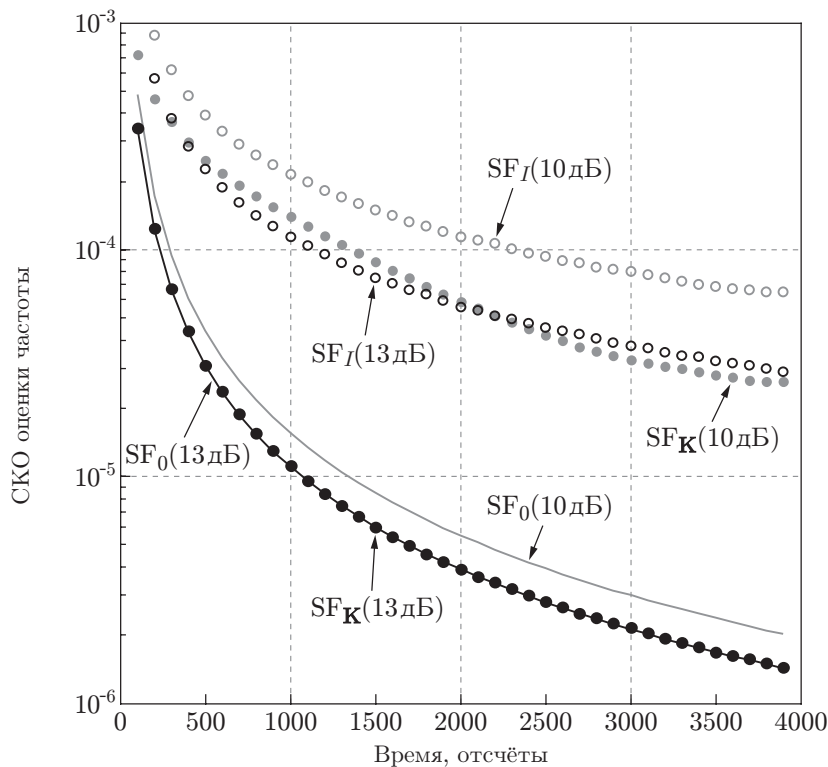


Рис. 2

Моделируемая длительность ЛЧМ-импульса составляла 10 мкс, что при указанной полосе соответствует скорости изменения частоты $\nu = 20$ МГц/мкс, тогда при частоте дискретизации $f_S = 400$ МГц подлежащие оценке нормированные параметры (15) принимают вид $\nu = [-0,25, 0,000125]^T$.

На рис. 2 приведены в логарифмическом масштабе зависимости СКО оценки нормированной начальной частоты от времени для вариантов входного ОСШ 10 дБ и 13 дБ. Непрерывные линии, обозначенные на рис. 2 как $SF_0(10 \text{ дБ})$, $SF_0(13 \text{ дБ})$, отображают теоретические зависимости $\sigma_{00}(k)$ (16) для соответствующих ОСШ.

Линии из точек, обозначенные на рис. 2 как $SF_K(10 \text{ дБ})$, $SF_K(13 \text{ дБ})$, отображают выборочные оценки зависимостей $\sigma_{00}(k)$ для алгоритма оценивания (12), (13). Все выборочные оценки проводились усреднением по серии из 10 000 независимых реализаций входного шума. Линии из окружностей, обозначенные на рис. 2 как $SF_I(10 \text{ дБ})$, $SF_I(13 \text{ дБ})$, отображают выборочные оценки зависимостей $\sigma_{00}(k)$ для алгоритма оценивания (6), но при единичной весовой матрице \mathbf{K} . Такие характеристики, полученные по тем же исходным данным, приведены для анализа выигрыша от учёта окраски шума в (3) по сравнению со среднеквадратической регрессией, пренебрегающей указанной окраской.

На рис. 3 приведены характеристики $\sigma_{11}(k)$ (16) точности оценки нормированной скорости изменения частоты, исследованные для двух вариантов входного ОСШ 10 дБ и 13 дБ. Определения кривых на рис. 3 и условий их вычисления аналогичны описанию к рис. 2 с точностью до замены обозначения SF обозначением SV.

На рис. 2 и 3 можно видеть, что для ОСШ 13 дБ выборочные характеристики точности алгоритма оценивания (12), (13) практически совпадают с теоретическими значениями СКО (16). При исследованных более высоких ОСШ данное соответствие сохранялось, поэтому приведённые характеристики могут быть экстраполированы с помощью (16) для оценки ожидаемой точности оценки. При более низких ОСШ, например 10 дБ, работо-

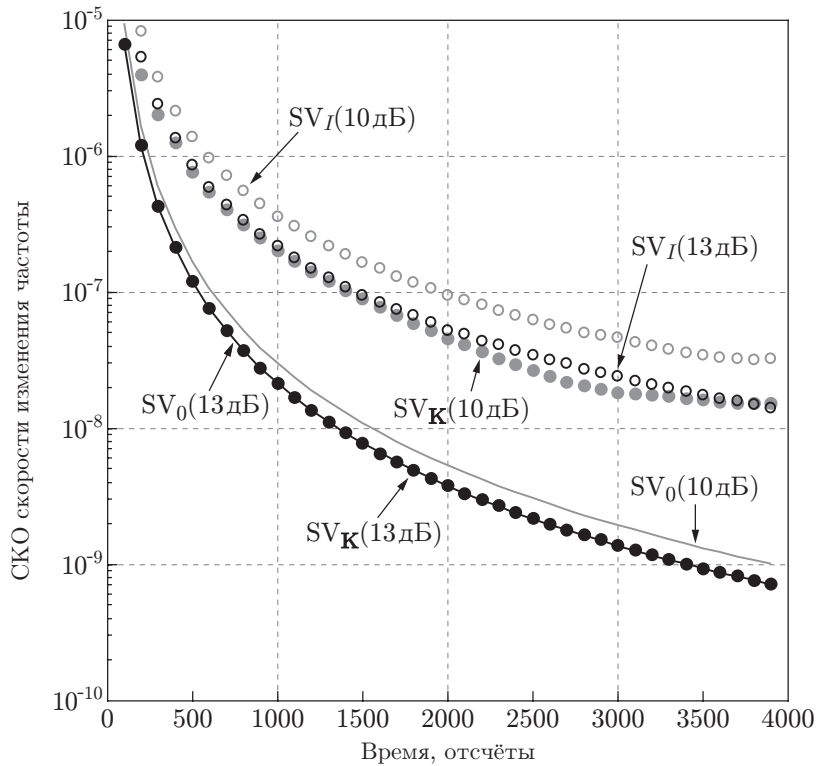


Рис. 3

способность исследованных алгоритмов сохраняется, но отрыв достижимой точности от потенциальной (16) становится достаточно заметным. Пороговый эффект в окрестности 12 дБ является типичным [5, 6, 8] для алгоритмов оценки частоты, основанных на обработке разностно-фазовых измерений, что предопределяет ограничение их близости к оптимальным оценкам.

Кроме того, рис. 2 и 3 иллюстрируют выигрыш от учёта окраски шума (кривые SF_K , SV_K) в отличие от пренебрежения ею (кривые SF_I , SV_I). Всюду учёт окраски улучшил точность оценки, что более выражено при высоком ОСШ, когда предложенная оценка приближается к оптимальной.

При предположениях (5) оценка (6) является несмещённой, а в ходе экспериментальных исследований контролировалось выборочное смещение оценок, которое во всех случаях фиксировалось ниже двух порядков соответствующих выборочных СКО, что граничит с погрешностью статистической оценки по исследованной выборке и подтверждает предположение о практическом отсутствии смещения предложенной оценки.

Заключение. Таким образом, предложен алгоритм цифровой оценки частотных параметров ЛЧМ-сигналов, отличающийся от ранее известных обработкой разностно-фазовых измерений в темпе поступления исходных данных, что позволяет получить текущие оценки частотных параметров ЛЧМ-сигнала по мере поступления отсчётов входного сигнала без накопления его полной выборки. В отличие от известного рекуррентного МНК, требующего отсутствия временной корреляции ошибок исходных данных, предложенная оценка учитывает наличие такой корреляции, возникающей в разностно-фазовых измерениях. В результате такая оценка асимптотически приближается к оценке минимальной дисперсии при возрастании входного ОСШ, а при дополнительном предположении о нормальности шума входного сигнала — к оценке максимального правдоподобия.

Работоспособность предложенного алгоритма проверена методами моделирования и

подтверждается приведёнными результатами при умеренных входных ОСШ. Кроме того, при входных ОСШ от 12 дБ выборочные оценки СКО измерений практически совпадают с соответствующей потенциальной точностью оценки, выражения для которой приведены в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верба В. С., Неронский Л. Б., Осипов И. Г., Турук В. Э.** Радиолокационные системы землеобзора космического базирования. М.: Радиотехника, 2010. 680 с.
2. **Vilnrotter V. A., Hinedi S., Kumar R.** Frequency estimation techniques for high dynamic trajectories // IEEE Trans. on AES. 1989. **25**, N 4. P. 559–577.
3. **Abatzoglou T. J.** Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate // IEEE Trans. on AES. 1986. **22**, N 6. P. 708–715.
4. **Тутыгин В. С., Шедов С. В., Южаков А. В.** Новые адаптивные алгоритмы обнаружения и определения параметров ЛЧМ-сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 16–23.
5. **Djuric P. M., Kay S. M.** Parameter estimation of chirp signals // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process. 1990. **38**, N 12. P. 2118–2126.
6. **Kay S. M.** A fast and accurate single frequency estimator // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Process. 1989. **37**, N 12. P. 1987–1990.
7. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 244 с.
8. **Щербачёв В. А.** Беспойсковая оценка частоты заполнения радиоимпульса // Радиотехника. 2014. № 1. С. 4–8.

Поступила в редакцию 25.07.2020

После доработки 21.09.2020

Принята к публикации 12.10.2020
