

УДК 519.7

## СИНТЕЗ УСТОЙЧИВЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТОВ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ДЕФОКУСИРОВКИ

© В. А. Фурсов

ИСОИ РАН — филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151  
E-mail: fursov@ssau.ru

Предложена технология обработки изображений БИХ-фильтром с целью устранения искажений типа дефокусировки. С использованием свойства центральной симметрии искажений двумерный фильтр сводится к одномерному с неравномерными отсчётами на системе окружностей с различными радиусами. Рассмотрена техника построения передаточных функций и разностных уравнений БИХ-фильтра на неравномерной системе отсчётов. Получены достаточные условия устойчивости для итерационной схемы реализации БИХ-фильтра. Приведён пример анализа устойчивости и синтеза БИХ-фильтра с заданной степенью устойчивости и результаты восстановления тестового изображения.

*Ключевые слова:* цифровая обработка изображений, дефокусировка, БИХ-фильтр, устойчивость.

DOI: 10.15372/AUT20220507

**Введение.** Проблема восстановления изображений с использованием линейных фильтров имеет большую историю [1, 2] и тем не менее остаётся актуальной. Простейшим способом восстановления искажённых изображений является обработка их инверсным фильтром [1]. Задача построения инверсного фильтра сводится к нахождению некоторого приближения к обратному оператору. Общеизвестным является мнение, что инверсная фильтрация обладает низкой помехоустойчивостью.

Одним из популярных направлений в области фильтрации изображений является использование параметрической идентификации [3], в результате которой подбираются наилучшие (в смысле заданного критерия) параметры фильтра с учётом помех. Эффективность этой технологии в значительной степени зависит от задания подходящей модели фильтра. В рамках этого подхода наиболее широко используются фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ). Однако качество восстановления при этом имеет предел, связанный с ограниченностью импульсного отклика [2]. Кроме того, задача идентификации КИХ-фильтра обычно плохо обусловлена.

В этом отношении более предпочтительно применение фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры), поскольку они обеспечивают возможность аппроксимации расширенной импульсной характеристики дробно-рациональной функцией с малым числом параметров. Однако при использовании БИХ-фильтров возникают серьёзные трудности. Во-первых, при построении двумерных БИХ-фильтров сталкиваются с проблемой физической реализуемости. Во-вторых, по мере увеличения степени размытия даже при получении оптимальных оценок параметров БИХ-фильтра возможна потеря устойчивости [4–7].

Если искажения имеют центральную симметрию, вместо двумерного фильтра можно строить одномерный, в котором линии равного импульсного отклика представляют собой концентрические окружности с разными радиусами. Это упрощает практическую реализацию алгоритма. Однако при этом возникают новые проблемы, связанные с тем, что фильтр должен строиться на неравномерной системе отсчётов.

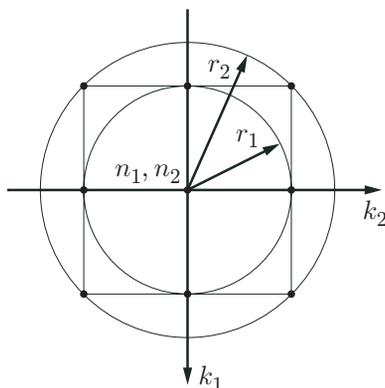


Рис. 1. Пример опорной области размером  $3 \times 3$

Задача построения БИХ-фильтров на неравномерной системе отсчётов рассматривалась в [8, 9]. Предлагались различные схемы дискретизации, основанные на использовании непрерывных уравнений состояния в качестве исходных моделей. К сожалению, в рамках этих подходов остаётся проблема, связанная с физической реализуемостью БИХ-фильтров [10], которая состоит в том, что для вычисления выходных отсчётов необходимо использовать ещё не вычисленные отсчёты.

Проблема физической реализуемости БИХ-фильтра преодолевается с применением итеративного алгоритма, в котором изображение, восстановленное на любой итерации, является исходным изображением для следующей итерации [5]. К сожалению, итерационная реализация БИХ-фильтра может оказаться неустойчивой, даже если исходный БИХ-фильтр устойчив. Таким образом, проблема анализа устойчивости БИХ-фильтров остаётся одной из центральных проблем. Важнейший вклад представленной работы — получение простых достаточных условий устойчивости итеративной схемы реализации БИХ-фильтра, позволяющих прогнозировать и контролировать качество восстановления.

#### Построение передаточных функций и разностных уравнений.

Рассмотрим фильтр, который преобразует входное изображение  $X$  в выходное изображение  $Y$ . Выходной сигнал фильтра является двумерной свёрткой [5]

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (1)$$

С учётом симметрии искажений преобразуем двумерную свёртку (1) в одномерную [11]. В частности, вместо  $h(k_1, k_2)$  будем рассматривать последовательность  $h(r_n)$ , где  $r_n$  — радиусы концентрических окружностей равных импульсных откликов, показанные на рис. 1. Вместо  $y(n_1, n_2)$ ,  $x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$  соответственно зададим средние значения отсчётов на этих окружностях:

$$\bar{x}(r_i) = \frac{1}{S(r_i)} \sum_{s=1}^{S(r_i)} x(s), \quad (2)$$

$$\bar{y}(r_i) = \frac{1}{S(r_i)} \sum_{s=1}^{S(r_i)} y(s), \quad (3)$$

где  $S(r_i)$  — количество отсчётов, «попавших» на  $i$ -ю окружность. Поскольку  $\bar{x}(r_i)$ ,  $\bar{y}(r_i)$  являются линейными комбинациями исходных отсчётов изображений, по аналогии с (1) можно записать одномерную свёртку

$$\bar{y}(r_n) = \sum_n h(r_n) \bar{x}(r_n). \quad (4)$$

Одномерная дискретная импульсная характеристика (4) определена в виде последовательности значений, заданных на неравномерной системе отсчётов. Во избежание формальных трудностей будем полагать, что указанная последовательность является выборками из гладкой непрерывной функции, удовлетворяющей условиям Дирихле. Эти условия не являются обременительными и обычно выполняются в задачах обработки изображений. Таким образом, импульсный отклик представляется в виде решётчатой функции, состоящей из последовательности смещённых дельта-функций:

$$h(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) \delta(\bar{r} - r_n), \quad (5)$$

где  $h(r_0), h(r_1), h(r_2), \dots$  — последовательность импульсных откликов;  $r_1, r_2, \dots$  — расстояния от начальной точки  $r_0 = 0$  (см. рис. 1). Подчеркнём, что эти расстояния различны, т. е. отсчёты расположены неравномерно вдоль радиального луча из центра опорной области.

Запишем дискретное преобразование Лапласа ( $D$ -преобразование) решётчатой функции (5) на неравномерной системе отсчётов:

$$H(q) = D\{h[r_n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qr_n} h(r_n), \quad (6)$$

где  $q = \sigma + j\bar{\omega}$  — комплексная переменная.  $D$ -преобразование (6) решётчатой функции (5) является обычным преобразованием Лапласа функции, состоящей из последовательности сдвинутых дельта-функций [12]. Действительно

$$\begin{aligned} L\{h(\bar{r})\} &= \int_0^{\infty} h(\bar{r}) e^{-q\bar{r}} d\bar{r} = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} h[r_n] \delta(\bar{r} - r_n) e^{-q\bar{r}} d\bar{r} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h[r_n] \int_0^{\infty} \delta(\bar{r} - r_n) e^{-q\bar{r}} d\bar{r} = \sum_{n=0}^{\infty} h[r_n] e^{-qr_n} = D\{h[r_n]\}. \end{aligned}$$

Изучение основных свойств  $D$ -преобразования решётчатых функций на нерегулярной сетке является интересной самостоятельной задачей. В данной работе мы будем использовать только два свойства, приведённые в приложениях. В приложении 1 показано, что для  $D$ -преобразования (6) выполняется свойство линейности, а в приложении 2 приведён аналог теоремы сдвига для неравномерных отсчётов.

Применим  $D$ -преобразование (6) к обеим частям одномерной свёртки (4). Имеем

$$Y(q) = H(q)X(q). \quad (7)$$

С использованием соотношений (6), (7) и свойств линейности и сдвига передаточная функция фильтра на неравномерной сетке, образованной радиусами окружностей на входном и выходном изображениях, представляется в виде

$$H(q) = \frac{Y(q)}{X(q)} = \frac{b_m e^{r_0 q} + b_{m-1} e^{r_1 q} + \dots + b_1 e^{r_{(m-1)} q} + b_0 e^{r_m q}}{a_n e^{r_0 q} + a_{n-1} e^{r_1 q} + \dots + a_1 e^{r_{(n-1)} q} + a_0 e^{r_n q}}. \quad (8)$$

С использованием формальной замены  $z = e^q$  введём в рассмотрение также  $Z$ -преобразование решётчатых функций на неравномерной системе отсчётов:

$$H(z) = Z\{h(r_n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-r_n} h(r_n) \quad (9)$$

и  $Z$ -передаточную функцию:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{r_0} + b_{m-1} z^{r_1} + \dots + b_1 z^{r_{(m-1)}} + b_0 z^{r_m}}{a_n z^{r_0} + a_{n-1} z^{r_1} + \dots + a_1 z^{r_{(n-1)}} + a_0 z^{r_n}}. \quad (10)$$

Заметим, что в данной записи передаточных функций число кругов на входном изображении  $m$ , а на выходном изображении  $n$ , при этом должно выполняться условие  $m \leq n$ .

Представим передаточную функцию (10) в виде

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta_m z^{r_0} + \beta_{m-1} z^{r_1} + \dots + \beta_1 z^{r_{m-1}} + \beta_0 z^{r_m}}{z^{r_0} + \alpha_{n-1} z^{r_1} + \dots + \alpha_1 z^{r_{n-1}} + \alpha_0 z^{r_n}}, \quad (11)$$

где  $\beta_0 = b_0 a_n^{-1}$ ,  $\beta_1 = b_1 a_n^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $\beta_{m-1} = b_{m-1} a_n^{-1}$ ,  $\beta_m = b_m a_n^{-1}$ ,  $\alpha_0 = a_0 a_n^{-1}$ ,  $\alpha_1 = a_1 a_n^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{n-1} = a_{n-1} a_n^{-1}$ .

В соответствии с (11), используя свойство сдвига, можно записать разностное уравнение

$$\begin{aligned} y(r_0) = & -\alpha_{n-1} y(r_1) - \dots - \alpha_1 y(r_{n-1}) - \alpha_0 y(r_n) + \\ & + \beta_m x(r_0) + \beta_{m-1} x(r_1) + \dots + \beta_1 x(r_{m-1}) + \beta_0 x(r_m). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее будем полагать  $m = n$ , при этом разностное уравнение (12) запишется в виде

$$y(r_0) = -\alpha_{n-1} y(r_1) - \dots - \alpha_1 y(r_{n-1}) - \alpha_0 y(r_n) + \beta_n x(r_0) + \dots + \beta_1 x(r_{n-1}) + \beta_0 x(r_n). \quad (13)$$

Параметры в (13) могут быть определены путём решения задачи параметрической идентификации [13, 14]. Как и следовало ожидать, фильтр является физически нереализуемым, так как для вычисления отсчёта  $y(r_0)$  должны использоваться отсчёты, которые ещё неизвестны. Поэтому строится итеративная реализация алгоритма. Для вычисления отсчёта  $y(r_0)$  в каждой опорной области выходного изображения в правой части (13) применяются отсчёты изображения, полученного на предыдущей итерации. К сожалению, даже если БИХ-фильтр устойчив, итеративная реализация этого фильтра может быть неустойчивой.

**Построение устойчивой итерационной реализации БИХ-фильтра.** Система устойчива, если её собственные движения затухают. Поэтому для получения условий устойчивости достаточно рассмотреть часть разностного уравнения (13), которая описывает свободную составляющую решения. Разностное уравнение, соответствующее собственному возмущённому пространственному движению, может быть записано как

$$x(r_0) = -\alpha_{n-1}x(r_1) - \dots - \alpha_1x(r_{n-1}) - \alpha_0x(r_n), \quad (14)$$

где  $x(r_i) = y(r_i) - y^*(r_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , — отклонения возмущённого решения от некоторого установившегося решения  $y^*(r_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , в (13). После того как в соответствии с (14) выполнена  $k$ -я итерация, становятся известными все отсчёты изображения  $X_{k+1}$ , представляющего свободную составляющую решения.

Установим связь фигурирующих в (14) отклонений возмущённого решения на  $k$ -й и  $k + 1$ -й итерациях в одной опорной области. Для этого на входном изображении  $X_k$  для произвольной опорной области сформируем вектор

$$\mathbf{x}_k = [x_k(r_1), \dots, x_k(r_{n-1}), x_k(r_n)]^\top, \quad (15)$$

составленный из значений  $x(r_i)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , в (14) на  $k$ -й итерации. Каждый компонент этого вектора соответствует некоторой окружности радиуса  $r_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , и вычисляется по соотношению (3) с использованием отсчётов изображения  $X_k$  в одной опорной области.

На той же опорной области рассмотрим аналогичный вектор на  $k + 1$ -й итерации:

$$\mathbf{x}_{k+1} = [x_{k+1}(r_1), \dots, x_{k+1}(r_{n-1}), x_{k+1}(r_n)]^\top. \quad (16)$$

Компоненты вектора (16) в соответствии с принятой схемой формирования отсчётов одномерной модели фильтра определяются так же, как и компоненты вектора (15):

$$x_{k+1}(r_i) = \frac{1}{S(r_i)} \sum_{s=1}^{S(r_i)} x_{k+1}(r_i, s). \quad (17)$$

Поскольку векторы (15), (16) заданы на одной и той же опорной области, для любого отсчёта с индексом  $s = \overline{1, S(r_i)}$  имеет место соотношение

$$x_{k+1}(r_i, s) = \alpha_i x_k(r_i, s). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получаем

$$x_{k+1}(r_i) = \frac{1}{S(r_i)} \sum_{s=1}^{S(r_i)} \alpha_i x_k(r_i, s) = \alpha_i \frac{1}{S(r_i)} \sum_{s=1}^{S(r_i)} x_k(r_i, s) = \alpha_i x_k(r_i). \quad (19)$$

С учётом введённых векторов (15), (16) и соотношения (19) для каждой опорной области можно записать

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k, \quad (20)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag} [-\alpha_{n-1}, -\alpha_{n-2}, \dots, -\alpha_0]$  — диагональная матрица.

Соотношение (20) описывает итеративный процесс изменения собственного возмущённого решения в каждой опорной области в пределах области  $(N - n - 1) \times (M - n - 1)$ , где  $N, M, n$  — размеры исходного изображения и опорного окна соответственно. К сожалению, этот процесс нереализуем. Однако такая формальная модель преобразования переменных свободной составляющей решения позволяет сделать следующий важный вывод.



Рис. 2. Исходные искажённые изображения:  $\sigma = 2$  (a),  $\sigma = 2,7$  (b)

При выполнении условий устойчивости в каждой опорной области итерационная реализация алгоритма будет устойчивой для всего изображения, представляющего свободную составляющую решения. При этом будет устойчивой также итерационная реализация алгоритма на исходном реальном изображении.

Следовательно, достаточно показать, что для всех  $k$

$$\|\mathbf{x}_{k+1}\| \leq \|\mathbf{x}_k\|. \quad (21)$$

В соответствии со свойствами евклидовой нормы вектора  $\|\mathbf{x}_{k+1}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}_k\|$ , поэтому из (21) следует, что итерационная реализация фильтра устойчива, если

$$\|\mathbf{A}\| < 1. \quad (22)$$

Для проверки достаточного условия устойчивости (22) могут использоваться согласованные с евклидовой нормой вектора нормы матрицы  $\mathbf{A}$  (фробениусова и спектральная):

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}, \quad (23)$$

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\forall i=1,n} \lambda_i, \quad (24)$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ .

**Результаты экспериментов.** Исследовалась связь качества коррекции изображения с нормами (23), (24) матрицы  $\mathbf{A}$  при различной степени дефокусировки. Для получения количественных оценок в качестве тестового использовалось изображение «Лена». На рис. 2, a, b приведены размытые изображения, полученные при значениях параметра размытия  $\sigma = 2$ ,  $\sigma = 2,7$ . При указанных параметрах размытия путём решения задачи параметрической идентификации на тестовых изображениях были получены оценки коэффициентов разностного уравнения (13). С использованием этих оценок осуществлялась обработка размытых изображений. Для оценки качества восстановления при различной степени размытия использовался показатель PSNR. Для полученных в результате идентификации параметров фильтра для заданных вариантов размытия рассчитывались нормы (23) и (24) матрицы  $\mathbf{A}$ .

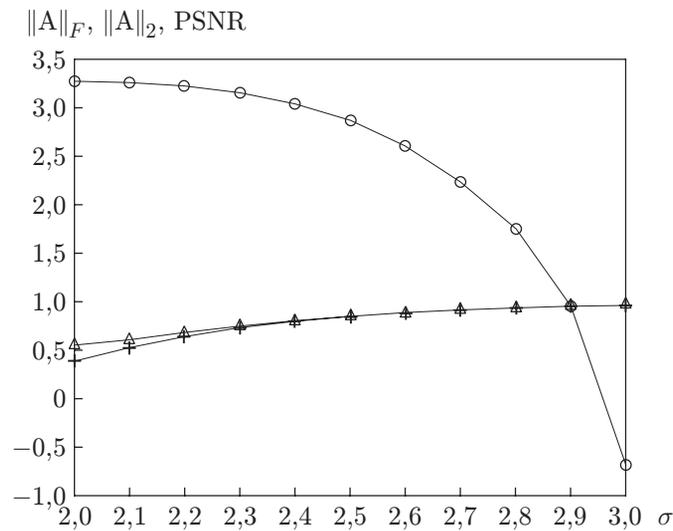


Рис. 3. Зависимость норм  $\|\mathbf{A}\|_F$  (+),  $\|\mathbf{A}\|_2$  ( $\Delta$ ) и показателя PSNR (\*) от параметра  $\sigma$

#### Оценки параметров, нормы матрицы $\mathbf{A}$ и показатели PSNR

$\sigma$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\ \mathbf{A}\ _2$	$\ \mathbf{A}\ _F$	PSNR
<b>2,0</b>	<b>-0,3769</b>	<b>0,3946</b>	<b>68,8</b>	<b>-125,4</b>	<b>57,5</b>	<b>0,5457</b>	<b>0,3946</b>	<b>32,746</b>
2,1	-0,5297	0,2955	116,6	-215,5	100,2	0,6066	0,5297	32,589
2,2	-0,6449	0,2166	182,1	-340,6	159,9	0,6803	0,6449	32,162
2,3	-0,7315	0,1541	273,0	-515,7	244,3	0,7475	0,7315	31,480
2,4	-0,7967	0,1047	401,9	-765,8	365,6	0,8036	0,7967	30,406
2,5	-0,8461	0,0656	592,2	-1136,7	546,2	0,8486	0,8460	28,675
2,6	-0,8835	0,0345	891,5	-1721,9	832,3	0,8842	0,8835	26,045
<b>2,7</b>	<b>-0,9121</b>	<b>0,0097</b>	<b>1413,0</b>	<b>-2745,6</b>	<b>1334,0</b>	<b>0,9121</b>	<b>0,9121</b>	<b>22,402</b>
2,8	-0,9341	-0,0102	2517,9	-4915,2	2399,2	0,9341	0,9341	17,474
2,9	-0,9510	-0,0262	6243,0	-12242,0	6001,0	0,9513	0,9510	09,631
3,0	-0,9641	-0,0391	-42089,0	82880,0	-40789,0	0,9648	0,9641	06,829



Рис. 4. Восстановленные изображения:  $\sigma = 2$  (a),  $\sigma = 2,7$  (b)

На рис. 3 приведены графики, показывающие связь показателя PSNR (\*) с евклидовой (+) и спектральной ( $\Delta$ ) матричными нормами (для наглядности сопоставления графиков значения PSNR уменьшены в 10 раз).

В таблице приведены оценки параметров БИХ-фильтра, полученные путём идентификации по тестовым изображениям, а также числовые значения норм  $\|\mathbf{A}\|_F$ ,  $\|\mathbf{A}\|_2$  и показателей качества PSNR для всех значений параметра размытия на интервале от 2 до 3 с шагом 0,1.

На рис. 4, *a*, *b* показаны восстановленные изображения для двух вариантов параметра размытия:  $\sigma = 2$ ,  $\sigma = 2,7$ . В таблице выделены полужирным шрифтом соответствующие значения норм матрицы  $\|\mathbf{A}\|_2 = 0,9122$ ,  $\|\mathbf{A}\|_F = 0,9121$  и показателя PSNR = 22,402 для этих вариантов. В обоих случаях число итераций БИХ-фильтра равно 10.

При  $\sigma = 2,7$  обе нормы матрицы  $\mathbf{A}$  близки к единице, что говорит о близости к границе устойчивости. При этом восстановленное изображение 4, *b* имеет больший контраст по сравнению с изображением 4, *a*. Может создаться впечатление, что изображение 4, *b* имеет более высокое качество восстановления. Однако в действительности это не так. Как видно из таблицы, значение PSNR = 22,402 в этом случае значительно меньше, чем PSNR = 32,746 при  $\sigma = 2$ .

**Заключение.** В данной работе получены простые достаточные условия устойчивости итерационной реализации БИХ-фильтра. Фильтр строится в предположении центральной симметрии искажений, поэтому сводится к одномерному БИХ-фильтру на неравномерной системе отсчётов. Важным преимуществом полученных условий устойчивости является простота реализации. Это даёт возможность прогнозировать и контролировать качество восстановления изображения по косвенным показателям без использования эталонных изображений для сравнения.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (государственное задание № 007-ГЗ/с3363/26).

### Приложение 1.

**Линейность.** Если решётчатые функции  $h_1(r_n)$ ,  $h_2(r_n)$ , ...,  $h_k(r_n)$  являются оригиналами изображений  $H_1(q)$ ,  $H_2(q)$ , ...,  $H_k(q)$ , тогда справедливо равенство

$$D\left\{\sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} h_{\nu}[r_n]\right\} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} H_{\nu}(q),$$

где  $\lambda_{\nu}$  — произвольные постоянные. Это утверждение легко доказывается подстановкой  $\sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} h_{\nu}[r_n]$  в формулу  $D$ -преобразования (6).

### Приложение 2.

**Аналог теоремы сдвига.**  $D$ -преобразование сдвинутой на величину  $r_m$  решётчатой функции, определённой на неравномерной сетке, определяется равенством

$$D\{h[r_n + r_m]\} = e^{-qr_m} H(q).$$

Построим изображение для смещённой функции  $h(r_n + r_m)$ , где  $r_m$  — величина смещения, а  $m$  — индекс соответствующей точки. Ограничимся случаем положительных значений индексов  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Это предположение естественно для физически реализуемых импульсных откликов. Поскольку при  $m \leq 0$  должно выполняться  $h(r_n + r_m) \equiv 0$ , когда  $n < 0$ , то

$$D\{h(r_n + r_m)\} = \sum_{n=m}^{\infty} e^{-q(r_n+r_m)} h(r_n + r_m) = e^{-qr_m} \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} e^{-qr_n} h(r_n + r_m) \right\} =$$

$$= e^{-qr_m} \left\{ \sum_{n=m}^{-1} e^{-qr_n} h(r_n + r_m) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qr_n} h(r_n) \right\} = e^{-qr_m} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qr_n} h(r_n) = e^{-qr_m} H(q).$$

Что и требовалось доказать. Можно также показать, что

$$Z\{h[r_n + r_m]\} = z^{-r_m} H(z), \quad z = e^q.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pratt W. K.** Digital Image Processing. Culver City: Integrated Computer Systems Publ., 1978.
2. **Soifer V. A.** Computer Image Processing. Pt II: Methods and algorithms, VDM Verlag. 2009. P. 584.
3. **Bavrina A. Yu., Myasnikov V. V., Sergeev A. V.** Method of parametric estimation of optoelectronics tract of remote sensed optical image formation // *Comp. Opt.* 2011. **35**, Iss. 4. P. 500–507.
4. **Agrawal N., Kumar A., Bajaj V.** Design of digital IIR filter: A research survey // *Appl. Acoustics*. 2021. **172**. DOI: 10.1016/j.apacoust.2020.107669.
5. **Dudgeon D. E., Mersereau R. M.** Multidimensional Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984. 448 p.
6. **Shanks J. L., Treitel S., Justice J.** Stability and synthesis of two-dimensional recursive filters // *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*. 1972. **AU-20**, N 2. P. 115–128.
7. **Никоноров А. В., Милюткин М. Г., Фурсов В. А.** Параллельная реализация двумерных БИХ-фильтров в распределенной системе обработки изображений // *Вычислительные методы и программирование*. 2010. **11**, Вып. 1. С. 92–98.
8. **Bidégary-Fesquet B., Fesquet L.** Infinite Impulse Response Filters for Nonuniform Data // *Proc. of the 3-rd Int. Conference on Advances in Signal, Image and Video Processing (SIGNAL 2018)*. Nice, France, May 20–24, 2018. P. 67–72.
9. **Fesqueta L., Bidégary-Fesquet B.** IIR digital filtering of non-uniformly sampled signals via state representation // *Signal Process.* 2010. **90**, N 10. P. 2811–2821.
10. **Liang H., Weller D. S.** Comparison-based image quality assessment for selecting image restoration parameters // *IEEE Trans. Image Process.* 2016. **25**, N 11. P. 5118–5130.
11. **Fursov V. A.** Defocus correction with IIR filter model identification in relation to a non-uniform grid // *Proc. of the Int. Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT 2021)*. Samara, Russia, 20–24 Sept., 2021. P. 1–5. DOI: 10.1109/ITNT52450.2021.9649059.
12. **Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.** Математические основы теории управляемых систем. М.: Наука, 1969. 512 с.
13. **Ljung L.** System identification. Theory for the User. N. J.: PTR Prentice Hall, 1999. 609 p.
14. **Шакенов А. К.** Селекция особых точек, устойчивых к размытию и геометрическим искажениям // *Автометрия*. 2021. **57**, № 6. С. 82–89. DOI: 10.15372/AUT20210609.

Поступила в редакцию 15.07.2022

После доработки 22.07.2022

Принята к публикации 29.08.2022