

УДК 535.42 : 681.786

ФОРМИРОВАНИЕ В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ АСИММЕТРИЧНОГО АБСОЛЮТНО ОТРАЖАЮЩЕГО КРАЯ 3D-ОБЪЕКТА

© Ю. В. Чугуй^{1,2,3}¹Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,

630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41

²Новосибирский государственный университет,

630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

³Новосибирский государственный технический университет,

630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20

E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru

В аналитическом виде исследованы особенности формирования изображений граней объёмного асимметричного края объекта с абсолютно отражающей внутренней поверхностью применительно к размерному контролю. Получены формулы для расчёта полей в изображениях граней объекта в идеальных и дифракционно-ограниченных системах в зависимости от величины скоса объекта c , сдвига фазы φ волны, отражённой от внутренней поверхности объекта, и угловой апертуры $2\theta_0$ когерентно-оптической системы формирования и фильтрации изображений. Установлено, что для металлических трёхмерных (3D) объектов ($\varphi = \pi$) значение поля в изображении задней грани в точке $\tilde{x}_1 = c$, соответствующей положению её границы, пренебрежимо мало при глубине фокусировки системы много меньше толщины объекта. Показано, что при скосах c объекта, много меньшего размера зоны Френеля $\delta_d \sim \sqrt{\lambda d}$ (λ — длина волны света, d — толщина объекта) и большего глубины фокусировки Δz , смещение профиля интенсивности в изображении передней грани пропорционально c/δ_d и зависит от фазы φ . При больших скосах, когда $c \gg \delta_d$ и $\Delta z \gg d$, смещение границы передней грани обратно пропорционально величине c/δ_d . Указанные смещения могут приводить к систематическим погрешностям измерений положения границ граней 3D-объекта и их нужно учитывать при прецизионном размерном контроле.

Ключевые слова: дифракция Френеля и Фраунгофера, фурье-оптика, пространственная фильтрация, изображения и спектры 3D-объектов, объёмный край, 3D размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20210312

Введение. При разработке когерентно-оптических систем для бесконтактного контроля трёхмерных (3D) объектов в виде протяжённых (по глубине) пластин постоянной толщины с плоскими внутренними гранями с чёткой теневой проекцией возникает потребность в создании теории формирования их дифракционных картин Фраунгофера и изображений. Она должна позволять путём обработки измерительной информации с высокой точностью восстанавливать геометрические характеристики 3D-объектов. Известно, что существующая скалярная теория Кирхгофа — Френеля справедлива лишь для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1] и её применение к 3D-объектам может приводить к значительным погрешностям. Что касается строгих [1, 2] и приближённых [3, 4] теорий для расчёта дифракционных явлений на таких объектах, то они чрезвычайно сложны для применения на практике. С этой точки зрения представляет интерес предложенная в [5] конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах, основанная на модели эквивалентных диафрагм. Она в отличие от известных сравнительно простая (в математическом отношении), физически наглядная и в то же время достаточно точная. Теория

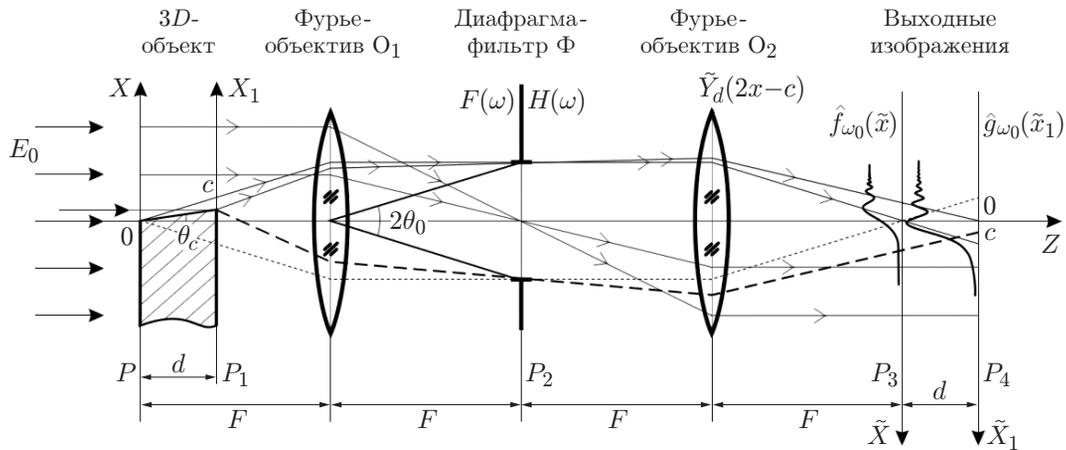


Рис. 1. Схема когерентно-оптической проекционной системы $4F$ для формирования и фильтрации изображений $3D$ -объектов (типа пластин) с чёткой теневой проекцией

позволяет при расчётах полей применять приближение Кирхгофа — Френеля [6] и хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Существенно, что дифракционные явления на таких $3D$ -объектах в значительной степени зависят как от их конфигурации, так и от отражающих свойств их внутренних поверхностей. В [7, 8] изучены вопросы формирования дифракционных полей в дальней зоне и изображений объёмных абсолютно поглощающих пластин несимметричного типа (со скосом c), у которых внутренние грани не перпендикулярны внешним. Они полностью поглощают падающее на них световое излучение. Случаи формирования дифракционных картин и изображений $3D$ абсолютно отражающих металлических пластин симметричного и несимметричного типов исследованы в [9, 10].

Цель работы состояла в исследовании особенностей формирования изображений края абсолютно отражающего несимметричного $3D$ -объекта с произвольным сдвигом фазы волны, отражённой от внутренней поверхности. При расчётах использована предложенная в [5] аппроксимация френелевской функции (комплексного интеграла Френеля) в классе элементарных функций, которая описывает дифракционные явления на полуплоскости. Далее представлены расчёты полей в изображениях передней и задней граней указанных $3D$ -объектов с различными скосами c и сдвигами фаз φ при больших и малых апертурах когерентно-оптической проекционной системы.

Оптическая система для формирования и фильтрации изображений объёмного абсолютно отражающего края объекта и его модель. Обратимся к стандартной когерентно-оптической системе $4F$ для формирования изображений $3D$ -объектов на базе двух фурье-звеньев [6] (рис. 1). Исходный объект в виде объёмного края, освещаемый плоской монохроматической волной света с длиной волны λ и амплитудой света E_0 , устанавливается так, чтобы его передняя грань совпадала с передней фокальной плоскостью P объектива O_1 . Этим объективом в результате прямого преобразования Фурье в задней фокальной плоскости формируется дифракционное поле в дальней зоне — дифракционная картина Фраунгофера $F(\omega)$ ($\omega = k\theta$, θ — угол дифракции). Фактически это поле соответствует сечению $3D$ -спектра трёхмерного объекта (далее будем называть его спектром). Полученное поле $F(\omega)$ фильтруется апертурной диафрагмой — фильтром Φ шириной $2\omega_0$ ($\omega_0 = k\theta_0$, где $k = 2\pi/\lambda$, $2\theta_0$ — угловые размеры диафрагмы). Этим фильтром осуществляется низкочастотная фильтрация поля $F(\omega)$. Полученное распределение далее объективом O_2 подвергается обратному преобразованию Фурье, в результате ко-

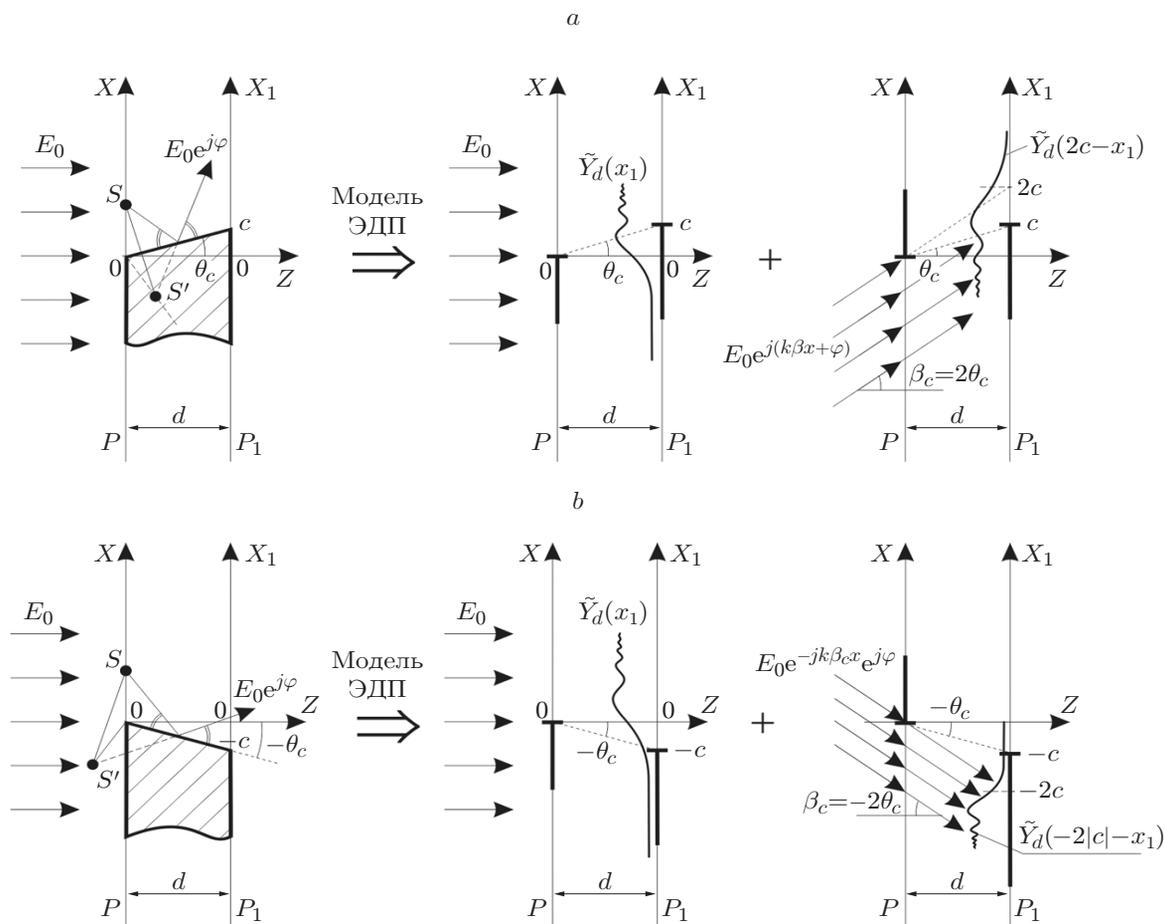


Рис. 2. Общая дифракционная модель объёмного асимметричного абсолютно отражающего края объекта: *a* — с положительным скосом ($c > 0$) и *b* — отрицательным ($c < 0$) скосом; сечение 3D-объекта (слева), модели абсолютно поглощающей компоненты объекта (в центре) и абсолютно отражающей (справа); S — точечный источник света; S' — его мнимое изображение, формируемое зеркальной внутренней поверхностью объекта

того в его задней фокальной плоскости P_3 формируется отфильтрованное изображение передней грани 3D-объекта, а в плоскости P_4 — изображение его задней грани.

Рассматриваемый объект является типичным элементом протяжённых пластин. У такого 3D-объекта внутренняя зеркально отражающая плоская грань составляет с оптической осью угол скоса $\theta_c = c/d$, где c — скос. На рис. 2 (слева) представлены сечения такого объекта и его эквивалентные модели в виде диафрагм (транспарантов) и полей с положительными ($c > 0$) (*a*) и отрицательными ($c < 0$) (*b*) скосами [10]. Такая модель состоит из двух компонент, одна из которых соответствует случаю 3D абсолютно поглощающего края (рис. 2, центр), а другая — учитывает отражение волн (дифрагированных на передней грани) от зеркальной внутренней поверхности со сдвигом по фазе на φ (рис. 2, справа). При этом будем считать, что модуль коэффициента отражения света от внутренней поверхности равен 1 или имеет значение, близкое к такой величине. Это приводит к преобразованию нормальной падающей плоской волны в наклонную $e^{j(k\beta c x + \varphi)}$, причём согласно закону отражения света её угол наклона равен $\beta_c = 2\theta_c = 2c/d$. В результате

граничные функции для такого $3D$ -объекта имеют следующий вид [10]:

$$f_{\text{гр}}(x) = Y(x) + Y(-x) e^{j(k\beta_c x + \varphi)}, \quad g_{\text{гр}}(x_1) = Y(x_1 - c), \quad (1)$$

где $Y(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($Y(x) = 1$ для $x > 0$ и $Y(x) = 0$ для $x < 0$) [6].

Обратим внимание, что в модели абсолютно поглощающей компоненты $3D$ -объекта выходная полуплоскость P_1 , моделирующая заднюю грань $3D$ -объекта, освещается полем $\tilde{Y}_d(x_1)$, которое является френелевским образом ступенчатой функции Хевисайда: $\tilde{Y}_d(x_1) =$

$$= (j\lambda d)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\xi) e^{jk(x_1 - \xi)^2/2d} d\xi \quad [11, 12].$$

В случае же модели отражающей компоненты $3D$ -объекта на выходную полуплоскость P_1 падает распределение $e^{j(k\beta_c x + \varphi)} e^{-j2kc^2/d} \tilde{Y}_d(2c - x_1)$, которое соответствует дифракции Френеля на входной инверсной полуплоскости с пропусканием $Y(-x)$ при освещении её плоской наклонной волной. В обоих случаях результат последующей дифракции поля, прошедшего через выходную полуплоскость, в значительной степени зависит от знака скоса c . Так, при $c > 0$ (задняя грань размещена в освещённой области) значения функций $\tilde{Y}_d(x_1)$ и $\tilde{Y}_d(2c - x_1)$ в точке $x_1 = c$ при большом скосе, когда $c \gg \delta_d$ ($\delta_d = \sqrt{\lambda d}$ — размер зоны Френеля), близки к единице (рис. 2, *a*), а при отрицательном скосе $c < 0$ (задняя грань находится в тени проходящего пучка света) — заметно меньше единицы (рис. 2, *b*).

Найдём распределения амплитуд полей в изображениях передней и задней граней рассматриваемого объёмного асимметричного абсолютно отражающего края объекта, воспользовавшись его дифракционной моделью. При этом будем использовать как спектральный, так и пространственный подход. При спектральном подходе сначала вычисляется поле в дальней зоне — спектр $F(\omega)$ $3D$ -объекта, а затем с помощью обратного преобразования Фурье определяются поля в изображениях его граней.

Нахождение поля в дальней зоне $F(\omega)$. При его определении будем исходить из известной формулы, справедливой для $3D$ -объектов в виде пластин [5]:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\text{гр}}(x) \tilde{g}_d(x + \omega d/k) e^{-j\omega x} dx, \quad (2)$$

где $\tilde{g}_d(\xi) = (j\lambda d)^{-1/2} g_{\text{гр}}(\xi) \otimes e^{jk\xi^2/2d}$ — френелевский образ граничной функции $g_{\text{гр}}(x_1)$ (1). При вычислении $F(\omega)$ разобьём интеграл (2) на два интеграла, соответствующие указанным двум компонентам $3D$ -объекта:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) \tilde{Y}_d(x - c + \omega d/k) e^{-j\omega x} dx + e^{j\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(-x) \tilde{Y}_d(x - c + \omega d/k) e^{-j(\omega - \omega_c)x} dx = F_{\text{п}}(\omega) + F_{\text{отр}}(\omega), \quad (3)$$

где распределения $F_{\text{п}}(\omega)$ и $F_{\text{отр}}(\omega)$ соответствуют спектрам поглощающей (первый интеграл) и отражающей (второй интеграл) компонентам объекта. Первая из них согласно [5] описывается выражением

$$F_{\text{п}}(\omega) = \pi\delta\omega + (j\omega)^{-1} [\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - \omega_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{j\omega^2 d/2k} e^{-j\omega c}], \quad (4)$$

где $\omega_c = k\theta_c = kc/d$, а $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega) = (j\omega_{кр})^{-1}Y(\omega) \otimes e^{j\omega^2 d/2k}$ — френелевский образ ступенчатой функции Хевисайда $Y(\omega)$ в спектральном виде, $\omega_{кр} = k\theta_{кр} = 2\pi/\sqrt{\lambda d}$ ($\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$). Функцию $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega)$ в дальнейшем будем называть спектральной интегральной функцией Френеля.

При вычислении поля $F_{отр}(\omega)$ воспользуемся методикой интегрирования по частям с учётом, что $\omega_\beta = 2kc/d = 2\omega_c$. В результате получим

$$F_{отр}(\omega) = \frac{e^{j\varphi}}{jk(\omega_\beta - \omega)} \tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_\beta) - \frac{e^{j\varphi} \tilde{Y}_d(c)}{j(\omega_\beta - \omega)} e^{-j\omega c} e^{j\omega^2 d/2k}. \quad (5)$$

Подставляя выражения для $F_{п}(\omega)$ и $F_{отр}(\omega)$ в формулу (3), для спектра $3D$ абсолютно отражающего несимметричного края будем иметь

$$F(\omega) = \pi\delta\omega + (j\omega)^{-1}[\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\omega - \omega_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-j\omega c} e^{j\omega^2 d/2k}] + \\ + \frac{e^{j\varphi}}{j(\omega_c - \omega)} [\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_c) - \tilde{Y}_d(c) e^{-j\omega c} e^{j\omega^2 d/2k}]. \quad (6)$$

Видно, что поле $F(\omega)$ содержит две компоненты, первая из которых описывает дифракцию света на $3D$ абсолютно поглощающем несимметричном крае с максимумом интенсивности света в центре спектра ($\theta = 0$), а вторая — соответствует спектру отражённой компоненты с максимумом в направлении угла $\theta = \beta_c = 2\theta_c$ ($\theta_c > 0$). Эта компонента формируется с учётом особенностей отражения световой волны от зеркальной боковой поверхности. В результате мы имеем дело со случаем дифракции света на бипланарной щели при её наклонном освещении (см. рис. 2, справа). Крайне важно, что центр френелевской картины инверсной полуплоскости, освещаемой наклонной плоской волной с углом β_c , смещается на величину $\Delta_c = 2\beta_c d = 2c$ относительно оптической оси Z . Существенно, что при этом расстояние от центра картины до границы задней грани (находящейся на расстоянии c от оптической оси) остаётся неизменным и равным c .

Идеальные изображения граней $3D$ -объекта. Изучим сначала особенности формирования изображений граней $3D$ -объекта при его идеальном проецировании, т. е. в случае когда апертуры элементов оптической системы (объективы O_1 и O_2 , фильтр Φ) не ограничены в пространстве.

Исходя из полученной формулы (6), путём обратного преобразования Фурье нетрудно получить следующее выражение для амплитудного распределения поля в плоскости изображения передней грани:

$$\hat{f}(\tilde{x}) = \mathfrak{S}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathfrak{S}^{-1}\{F_{п}(\omega)\} + \mathfrak{S}^{-1}\{F_{отр}(\omega)\} = \hat{f}_{п}(\tilde{x}) + \hat{f}_{отр}(\tilde{x}), \quad (7)$$

где $\mathfrak{S}^{-1}\{\cdot\}$ — оператор обратного преобразования Фурье, распределения $\hat{f}_{п}(\tilde{x})$ и $\hat{f}_{отр}(\tilde{x})$ — поля в изображениях абсолютно поглощающей и абсолютно отражающей компонент рассматриваемого $3D$ -объекта.

Согласно [13] поле $\hat{f}_{п}(\tilde{x})$ имеет вид

$$\hat{f}_{п}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{п}(\omega) e^{j\omega\tilde{x}} d\omega = 0,5Y(\tilde{x}) + \tilde{Y}_d(c)\tilde{Y}_d^*(\tilde{x} - c) +$$

$$+ \frac{j}{2\pi} Y(\tilde{x}) \otimes \frac{1}{\tilde{x}} e^{-jk\tilde{x}^2/2d} e^{-jkc\tilde{x}/d}. \quad (8)$$

При нахождении поля $\hat{f}_{\text{отр}}(\tilde{x})$ абсолютно отражающей компоненты $3D$ -объекта воспользуемся известным соотношением [7]

$$\mathfrak{S}^{-1}\{\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - \omega_c)\} = 0,5\delta(\tilde{x}) + \frac{j}{2\pi} \frac{e^{-jk\tilde{x}^2/2d}}{\tilde{x}} e^{-jkc\tilde{x}/d}. \quad (9)$$

При этом учтём, что $\mathfrak{S}^{-1}\{[j(\omega - \omega_\beta)]^{-1}\} = 0,5 \operatorname{sgn}(\tilde{x}) e^{j\omega_\beta \tilde{x}}$ [6]. В результате для поля $\hat{f}_{\text{отр}}(\tilde{x})$ можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\text{отр}}(\tilde{x}) &= 0,25 e^{j\varphi} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) e^{j\omega\beta c\tilde{x}} + \\ &+ 0,5 e^{j\varphi} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) e^{j\omega\beta c\tilde{x}} \otimes \left[\frac{j}{2\pi} \frac{e^{-jk\tilde{x}^2/2d}}{\tilde{x}} e^{-jkc\tilde{x}/d} - \tilde{Y}_d(c) \tilde{Y}_d^*(\tilde{x} - c) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

С учётом выражений (8) и (10) для суммарного амплитудного распределения поля в изображении передней грани исследуемого объекта имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}(\tilde{x}) &= 0,5Y(\tilde{x}) + \tilde{Y}_d(c) \tilde{Y}_d^*(\tilde{x} - c) + \frac{j}{2\pi} Y(\tilde{x}) \otimes \frac{e^{-jk\tilde{x}^2/2d}}{\tilde{x}} e^{-jkc\tilde{x}/d} + 0,25 e^{j\varphi} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) e^{j\omega\beta c\tilde{x}} + \\ &+ 0,5 e^{j\varphi} \operatorname{sgn}(\tilde{x}) e^{j\omega\beta c\tilde{x}} \otimes \left[\frac{j}{2\pi} \frac{e^{-jk\tilde{x}^2/2d}}{\tilde{x}} e^{-jkc\tilde{x}/d} - \tilde{Y}_d(c) \tilde{Y}_d^*(\tilde{x} - c) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдём далее поле $\hat{g}_{\text{п}}(\tilde{x}_1)$ в изображении задней грани абсолютно отражающего $3D$ асимметричного края. Примем во внимание, что согласно нашей модели $3D$ -объекта в виде эквивалентных диафрагм и полей (1) в плоскости P_1 задней грани имеет место наложение двух волн, соответствующих абсолютно поглощающей и абсолютно отражающей компонентам $3D$ -объекта. Первая из них является френелевским изображением $\tilde{Y}_d(x_1)$ полуплоскости с пропусканием $Y(x)$, формируемым в свете нормально падающей волны, а вторая — френелевским изображением инверсной полуплоскости с пропусканием $Y(-x)$ при освещении её плоской наклонной волной $e^{j(k\beta c x + \varphi)}$. Полученные френелевские распределения модулируются далее распределением $Y(x_1 - c)$, соответствующим смещённой полуплоскости, моделирующей заднюю грань. В результате для поля за плоскостью P_1 (рис. 3) можно записать выражение

$$\begin{aligned} g(x_1) &= Y(x_1 - c) \left[\tilde{Y}_d(x_1) + \frac{e^{j\varphi}}{\sqrt{j\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(-x) e^{jk\beta c x} e^{jk(x-x_1)^2/2d} dx \right] = \\ &= [\tilde{Y}_d(x_1) + e^{j\varphi} e^{-j2kc^2/d} e^{jk\beta c x_1} \tilde{Y}_d(2c - x_1)] Y(x_1 - c). \end{aligned} \quad (12)$$

Что касается поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в изображении задней грани, формируемого в дифракционно-ограниченной системе, то согласно (12) оно описывается выражением

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = g(\tilde{x}_1) \otimes \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x}_1)}{\pi \tilde{x}_1}. \quad (15)$$

Случай 3D-объекта с малыми скосами. Рассмотрим поведение поля при скосе c объекта, малом по сравнению с размером зоны Френеля: $c \ll \delta_d = \sqrt{\lambda d}$ ($\theta_c = c/d \ll \ll \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$). Ограничимся случаем слабой объёмности, когда угловой размер апертуры θ_0 много меньше критического угла дифракции, т. е. при $\theta_0 \ll \theta_{кр}$ ($N = \theta_{кр}/\theta_0 \gg 1$). При этом выберем $\theta_c \gg \theta_0$. Таким образом, для указанных углов имеют место следующие неравенства: $\theta_0 \ll \theta_c \ll \theta_{кр}$. Если теперь учесть, что в этом случае спектральную интегральную функцию Френеля смещённого вида $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_c)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_c) = 0,5 + e^{-j\pi/4}(\omega - \omega_c)/\omega_{кр}$ [7], то для поля $F(\omega)$ согласно (6) получим

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{e^{j\pi/4}(1 - e^{j\varphi})\sqrt{\lambda d}}{2\pi} - 0,5c. \quad (16)$$

Примем во внимание, что при большой глубине фокусировки $\Delta d = \lambda/\theta_0^2 \gg d$ ($N \gg 1$) поля $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ и $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в плоскостях изображений P_3 и P_4 передней и задней граней слабо отличаются друг от друга. В результате для них можно получить выражение

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) &\approx \hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega\tilde{x}} d\omega = \\ &= \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}) - (1 - e^{j\varphi}) e^{j\pi/4} \sqrt{\lambda d} \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x})}{2\pi^2 \tilde{x}} - 0,5c \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x})}{\pi \tilde{x}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где функция $\Phi_{\omega_0}(\tilde{x}) = Y(x) \otimes \sin(\omega_0 \tilde{x})/(\pi \tilde{x})$.

Видно, что первый член в (17) описывает поле в изображении плоского края ($d = 0$) в дифракционно-ограниченной системе. Наличие второго члена, не зависящего от скоса c , обусловлено влиянием объёмности 3D-края, причём амплитуда его пропорциональна $1 - e^{j\varphi}$ и, таким образом, зависит от отражающих свойств материала. Так, при нулевом сдвиге фазы волны ($\varphi = 0$) этот член отсутствует. В случае же металлического отражающего объекта ($\varphi = \pi$) имеет место двойное увеличение амплитуды члена, соответствующего первичной дифракции света (в сравнении со случаем абсолютно поглощающего края). И наконец, третий член пропорционален скосу c .

Ввиду важности металлического объекта в оптической измерительной практике остановимся более подробно на его изображающих особенностях. Подставляя в формулу (17) значение $\varphi = \pi$, для распределения интенсивности поля $I(\tilde{x})$ в изображении данного 3D-объекта имеем

$$I(\tilde{x}) = |f_{\omega_0}(\tilde{x})|^2 \approx \Phi_{\omega_0}^2(\tilde{x}) - \frac{\sqrt{2\lambda d} \sin(\omega_0 \tilde{x})}{\pi} \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x})}{\pi \tilde{x}} - c \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}) \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x})}{\pi \tilde{x}}. \quad (18)$$

Аналогично процедуре, выполненной в [10], нетрудно найти выражение для смещения профиля $\varepsilon_{отр}^{(\Sigma)}$ интенсивности (19) в изображении рассматриваемого объекта. Расчёты показывают, что

$$\varepsilon_{отр}^{(\Sigma)} = -0,22\sqrt{\lambda d} - 0,5c. \quad (19)$$

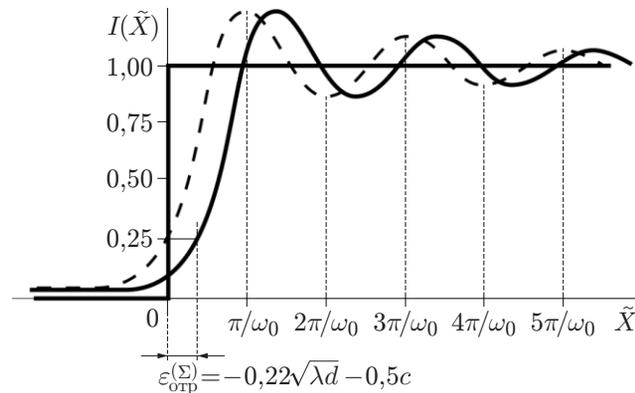


Рис. 4. Распределение интенсивности света в дифракционно-ограниченных изображениях передней и задней граней объёмного абсолютно отражающего металлического края в случае малых скосов ($c \ll \sqrt{\lambda d}$) и слабых объёмных эффектов ($\theta_0 \ll \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$) (сплошная кривая); штриховой кривой показано распределение интенсивности в изображении несмещённой полуплоскости ($d = c = 0$)

В качестве примера на рис. 4 приведён график распределения интенсивности света (18) в случае слабых объёмных эффектов анализируемого абсолютно отражающего металлического края протяжённого объекта.

Случай 3D-объекта с большими скосами. Исследуем формирование изображения передней грани абсолютно отражающего 3D асимметричного края в случае больших скосов, когда $c \gg \sqrt{\lambda d}$ ($\theta_c \gg \theta_{кр}$). Будем полагать, что угловой размер апертурной диафрагмы фильтра $\theta_0 \ll \theta_c$, причём $\theta_{кр} \gg \theta_0$. Иными словами, имеет место следующее неравенство: $\theta_0 \ll \theta_{кр} \ll \theta_c$. Для вычисления искомого поля $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ обратимся к формуле (6). Используем далее впервые предложенную в [5] конструктивную аппроксимацию френелевского образа $\tilde{Y}_d(x)$ ступенчатой функции Хевисайда $Y(x)$ в пространственной области для случая представления её в спектральном виде $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega)$. В этом случае спектр $F(\omega)$ исследуемого объекта согласно (4) можно записать выражением

$$\begin{aligned}
 F(\omega) = & \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \left[Y(\omega - \omega_c) - \frac{0,5 e^{j(\omega - \omega_c)^2 d/2k}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\omega - \omega_c)/\omega_{кр} + \text{sgn}(\omega - \omega_c)} + \right. \\
 & \left. + \tilde{Y}_d(c) e^{-j\omega c} e^{j\omega^2 d/2k} \right] + \frac{e^{j\varphi}}{j(2\omega_c - \omega)} \left[Y(\omega - \omega_c) - \right. \\
 & \left. - \frac{0,5 e^{j(\omega - \omega_c)^2 d/2k}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\omega - \omega_c)/\omega_{кр} + \text{sgn}(\omega - \omega_c)} - \tilde{Y}_d(c) e^{-j\omega c} e^{j\omega^2 d/2k} \right], \quad (20)
 \end{aligned}$$

где коэффициент $\alpha = \sqrt{j\lambda d}/\beta$, причём $\beta = 2$ при $\omega \ll \omega_{кр}$ и $\beta = \pi$ при $\omega \gg \omega_{кр}$. Принимая во внимание, что $\sqrt{\lambda d}/c = \omega_{кр}/\omega_c$, $\omega_0 \ll \omega_c$, $\omega_c \gg \omega_{кр}$, а $Y(\omega - \omega_c) = 0$, полученное выражение можно заметно упростить:

$$F(\omega) = \left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) e^{-j\omega c} - \frac{1}{j\alpha} \frac{e^{j\varphi} e^{-j\omega c}}{(2\omega_c - \omega)} + \frac{(1 + e^{j\varphi})\omega_{кр} e^{-j\omega c} e^{j(kc^2/2d + \pi/4)}}{j2\alpha(\omega_c - \omega)\omega_c}. \quad (21)$$

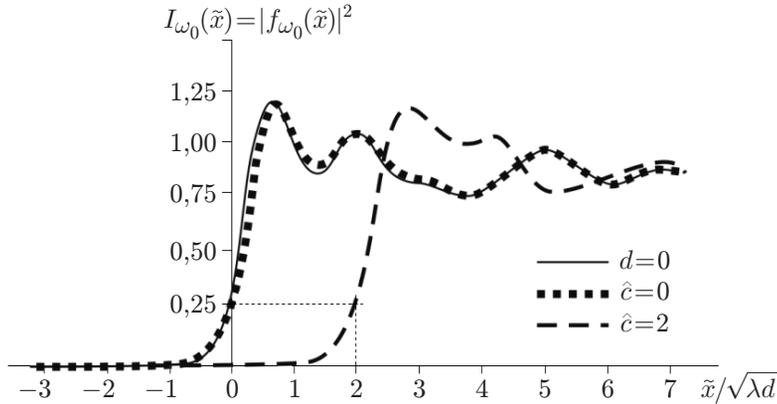


Рис. 5. Распределение интенсивности света в дифракционно-ограниченном изображении передней грани в случае больших скосов $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d} \gg 1$ и слабых объёмных эффектов ($\theta_0 \ll \theta_{кр} \ll \theta_c = c/d$)

Если теперь полученное распределение пропустить через низкочастотный фильтр $H(\omega) = \text{Rect}(\omega/2\omega_0)$, то на выходе оптической системы в плоскости P_3 формируется изображение передней грани с распределением поля (с учётом $\omega_c \gg \omega_0$) в виде

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = & \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} - c) - \frac{e^{j\varphi} \sqrt{\lambda d}}{j4\pi\hat{c}} \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} - c)]}{\pi(\tilde{x} - c)} + \\ & + \frac{(1 + e^{j\varphi})\sqrt{\lambda d}}{4\pi^2\hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} - c)]}{\pi(\tilde{x} - c)} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из анализа полученного поля следует, что, кроме основного члена $\Phi_{\omega_0}(\tilde{x} - c)$, описывающего изображение смещённой полуплоскости в дифракционно-ограниченной системе, в поле $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$ присутствуют ещё два дополнительных члена. Первый из них обусловлен влиянием отражённой компоненты поля и обратно пропорционален скосу c . Второй член обратно пропорционален квадрату скоса c и пропорционален коэффициенту $1 + e^{j\varphi}$, который изменяется от максимального значения, равного двум, при $\varphi = 0$ до минимального, равного нулю, при $\varphi = \pi$. Можно видеть, что основной вклад в поле (22) среди дополнительных членов даёт отражающая первая компонента.

На рис. 5 приведены результаты компьютерных расчётов профилей интенсивности света в изображении передней грани протяжённого абсолютно отражающего (металлического) края объекта в дифракционно-ограниченной оптической системе для случаев плоского ($d = 0$) и объёмного краёв с нулевым скосом ($c = 0$) и со скосом (приведённым) $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d} = 2$. Видно, что уже при скосе $\hat{c} = 2$ поле на выходе системы определяется второй гранью: интенсивность света в этой точке с хорошей точностью равна 0,25, что имеет место для плоского края ($d = 0$).

Дифракционно-ограниченное изображение задней грани 3D-объекта. Найдём поле $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в плоскости P_4 изображения задней грани (см. рис. 1) при больших объёмных эффектах, когда $N = \theta_{кр}/\theta_0 \ll 1$, т. е. когда глубина резкости системы Δz много меньше толщины объекта: $\Delta z = \lambda/\theta_0^2 \ll d$. При вычислении $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ будем исходить из

распределения поля в плоскости P_1 , задаваемого формулами (12) и (15), что соответствует пространственному подходу нахождения поля:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = [(\tilde{Y}_d \tilde{x}_1) + e^{j\varphi} e^{-j2kc^2/d} e^{j2kcx_1/d} \tilde{Y}_d(2c - x_1)] Y(x_1 - c) \otimes \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x}_1)}{\pi \tilde{x}_1}. \quad (23)$$

Рассмотрим сначала случай 3D-объектов с малыми скосами, при которых c много меньше размера зоны Френеля $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$, т. е. при $c \ll \delta_d$. С учётом этого условия, а также принимая во внимание, что $N = \theta_{кр}/\theta_0 = \Delta/\sqrt{\lambda d} \ll 1$ ($\Delta = \lambda/\theta_0$ — характерный размер импульсного отклика), разложим интегральные функции Френеля $\tilde{Y}_d(x)$ и $\tilde{Y}_d(2c - x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 2c$ соответственно [5]:

$$\tilde{Y}_d(x) \approx 0,5 + \frac{e^{-j\pi/4} x}{\sqrt{\lambda d}}, \quad \tilde{Y}_d(2c - x) \approx 0,5 + e^{-j\pi/4} \frac{2c - x}{\sqrt{\lambda d}}.$$

Подставив полученные разложения в формулу (23), для поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ получим

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \left\{ \left[0,5 + \frac{e^{-j\pi/4} \tilde{x}_1}{\sqrt{\lambda d}} + e^{j(2kc\tilde{x}_1/d - 2kc^2/d + \varphi)} \left(0,5 + e^{-j\pi/4} \frac{2c - \tilde{x}_1}{\sqrt{\lambda d}} \right) \right] Y(\tilde{x}_1 - c) \right\} \otimes \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x}_1)}{\pi \tilde{x}_1}. \quad (24)$$

Так как скос $c \ll \sqrt{\lambda d}$, то функция $e^{-j2kc^2/d} = 1$. Если теперь положить, что характерный размер импульсного отклика системы $\Delta = \lambda/\theta_0$ много меньше периода функции $e^{j2kc\tilde{x}_1/d}$, равного $T \sim \lambda d/4c$, что имеет место при $\theta_c = c/d \ll \theta_0$, то эта функция будет близка к единице. С учётом (24) для поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ нетрудно получить следующее выражение:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \left[0,5 + 0,5 e^{j\varphi} + \frac{2 e^{j(\varphi - \pi/4)}}{\sqrt{\lambda d}} c + \frac{(1 - e^{j\varphi}) e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \tilde{x}_1 \right] \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - c) - \frac{(1 - e^{j\varphi}) e^{-j\pi/4} \cos[\omega_0(\tilde{x}_1 - c)]}{\sqrt{\lambda d} \pi \omega_0}. \quad (25)$$

Проанализируем полученное выражение (25) при различных значениях φ . В случаях отсутствия скачка фазы при отражении света от поверхности 3D-объекта, т. е. при $\varphi = 0$, выражение (26) принимает вид

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = (1 + 2 e^{-j\pi/4} c/\sqrt{\lambda d}) \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - c). \quad (26)$$

При этом интенсивность поля описывается выражением

$$I(\tilde{x}_1) = |\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)|^2 = [1 + 4c/\sqrt{2\lambda d} + 4c^2/\lambda d] \Phi_{\omega_0}^2(\tilde{x}_1 - c) \quad (27)$$

и в точке $\tilde{x}_1 = c$ она имеет вид

$$I(\tilde{x}_1 = c) \approx 0,25 + c/\sqrt{2\lambda d}. \quad (28)$$

В случае металлического $3D$ -объекта ($\varphi = \pi$) амплитуда поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ и его интенсивность $\tilde{I}(\tilde{x}_1)$ изменяются следующим образом:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \frac{2(\tilde{x}_1 - c) e^{-j\pi/4}}{\sqrt{\lambda d}} \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - c) - \frac{2 e^{-j\pi/4}}{\pi \sqrt{\lambda d} \omega_0} \cos[\omega_0(\tilde{x}_1 - c)], \quad (29)$$

$$I(\tilde{x}_1) = |\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)|^2 = \frac{4}{\lambda d} \left[(\tilde{x}_1 - c) \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - c) - \frac{\cos[\omega_0(\tilde{x}_1 - c)]}{\pi \omega_0} \right]^2. \quad (30)$$

Существенно, что при наложенном выше условии $N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \ll 1$ значение интенсивности в точке $\tilde{x}_1 = c$ оказывается, как и следовало ожидать, пренебрежимо малым:

$$I(\tilde{x}_1 = c) = \frac{4}{\pi^2 \lambda d \omega_0^2} = \frac{\lambda}{\pi^4 d \theta_0^2} = \frac{N^2}{\pi^4}. \quad (31)$$

Например, при $N = 0,3$ оно составляет 0,1 % от интенсивности падающей на объект волны.

Этот результат согласуется с ранее полученным для случая формирования идеального изображения $3D$ -объекта, согласно которому интенсивность поля в точке $\tilde{x}_1 = c$ равна нулю. Отличие интенсивности в (31) от нуля объясняется влиянием конечных размеров импульсного отклика.

Исследуем теперь структуру поля в изображении задней грани $3D$ -объекта в ситуации, когда скос c много больше размера зоны Френеля, т. е. при $c \gg \delta_d = \sqrt{\lambda d}$ ($\theta_c \gg \theta_{\text{кр}}$) (см. рис. 3). Выберем $\theta_0 \gg \theta_c$. Интегральные функции Френеля $\tilde{Y}_d(x_1)$ и $\tilde{Y}_d(2c - x_1)$ в этом случае можно аппроксимировать следующим образом [14]:

$$\tilde{Y}_d(x_1) = Y(x_1) - \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j(kx_1^2/2d + \pi/4)}}{2\pi x_1}, \quad \tilde{Y}_d(2c - x_1) = Y(2c - x_1) - \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j[k(2c - x_1)^2/2d + \pi/4]}}{2\pi(2c - x_1)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (23), для поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ в изображении задней грани с учётом $c < x < 2c$ получим

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \left\{ \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j(kx_1^2/2d + \pi/4)}}{2\pi x} + e^{j(2kcx_1/d - 2kc^2/d + \varphi)} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j[k(2c - x_1)^2/2d + \pi/4]}}{2\pi(2c - x_1)} \right) \right] \times Y(\tilde{x}_1 - c) \right\} \otimes \frac{\sin(\omega_0 \tilde{x}_1)}{\pi \tilde{x}_1}. \quad (32)$$

Как уже отмечалось, с точки зрения размерного контроля для нас представляет интерес, прежде всего, поведение поля (32) в окрестности точки $\tilde{x}_1 = c$, которая задаёт геометрическое положение границы задней грани $3D$ -объекта. А так как $\theta_c \ll \theta_0$, то функция $\sin(\omega_0 \tilde{x}_1)/(\pi \tilde{x}_1)$ выступает по отношению к фазовым функциям $e^{j2kcx_1/d}$ и $e^{jkx_1^2/2d}$ как дельта-функция, т. е. функцией бесконечно малой ширины $\Delta \sim \lambda/\theta_0$, которая заметно меньше характерных параметров указанных фазовых функций. Поэтому при вычислении интеграла свёртки эти функции можно вынести из подынтегрального выражения. То же самое можно сделать по отношению к функциям x^{-1} и $(2c - x)^{-1}$, которые в пределах

переходной области в изображении края меняются незначительно. И таким образом в вычислении интеграла свёртки участвует лишь ступенчатая функция Хевисайда $Y(x - c)$. С учётом сделанных допущений поле (32) для $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ принимает вид

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} - c) \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi x} e^{j(k\tilde{x}^2/2d + \pi/4)} + e^{j2kc\tilde{x}/d} e^{-j2kc^2/d} e^{j\varphi} - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi(2c - \tilde{x})} e^{j(k\tilde{x}^2/2d + \varphi + \pi/4)} \right]. \quad (33)$$

Найдём значение поля в точке $\tilde{x}_1 = c$:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1 = c) = 0,5(1 + e^{j\varphi}) \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi c} e^{j(kc^2/2d + \pi/4)} \right]. \quad (34)$$

В случае $\varphi = 0$ значения амплитуд и интенсивности поля в точке $\tilde{x}_1 = c$ запишем выражениями:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1 = c) = 1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{2\pi c} e^{j(kc^2/2d + \pi/4)}, \quad (35)$$

$$I_{\omega_0}(\tilde{x}_1 = c) = |\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1 = c)|^2 \approx 1 - \frac{\sqrt{\lambda d}}{\pi c} \cos\left(\frac{kc^2}{2d} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (36)$$

Видно, что при $c \gg \sqrt{\lambda d}$ значение интенсивности света в точке $\tilde{x}_1 = c$ отличается от интенсивности света волны, освещающей 3D-объект, на малую величину, пропорциональную $\sqrt{\lambda d}/c$.

Если рассмотреть поле в дальней зоне от металлического 3D асимметричного края объекта ($\varphi = \pi$) в точке $\tilde{x}_1 = c$, то из (33) будем иметь, что амплитуда поля в точке $\tilde{x}_1 = c$ равна нулю, т. е. $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1 = c) = 0$. На первый взгляд этот результат совпадает с тем, который был получен для случая идеального (дифракционно-неограниченного) формирования изображений граней объёмного абсолютно отражающего асимметричного края объекта (см. (12) при $\varphi = \pi$ и $\tilde{x}_1 = c$). Однако при строгом расчёте поля $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$ с учётом реального поведения интегральных функций Френеля $\tilde{Y}_d(x_1)$ и $\tilde{Y}_d(2c - x_1)$, а также импульсного отклика дифракционно-ограниченной оптической системы значение этого поля в точке $\tilde{x}_1 = c$ хотя и будет достаточно малой величиной, но всё-таки отличной от нуля.

Заключение. Исследованы особенности формирования изображений граней 3D-объектов постоянной толщины в виде пластин несимметричного типа с абсолютно отражающими плоскими внутренними гранями. При расчётах использовалась ранее предложенная нами конструктивная теория дифракционных явлений на 3D-объектах постоянной толщины. В основу аналитических расчётов положена аппроксимация интегральной функции Френеля (комплексного вида) элементарными функциями. Расчёты выполнялись для указанных 3D-объектов с различными скосами c и фазовыми сдвигами φ волн, отражённых от внутренней поверхности, а также с различными угловыми апертурами θ_0 оптической системы.

Получены формулы для полей в случае формирования идеальных (дифракционно-неограниченных) изображений граней 3D-объектов. Установлено, что наличие в поле компоненты, отражённой от внутренней поверхности объекта, может приводить к значительным изменениям структуры поля в изображении 3D-объекта. Так, в случае металлических

объектов поле в изображении полуплоскости, моделирующей заднюю грань $3D$ -объекта в точке $\tilde{x}_1 = c$ (соответствующей её границе), равно нулю при различных значениях угла скоса c . Это объясняется компенсирующим действием волны, отражённой от внутренней поверхности $3D$ -объекта.

Изучены структуры полей в дифракционно-ограниченном изображении передней грани пластины при больших и малых их скосах в случае, когда глубина фокусировки системы много больше толщины объекта. Показано, что при малых скосах c , много меньших зоны Френеля $\delta_d = \sqrt{\lambda z}$, имеет место смещение профиля интенсивности изображения передней грани, пропорциональное зоне Френеля δ_d и скосу c . Оно зависит также от сдвига фазы φ волны, отражённой от внутренней поверхности $3D$ -объекта. Такое смещение может приводить к систематической погрешности измерений положения границы передней грани объекта. В случае больших скосов ($c \gg \delta_d$) смещение профиля интенсивности изображения передней грани относительно её геометрической границы обратно пропорционально скосу c .

Исследована структура поля в изображении задней грани $3D$ -объекта с различными скосами и сдвигами фазы φ в случае, когда глубина фокусировки системы много меньше толщины объекта. Показано, что в случае металлических объектов ($\varphi = \pi$) при произвольных скосах значение поля в изображении границы задней грани близко к нулю вследствие компенсирующего эффекта отражённой компоненты.

Результаты исследования могут быть использованы при разработке когерентно-оптических систем для $3D$ прецизионного контроля объектов.

Благодарности. Автор выражает благодарность Е. С. Арсениной за техническую помощь при подготовке статьи.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация проекта № АААА-А17-117121270018-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Хенл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
3. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
4. Keller J. V. Geometrical theory of diffraction // JOSA. 1962. **52**, Iss. 2. P. 116–130.
5. Chugui Yu. V., Krivenkov B. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. **6**, N 5. P. 617–626.
6. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
7. Чугуй Ю. В. Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
8. Чугуй Ю. В. Расчёт изображений объёмного асимметричного абсолютно поглощающего края объекта в когерентном свете // Автометрия. 2020. **56**, № 6. С. 78–90. DOI: 10.15372/AUT20200608.
9. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на отражающих объёмных телах постоянной толщины // Автометрия. 1991. № 4. С. 113–118.
10. Chugui Yu. V., Sokolov V. A. Formation and filtering in coherent light the images of 3D asymmetric edges // Proc. of 6th ISMQC IMEKO Symp. Metrology for Quality Control in Production. Vienna, Austria, 8–10 Sept., 1998. P. 117–124.
11. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
12. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамова, И. Стишина. М.: Наука, 1979. 832 с.

13. **Чугуй Ю. В.** Фурье-оптика 3D-объектов применительно к размерному контролю // Оптико-информационные измерительные и лазерные технологии и системы: Сб. тр. КТИ НП СО РАН. Новосибирск: Изд-во «Гео», 2012. С. 15–42.
14. **Чугуй Ю. В.** Расчёт и анализ импульсного отклика проекционных пространственно-неинвариантных систем // Автометрия. 2018. 54, № 6. С. 34–47. DOI: 10.15372/AUT20180604.

Поступила в редакцию 31.03.2021

После доработки 08.04.2021

Принята к публикации 08.04.2021
