

УДК 004.93

О ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИХ ДРЕВОВИДНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

© М. М. Ланге, С. В. Парамонов

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
119333, Москва, ул. Вавилова, 42
E-mail: lange-mm@mail.ru, psupobox@gmail.com*

Исследуется точность классификации в терминах зависимости вероятности ошибки от количества обрабатываемой информации в пространстве древовидно-структурированных представлений распознаваемых объектов. Для заданного множества объектов приводится нижняя граница вероятности ошибки как функция средней взаимной информации между объектами и оценками их классов. Предлагается алгоритм направленного поиска решения о классе предъявляемого объекта по многоуровневым разделяющим функциям, и оценивается вычислительный выигрыш алгоритма относительно полного перебора. На множествах изображений лиц и подписей и на ансамбле этих источников демонстрируются экспериментальные зависимости средней вероятности ошибки и средней взаимной информации от параметра, определяющего вычислительный выигрыш алгоритма. Для указанных данных приводятся значения нижних границ вероятности ошибки, которые позволяют оценить избыточность вероятности ошибки алгоритма при различных значениях вычислительного выигрыша.

Ключевые слова: классификация, вероятность ошибки, взаимная информация, разделяющая функция, изображение, направленный поиск, вычислительная сложность.

DOI: 10.15372/AUT20220502

Введение. Важными показателями эффективности процедур анализа данных в реальном времени являются точность и время анализа, зависящие от количества обрабатываемой информации. Точность анализа определяется вероятностью ошибки, а время — вычислительной сложностью решающего алгоритма. Указанные характеристики, как правило, связаны обменным соотношением, в котором уменьшение вероятности ошибки и увеличение вычислительной сложности обусловлены ростом объема обрабатываемых данных.

В предлагаемой работе исследуется соотношение вероятности ошибки и вычислительной сложности в схеме многоклассового распознавания объектов, заданных полутоновыми изображениями и представленных древовидно-структурированными наборами эллиптических примитивов [1]. Такие представления аналогичны известным представлениям изображений в форме пирамид и квадродеревьев [2], которые позволяют значительно уменьшить вычислительную сложность и соответственно время анализа изображений. Подобный эффект достигается на иерархических структурах, использованных в работе [3].

Предложенные в [1] древовидные представления образов, заданных информативными объектами изображений, порождают для любого объекта набор представлений с многоуровневым разрешением. Введение метрики на множестве таких описаний позволяет построить алгоритм направленного поиска решения о классе предъявляемого объекта. Направленный поиск базируется на отборе наиболее правдоподобных классов на уровнях представления с нарастающим разрешением и подобен поиску для объекта приближенного ближайшего соседа в иерархически структурированной базе данных [4, 5]. При этом правдоподобия классов по объекту определяются значениями разделяющих функций [6], которые убывают с ростом расстояний от объекта до представителей классов.

Разделяющие функции, введённые на множестве представлений объектов, позволяют ввести условные по объектам вероятности классов, которые совместно с распределением вероятностей объектов дают среднюю взаимную информацию между объектами и оценками их классов, а также среднюю вероятность ошибки в виде средней погрешности по метрике Хемминга [7]. Указанные средние величины могут быть введены на всех уровнях разрешения, а усреднение этих величин с весами, зависящими от параметра алгоритма поиска решения, позволяет связать усреднённые по уровням характеристики качества классификации с вычислительной сложностью. Отклонение средней вероятности ошибки от нижней границы вероятности ошибки [8] при любом значении средней взаимной информации даёт избыточность вероятности ошибки от потенциально возможного значения на заданном множестве объектов при фиксированном количестве информации.

Цель работы состоит в получении численных оценок средней взаимной информации и средней вероятности ошибки, реализуемых на разделяющих функциях экспоненциального типа, и в аналитической оценке вычислительного выигрыша алгоритма направленного поиска решения относительно полного перебора. На множествах объектов, заданных изображениями лиц и подписей, а также на ансамбле этих источников необходимо продемонстрировать уменьшение взаимной информации и увеличение вероятности ошибки и её избыточности относительно нижней границы с ростом вычислительного выигрыша алгоритма направленного поиска решения.

Формализация исследуемой задачи. Рассматривается схема классификации $\Omega \rightarrow \mathbf{X}^M \rightarrow \hat{\Omega}$, в которой $\Omega = \{\omega_i, i = 1, \dots, c\}$ и $\hat{\Omega} = \{\omega_j, j = 1, \dots, c\}$, $c \geq 2$, — множества классов и их оценок, а $\mathbf{X}^M = \mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_M$ — ансамбль множеств объектов от M источников. Каждый элемент ансамбля образован столбцом объектов $\mathbf{x}^M = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^t$ таких, что объекты источников $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$, $m = 1, \dots, M$, принадлежат одному классу и образуют составной объект $\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$, по которому строится оценка класса. Предполагается, что на ансамбле \mathbf{X}^M задана метрика [1], которая порождает условные по классам вероятности составных объектов в форме экспоненциально убывающих функций их расстояний до центральных представителей классов. Известное априорное распределение классов во множестве Ω и условные по классам распределения составных объектов на преобразовании $\Omega \rightarrow \mathbf{X}^M$ позволили построить нижнюю границу средней взаимной информации $I(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) \geq 0$ между \mathbf{X}^M и $\hat{\Omega}$ при условии, что средняя вероятность ошибки классификации $E(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega})$ не превосходит заданной величины ε . Указанная граница получена в работе [8] в форме монотонно убывающей функции

$$R_M(\varepsilon) = I(\mathbf{X}^M; \Omega) - h(\varepsilon - \varepsilon_{\min}^M) - (\varepsilon - \varepsilon_{\min}^M) \ln(c - 1), \quad \varepsilon_{\min}^M \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}^M. \quad (1)$$

В формуле (1) функция $h(z) = -z \ln z - (1 - z) \ln(1 - z)$ даёт двоичную энтропию для значений $0 \leq z \leq \varepsilon_{\max}^M - \varepsilon_{\min}^M$, наибольшее и наименьшее значения границы определяются величинами $R_M(\varepsilon_{\min}^M) = I(\mathbf{X}^M; \Omega)$ и $R_M(\varepsilon_{\max}^M) = 0$, где $I(\mathbf{X}^M; \Omega)$ — средняя взаимная информация между ансамблем \mathbf{X}^M и множеством классов Ω .

Необходимо отметить, что при наибольшей средней взаимной информации $I(\mathbf{X}^M; \Omega) = H(\Omega)$, равной энтропии множества Ω , имеем $\varepsilon_{\min}^M = 0$ и граница (1) совпадает с нижней границей Шеннона для функции скорость-погрешность в схеме кодирования $\Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ со средней погрешностью по мере Хемминга [7]. В общем случае наименьшая вероятность ошибки ε_{\min}^M убывает с ростом средней взаимной информации $I(\mathbf{X}^M; \Omega)$ и, в частности, с увеличением числа источников M в ансамбле. При любом $M \geq 1$ наибольшая вероятность ошибки определяется величиной $\varepsilon_{\max}^M = (c - 1) \min_{i=1}^c P(\omega_i)$, где $P(\omega_i)$ — априорная вероятность класса $\omega_i \in \Omega$. В силу монотонности функции (1) её обращение

даёт нижнюю границу средней вероятности ошибки $E_{\min}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = R_M^{-1}(I(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}))$, когда $I(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) \leq I(\mathbf{X}^M; \Omega)$.

Для каждого объекта $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m$, $m = 1, \dots, M$, будем использовать древовидно-структурированное L -уровневое представление $\mathbf{x}_m^L = (\mathbf{x}_{m1}, \dots, \mathbf{x}_{mL})$, в котором представление l -го уровня \mathbf{x}_{ml} , $l = 1, \dots, L$, задано поддеревом глубины l в бинарном дереве \mathbf{x}_{mL} глубины L [1]. Такие представления могут быть построены для широкого класса объектов, заданных изображениями и имеющих однозначно идентифицируемую систему собственных координат. Представления l -го уровня для объектов составного объекта $\mathbf{x}^M = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^t$ образуют столбец представлений $\mathbf{x}_l^M = (\mathbf{x}_{1l}, \dots, \mathbf{x}_{Ml})^t$. Последовательность таких столбцов всех уровней даёт многоуровневое представление $\mathbf{x}^{ML} = (\mathbf{x}_1^M, \dots, \mathbf{x}_L^M)$ составного объекта. Множеству объектов источника \mathbf{X}_m и множеству составных объектов от ансамбля источников \mathbf{X}^M соответствуют множества представлений l -го уровня \mathbf{X}_{ml} и \mathbf{X}_l^M и множества многоуровневых представлений $\mathbf{X}_m^L = \{\mathbf{X}_{ml}\}_{l=1}^L$ и $\mathbf{X}^{ML} = \{\mathbf{X}_l^M\}_{l=1}^L$.

Введём на множестве представлений \mathbf{X}_{ml} объектов m -го источника \mathbf{X}_m наборы разделяющих функций l -го уровня:

$$G_{ml} = \{g_{jl}(\mathbf{x}_m), \forall \mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m\}_{j=1}^c, \quad l = 1, \dots, L, \quad (2)$$

и на множестве представлений \mathbf{X}_l^M составных объектов от ансамбля источников \mathbf{X}^M наборы разделяющих функций l -го уровня в форме произведений:

$$G_l^M = \left\{ g_{jl}(\mathbf{x}^M) = \prod_{m=1}^M g_{jl}(\mathbf{x}_m), \forall \mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M \right\}_{j=1}^c, \quad l = 1, \dots, L. \quad (3)$$

В общем случае при значениях $M \geq 1$ разделяющие функции вида (3) дают условные по объектам распределения вероятностей оценок классов на множестве $\hat{\Omega}$. Такие распределения задаются множествами условных вероятностей:

$$Q_l^M = \left\{ Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M) = g_{jl}(\mathbf{x}^M) / \sum_{i=1}^c g_{il}(\mathbf{x}^M), \forall \mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M \right\}_{j=1}^c, \quad l = 1, \dots, L. \quad (4)$$

Для любого уровня представления распределения вида (4) совместно с вероятностями $P(\mathbf{x}^M)$, $\forall \mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M$ позволяют ввести среднюю взаимную информацию

$$I_{G_l^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = \sum_{\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M} P(\mathbf{x}^M) \sum_{j=1}^c Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M) \ln \frac{Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M)}{Q_l(\omega_j)} \quad (5)$$

и среднюю вероятность ошибки

$$E_{G_l^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = \sum_{\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M} P(\mathbf{x}^M) \sum_{j=1}^c Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M) (1 - Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M)), \quad (6)$$

где $Q_l(\omega_j) = \sum_{\mathbf{x}^M \in \mathbf{X}^M} P(\mathbf{x}^M) Q_l(\omega_j | \mathbf{x}^M)$ — безусловная вероятность оценки класса $\omega_j \in \hat{\Omega}$.

Последующие усреднения характеристик (5) и (6) с весами $\{w_l\}_{l=1}^L$: $\sum_{l=1}^L w_l = 1$, зависящими

от параметра алгоритма поиска решения, дают значения

$$I_{G^{ML}}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = \sum_{l=1}^L w_l I_{G_l^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}), \quad (7)$$

$$E_{G^{ML}}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = \sum_{l=1}^L w_l E_{G_l^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}), \quad (8)$$

где $G^{ML} = \{G_l^M\}_{l=1}^L$. Характеристики (7) и (8) совместно с границей (2) позволяют ввести избыточность

$$r_{G^{ML}} = E_{G^{ML}} - R_M^{-1}(I_{G^{ML}}) \quad (9)$$

средней вероятности ошибки при заданном наборе разделяющих функций G^{ML} .

Задача состоит в построении алгоритма направленного поиска решения в пространстве многоуровневых представлений составных объектов от ансамбля источников и оценивании вычислительного выигрыша направленного поиска относительно переборного поиска. Для объектов, заданных изображениями лиц и подписей, и для составных объектов от ансамбля этих источников необходимо продемонстрировать слабое уменьшение средней взаимной информации (7) и слабое увеличение средней вероятности ошибки (8) и избыточности (9) при заметном вычислительном выигрыше.

Направленный поиск решения и вычислительная сложность. Предлагается алгоритм направленного поиска решения для любого составного объекта $\mathbf{x}^M = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^t$, имеющего последовательность представлений $\mathbf{x}^{ML} = (\mathbf{x}_1^M, \dots, \mathbf{x}_L^M)$, в которой $\mathbf{x}_l^M = (\mathbf{x}_{1l}, \dots, \mathbf{x}_{Ml})^t$, $l = 1, \dots, L$, — столбец представлений l -го уровня для объектов источников, образующих составной объект \mathbf{x}^M . В случае $M = 1$ алгоритм даёт решение по объекту одного источника.

Алгоритм поиска решения. На текущем l -м уровне вычисляются

$$c_l = \lfloor c 2^{-\alpha(l-1)} \rfloor, \quad l = 1, \dots, L, \quad (10)$$

разделяющих функций из набора (3), где $\alpha = (L-1)^{-1} \log(c/c^*) < 1$, $c^* \leq c$, — целочисленный параметр, и отбираются c_{l+1} классов с наибольшими значениями разделяющих функций. Отобранные классы дают номера этих функций, вычисляемых на $(l+1)$ -м уровне. На последнем L -м уровне принимается решение по номеру j^* функции $g_{j^*L}(\mathbf{x}^M)$ с наибольшим значением среди $c_L = c^*$ функций с номерами, отобранными на $(L-1)$ -м уровне.

Сформулированный алгоритм реализует направленный поиск решения при значениях $c^* < c$ и поиск на основе полного перебора разделяющих функций L -го уровня при значении $c^* = c$. С использованием стратегии отбора классов (10) выбираются веса уровней представления $w_l = (\log c_l - \log c_{l+1}) / \log c$, $l = 1, \dots, L$, которые при замене целочисленных значений c_l , $l = 1, \dots, L$, значениями $\hat{c}_l = c 2^{-\alpha(l-1)} \geq c_l$ дают распределение оценок весов

$$\hat{w}_l = \begin{cases} (L-1)^{-1}(1 - \log c^* / \log c), & l = 1, \dots, L-1; \\ \log c^* / \log c, & l = L. \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что условие $\sum_{l=1}^{L-1} \hat{w}_l \leq \hat{w}_L$ определяет область значений параметра $c^* \geq \sqrt{c}$. В случае $c^* = c$ оценки $\hat{w}_l = 0$, $l = 1, \dots, L-1$, и $\hat{w}_L = 1$ обеспечивают усреднённые по

уровням характеристики (7) и (8), совпадающие с соответствующими характеристиками L -го уровня: $I_{GML}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = I_{G_L^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega})$ и $E_{GML}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega}) = E_{G_L^M}(\mathbf{X}^M; \hat{\Omega})$.

Вычислительная сложность поиска решения по любому составному объекту оценивается числом обрабатываемых вершин в M деревьях, которые представляют этот объект. С учётом структуры бинарных деревьев и стратегии (10) число таких вершин составляет

$$C_\alpha = M \sum_{l=1}^L c_l 2^l \leq 2Mc \frac{2^{(1-\alpha)L} - 1}{2^{(1-\alpha)} - 1}. \quad (12)$$

При нулевом значении параметра $\alpha = 0$ неравенство в правой части (12) переходит в равенство и даёт вычислительную сложность переборного алгоритма. Согласно (12) вычислительный выигрыш направленного поиска решения относительно переборного поиска определяется отношением

$$\frac{C_{\alpha=0}}{C_{\alpha>0}} \geq \frac{2^L - 1}{2^L} 2^{\alpha L} (2^{1-\alpha} - 1) = \frac{2^L - 1}{2^L} \left(2 - \left(\frac{c}{c^*} \right)^{1/(L-1)} \right) \frac{c}{c^*}, \quad (13)$$

которое близко к величине c/c^* при условии $L \gg 1 + \log(c/c^*)$.

Экспериментальные результаты. В экспериментах использованы древовидные представления лиц и подписей наборами эллиптических примитивов. Примеры представлений, которые содержат восемь информативных уровней, показаны на рис. 1. Эллипсы нулевого уровня используются для нормировки параметров примитивов последующих уровней. Вычисление параметров примитивов в собственных осях объектов и нормировка параметров обеспечивают инвариантность представлений к повороту, смещению, масштабу и яркости объектов.

Пусть $d_l(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}_m) \geq 0, l = 1, \dots, L$, — квадратичное расстояние порядка l между любой парой объектов $\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_m, \hat{\mathbf{x}}_m \in \mathbf{X}_m$ на соответствующем уровне представления [1]. Тогда расстояния порядка l между объектом источника и представителями классов позволяют ввести экспоненциальные разделяющие функции

$$\{g_{jl}(\mathbf{x}_m) = \exp(-v_{jm} d_l^2(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{jm}))\}_{j=1}^c, \quad m = 1, \dots, M, \quad (14)$$

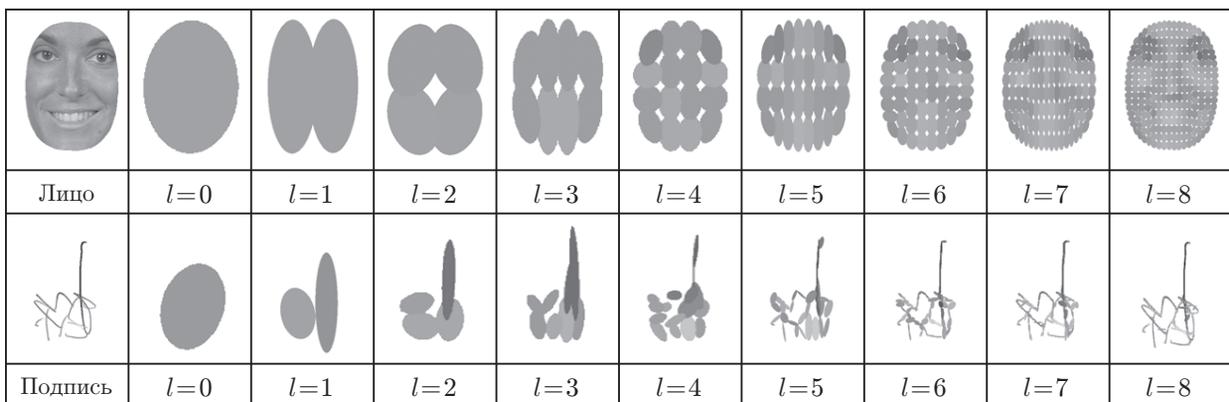


Рис. 1. Многоуровневые представления лица и подписи эллиптическими примитивами

на множествах представлений объектов источников и разделяющие функции

$$\{g_{jl}(\mathbf{x}^M) = \prod_{m=1}^M \exp(-v_{jm} d_l^2(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{jm}))\}_{j=1}^c \quad (15)$$

на множестве представлений составных объектов от ансамбля источников, где $v_{jm} > 0$ — свободный параметр и \mathbf{x}_{jm} — представитель j -го класса.

Представители классов в функциях (14) и (15) задаются объектами, ближайшими к центральному объектам внутри классов, относительно которых сумма квадратов внутриклассовых расстояний порядка L минимальна. Параметры экспонент в (14) и (15) удовлетворяют неравенству

$$v_{jm} \geq \frac{1}{4\mu_{jm}^2} \ln \frac{1 + \alpha_{jm}}{1 - \alpha_{jm}}, \quad j = 1, \dots, c, \quad (16)$$

где $\alpha_{jm} = \mu_{jm}/(\mu_{jm}^2 + \sigma_{jm}^2)^{1/2}$ определяется средним $\mu_{jm} = \frac{1}{\|\mathbf{X}_{jm}\|} \sum_{\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_{jm}} d_L(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{jm})$

и дисперсией $\sigma_{jm}^2 = \frac{1}{\|\mathbf{X}_{jm}\|} \sum_{\mathbf{x}_m \in \mathbf{X}_{jm}} (d_L(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{jm}) - \mu_{jm})^2$ внутриклассовых расстояний

порядка L . В случае $\mu_{jm} > \sigma_{jm}$ неравенство (16) обеспечивает достаточно малую вероятность значений $d_L(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{jm}) \geq 2\mu_{jm}$. Правая часть этого неравенства даёт верхние оценки параметров v_{jm} при замене α_{jm} значениями растущей параболы $\alpha_{jm} + 2(1 - \alpha_{jm})\tau_s - (1 - \alpha_{jm})\tau_s^2 > \alpha_{jm}$ в точках $\tau_s = \sum_{k=1}^s 2^{-k}$, $s \geq 7$.

Вычислительные эксперименты выполнены на множестве лиц \mathbf{X}_1 , множестве подписей \mathbf{X}_2 и на ансамбле $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ с использованием матриц расстояний порядка $l = 1, \dots, 8$ для древовидных представлений лиц [9] и подписей [10]. Множества данных от каждого источника содержат 1000 объектов, по 40 объектов от 25 персон, которые образуют равновероятные классы. Оценивание параметров разделяющих функций (обучение) и тестирование выполнены в режиме скользящего контроля по схеме leave-one-out.

Численные оценки характеристик (7) и (8) при значениях $c^* = 10, \dots, 25$ и $s = 10$ для отдельных источников и для ансамбля даны в виде графиков на рис. 2, $a-c$. Здесь же показаны графики нижних границ средней вероятности ошибки. Увеличение значения s при условии, что $I_{G_{mL}}(\mathbf{X}_m; \hat{\Omega}) \leq I(\mathbf{X}_m; \Omega)$, $m = 1, 2$, приводит к росту локализации разделяющих функций вблизи представителей классов и, как следствие, к увеличению средней взаимной информации и уменьшению средней вероятности ошибки.

Приведённые графики демонстрируют слабое увеличение средней вероятности ошибки и избыточности с ростом вычислительного выигрыша c/c^* направленного поиска решения относительно полного перебора, когда $c^* = c$. При этом точность классификации на ансамбле существенно превосходит точность классификации объектов отдельных источников. Этот эффект обусловлен бимодальными разделяющими функциями на ансамбле и может быть повышен путём увеличения его размера. Минимальные значения средней вероятности ошибки, которые соответствуют нижним границам при максимальных значениях средней взаимной информации для классифицируемых данных, приведены в таблице.

Аналогичные экспериментальные результаты могут быть получены для любых разделяющих функций и, в частности, для SVM-классификаторов на основе опорных векторов [11, 12].

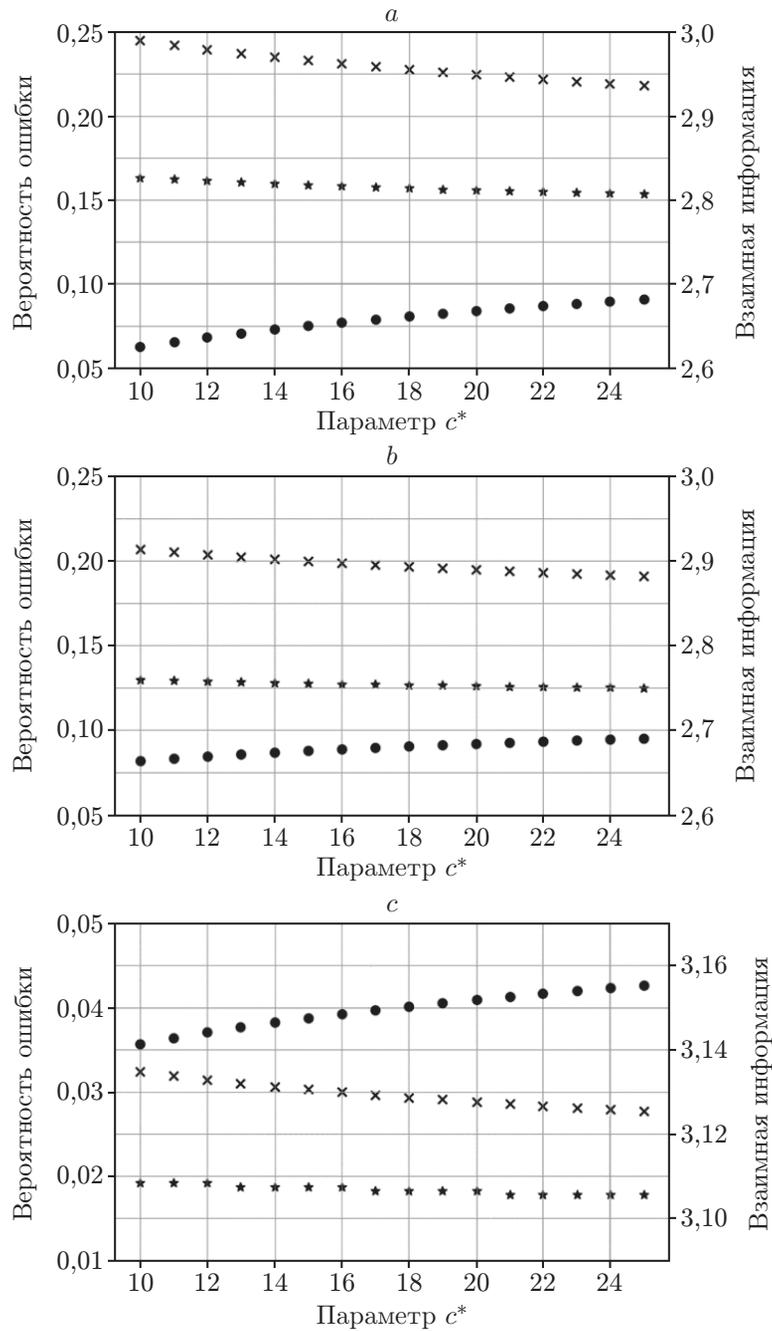


Рис. 2. Усреднённые по уровням значения средней взаимной информации (●), средней вероятности ошибки (×) и нижней границы средней вероятности ошибки (*): для источника лиц (a), источника подписей (b) и ансамбля источников (c)

Экстремальные значения средней вероятности ошибки и средней взаимной информации на множествах лиц X_1 , подписей X_2 и на ансамбле X_1X_2

Источник	$M = 1 : X_1$	$M = 1 : X_2$	$M = 2 : X_1X_2$
ε_{\min}^M	0,092	0,052	0,010
$I(X^M; \Omega)$	3,110	3,184	3,217

Заключение. В рамках теоретико-информационной модели исследованы характеристики качества и вычислительной сложности классификации объектов, заданных изображениями и представленными многоуровневыми древовидно-структурированными описаниями. С использованием метрики на множестве представлений объектов определены разделяющие по классам функции на всех уровнях представления и предложен алгоритм направленного поиска решения о классе предъявляемого объекта. Разделяющие функции позволили ввести среднюю взаимную информацию между классифицируемыми объектами и оценками их классов, а также среднюю вероятность ошибки классификации, зависящие от параметра вычислительной сложности решающего алгоритма. Приведена аналитическая нижняя граница вероятности ошибки как функция средней взаимной информации. Предложенный подход позволяет оценивать избыточность вероятности ошибки, которая реализуется на любых разделяющих функциях, при фиксированных значениях количества обрабатываемой информации, зависящей от вычислительной сложности решающего алгоритма.

Эффективность подхода продемонстрирована численными оценками средней взаимной информации, средней вероятности ошибки и избыточности, полученными на множествах изображений лиц, подписей и на ансамбле этих источников с разделяющими функциями экспоненциального типа. Показана возможность существенного уменьшения вычислительной сложности при малом увеличении вероятности ошибки и избыточности. В перспективе планируется применить теоретико-информационный подход для исследования точности и сложности классификации в пространстве многоуровневых представлений биометрических данных с сигмоидальными разделяющими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lange M. M., Ganebnykh S. N.** On fusion schemes for multiclass object classification with reject in a given ensemble of sources // Journ. Phys. 2018. **1096**, N 012048.
2. **Samet H.** The quadtree and related hierarchical data structures // Comput. Survey. 1984. **16**, N 2. P. 187–260.
3. **Denisova A. Yu., Sergeev V. V.** Algorithms for calculating multichannel image histograms using hierarchical data structures // Comput. Opt. 2016. **40**, N 4. P. 535–542.
4. **Andoni A., Indyk P.** Near-optimal hashing algorithms for approximate nearest neighbor in high dimensions // Communications of the ACM. 2008. **51**, N 1. P. 117–122.
5. **Lange M. M., Ganebnykh S. N., Lange A. M.** On efficiency of the hierarchical algorithm for searching approximate nearest neighbor in a given set of images // Informatics and Applications. 2017. **11**, N 3. P. 51–59.
6. **Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G.** Pattern Classification. 2nd ed. New York: Wiley, 2001. 738 p.
7. **Gallager R. G.** Information Theory and Reliable Communication. New York: Wiley, 1968. 588 p.
8. **Lange M. M., Paramonov S. V.** On a lower bound to classification error probability in an ensemble of data sources // Proc. of the VII Intern. Conf. «Information Technology and Nanotechnology». Samara, Russia, Sept. 20–24, 2021. P. 1–6.

9. **Distance matrices for face dataset.** 2020. URL: <http://sourceforge.net/projects/distance-matrices-face> (дата обращения: 13.07.2022).
10. **Distance matrices for signature dataset.** 2020. URL: <http://sourceforge.net/projects/distance-matrices-signature> (дата обращения: 13.07.2022).
11. **Kantavat G. P., Kijirikul B., Songsiri P. et al.** Efficient decision trees for multi-class support vector machines using entropy and generalization error estimation // Intern. Journ. Appl. Math. and Comput. Sci. 2018. **28**, N 4. P. 705–717.
12. **Sueno H. T., Gerardo B. D., Medina R. P.** Multi-class document classification using support vector machine (SVM) based on improved Naïve Bayes vectorization technique // Intern. Journ. Advanced Trends in Comput. Sci. and Engineering. 2020. **9**, N 3. P. 3937–3944.

Поступила в редакцию 13.07.2022

После доработки 22.07.2022

Принята к публикации 29.08.2022
