

## ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ, СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 535.42 : 681.786

### ФОРМИРОВАНИЕ В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ГРАНЕЙ ПРОТЯЖЁННОГО АБСОЛЮТНО ПОГЛОЩАЮЩЕГО ЩЕЛЕВОГО ОТВЕРСТИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСКРЫВОМ

© Ю. В. Чугуй

*Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,  
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41  
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru*

Изучены особенности формирования в когерентно-оптической системе изображений граней протяжённых абсолютно щелевых объектов с произвольным раскрывом отверстий. На основе конструктивной аппроксимации спектров пространственных частот (дифракционных картин Фраунгофера) объектов с различными соотношениями размеров передней и задней апертур получены и проанализированы формулы для поля в изображении передней грани. Детально исследованы объекты с заметно расширяющейся и заметно сужающейся апертурами протяжённого отверстия (разность размеров апертур много больше размера зоны Френеля). Установлено, что структура изображений граней зависит от типа раскрыва. При положительном раскрыве, когда задняя грань находится в теневой области, поле на выходе системы соответствует изображению передней грани, а при отрицательном раскрыве наблюдается изображение задней грани. Показано, что погрешность определения границ в изображении действующей грани объекта обратно пропорциональна квадрату разности апертур. Проанализированы инвариантные свойства проекционной системы формирования изображений внешних граней протяжённых отверстий с произвольным раскрывом.

*Ключевые слова:* дифракции Френеля и Фраунгофера, фурье-оптика, дифракционные картины Фраунгофера протяжённых объектов, объёмное щелевое отверстие, оптический размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20220513

**Введение.** При контроле оптико-электронными методами геометрии пластин постоянной толщины с плоскими внутренними гранями возникает потребность в создании теории формирования их дифракционных картин Фраунгофера и изображений. Теория должна адекватно описывать наблюдаемые в экспериментах явления дифракции света на объектах и позволять восстанавливать с высокой точностью их геометрические характеристики. Существующая скалярная теория Френеля — Кирхгофа справедлива лишь для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1, 2]. Что касается строгих [1, 3–5] и приближённых [6, 7] теорий для расчёта дифракционных явлений на таких объектах, то они оказываются чрезвычайно сложными для практических применений. Для решения указанной задачи разработана конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах, основанная на модели эквивалентных диафрагм [8–10]. В отличие от известных она сравнительно простая (в математическом отношении), физически наглядная и в то же время достаточно точная. Крайне важно, что теория позволяет при расчётах полей применять приближение Френеля — Кирхгофа [1, 2] и хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в [9–12].

В [8, 13] исследованы дифракционные явления на пластинах асимметричного типа с абсолютно поглощающими внутренними гранями. Случаи формирования дифракционных

картин и изображений металлических пластин с абсолютно отражающими внутренними гранями симметричного и несимметричного типов изучены в [14, 15]. Особенности формирования граней изображений объёмного симметричного отверстия (с равным раскрывом) детально изучены в [16].

Цель работы состояла в детальном изучении особенностей формирования изображений внешних граней протяжённых абсолютно поглощающих объектов асимметричного типа в виде щелевых отверстий с произвольными раскрывами. У таких объектов входная и выходная апертуры (будучи центрированными) имеют различные размеры.

**Модель протяжённого щелевого отверстия с произвольным раскрывом абсолютно поглощающего типа.** Исследованию подлежало щелевое отверстие (объёмная щель) глубиной  $d$  с различными размерами центрированных апертур передней ( $D$ ) и задней ( $D_1$ ) граней, перпендикулярных оптической оси  $z$  (рис. 1). Иными словами, такие объёмные отверстия имеют произвольный раскрыв ( $D \neq D_1$ ). Внутренние грани отверстия, будучи плоскими, полностью поглощают падающие на них дифрагированные волны, и, таким образом, мы имеем дело с абсолютно поглощающим (чёрным) телом.

Предложенная в [8, 9] модель в виде эквивалентных диафрагм включает два центрированных (относительно друг друга) транспаранта  $T_1$  и  $T_2$  в виде входной и выходной щелей с ширинами  $D$  и  $D_1$ , расстояние между которыми равно  $d$  (рис. 1,  $a$ ,  $b$ ). Амплитудные коэффициенты пропускания этих транспарантов можно описать граничными прямоугольными функциями [2]  $f^{\text{ГР}}(x)$  и  $g^{\text{ГР}}(x_1)$ , характеризующими оптические свойства отверстия с абсолютно поглощающими внутренними гранями:

$$f^{\text{ГР}}(x) = \text{Rect}(x/D), \quad (1)$$

$$g^{\text{ГР}}(x_1) = \text{Rect}(x_1/D_1). \quad (2)$$

Разместим исследуемый протяжённый объект на входе стандартной когерентно-оптической системы  $4F$  для формирования (низкочастотной фильтрации) изображений на базе двух фурье-звеньев (рис. 2) [2, 17]. Исходный объект, освещаемый плоской монохроматической волной света с длиной волны  $\lambda$  и амплитудой света  $E_0$ , устанавливается

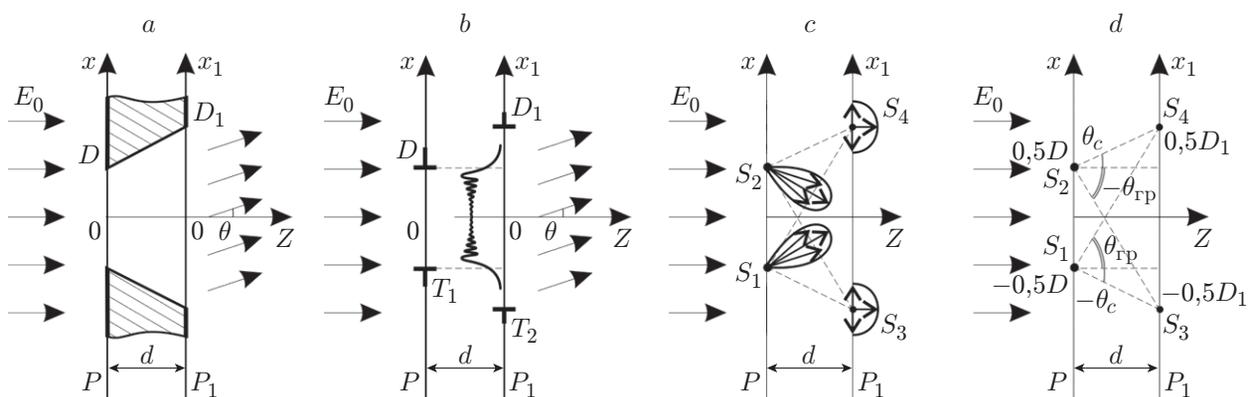


Рис. 1. Дифракция света на протяжённом абсолютно поглощающем отверстии с расширяющейся апертурой ( $D_1 > D$ ): сечение объекта ( $a$ ), его модель в виде эквивалентных транспарантов ( $b$ ), дифракционная модель формирования поля в дальней зоне ( $c$ ) и угловые параметры диаграмм излучения первичных источников  $S_1$  и  $S_2$  ( $d$ )

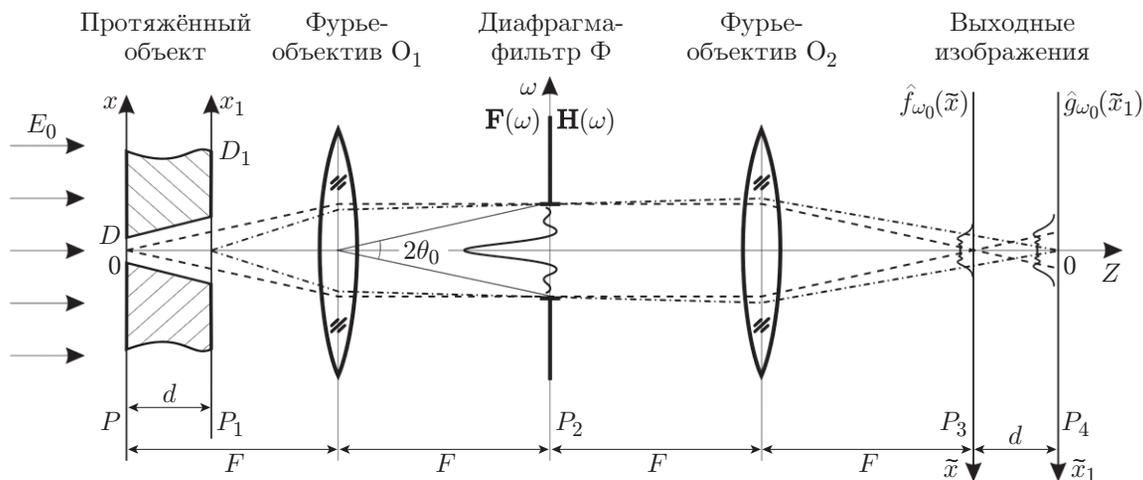


Рис. 2. Формирование изображений передней и задней граней (плоскости  $P_3$  и  $P_4$ ) объёмного асимметричного абсолютно поглощающего отверстия с произвольным раскрытием ( $D \neq D_1$ ) в проекционной дифракционно-ограниченной оптической системе  $4F$

так, чтобы его передняя грань (плоскость  $P$ ) отстояла на фокусном расстоянии  $F$  от объектива  $O_1$ . Этим объективом в результате прямого преобразования Фурье в задней фокальной плоскости  $P_2$  формируется дифракционная картина Фраунгофера в виде спектра  $\mathbf{F}(\omega)$  пространственных частот  $\omega$ , которая соответствует полю, наблюдаемому в дальней зоне (дифракционная картина Фраунгофера). Полученное поле  $\mathbf{F}(\omega)$  фильтруется затем апертурной диафрагмой (фильтром) с шириной полосы пропускаемых частот  $2\omega_0 = 2k\theta_0$  ( $2\theta_0$  — угловой размер фильтра,  $k = 2\pi/\lambda$ ). Результирующее распределение далее объективом  $O_2$  подвергается обратному преобразованию Фурье, в результате которого в задней фокальной плоскости  $P_3$  объектива  $O_2$  формируется отфильтрованное изображение передней грани (плоскость  $P$ ) объёмного края протяжённого объекта, а в плоскости  $P_4$  — изображение его задней грани, расположенной в плоскости  $P_1$ .

Далее представлены результаты вычисления полей в плоскостях изображений граней рассматриваемого объекта при формировании их в дифракционно-неограниченном (идеальном) и дифракционно-ограниченном случаях при отсутствии aberrаций.

**Идеальное изображение граней протяжённого отверстия с произвольным раскрытием.** Найдём поля в изображениях граней асимметричного центрированного протяжённого отверстия, которые формируются в идеальной (дифракционно-неограниченной) системе. Решение будем искать в общем виде, пригодном как для объёмного отверстия с расширяющейся апертурой (рис. 3), так и для объектов с сужающейся апертурой (рис. 4).

Обратимся к базовой формуле, полученной в [8, 9], для нахождения спектра  $\mathbf{F}(\omega)$  протяжённого отверстия с использованием модели эквивалентных транспарантов (ЭТ), исходя из которого найдём поле в изображении передней грани объекта. Согласно этой формуле спектр объекта вычисляется следующим образом ( $E_0 = 1$ ):

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \widetilde{\text{Rect}}_d\left(\frac{x + \omega d/k}{D_1}\right) e^{-j\omega x} dx, \quad (3)$$

где  $\widetilde{\text{Rect}}_d\left(\frac{t}{D}\right) = \frac{1}{\sqrt{j\lambda d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{x_1}{D}\right) e^{jk(x-t)^2/2d} dx$  — френелевский образ прямоугольной

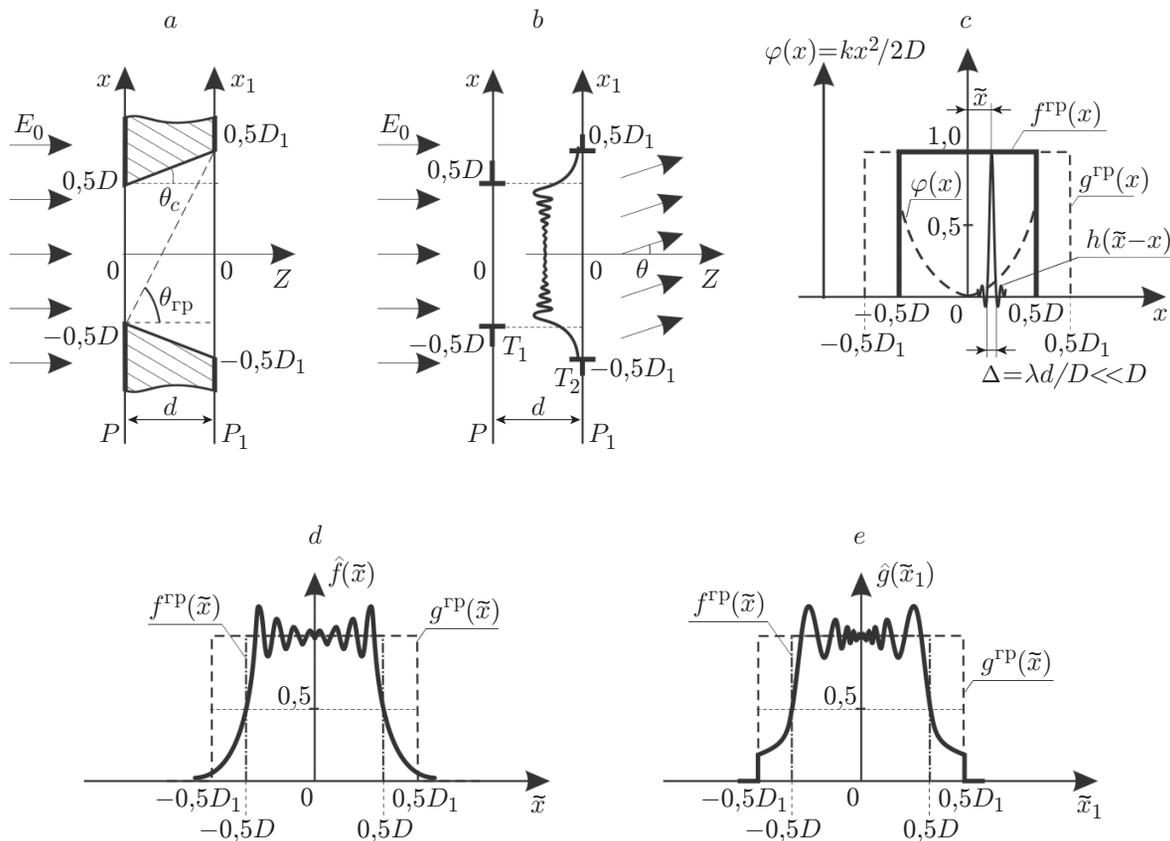


Рис. 3. Структура полей в изображениях граней абсолютно поглощающего протяжённого отверстия с расширяющейся апертурой в дифракционно-неограниченной системе: сечение отверстия (а) и его объёмная модель в виде ЭТ (b), пояснение к формированию поля в изображении передней грани (c) и поведение полей  $\hat{f}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  в изображениях передней (d) и задней (e) граней

функции  $\text{Rect}(x_1/D)$  [18].

Для нахождения поля  $\hat{f}(\tilde{x})$  в изображении передней грани объекта (плоскость  $P_4$  на рис. 2) необходимо выполнить обратное преобразование Фурье от спектра (3):

$$\hat{f}(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega\tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \widetilde{\text{Rect}}_d\left(\frac{x + \omega d/k}{D_1}\right) e^{j\omega(\tilde{x}-x)} dx d\omega.$$

Интегрируя по переменной  $\omega$ , согласно подходу в [18] для поля в изображении передней грани в плоскости  $P_3$ , можно получить следующее выражение:

$$\hat{f}(\tilde{x}) = e^{-jk\tilde{x}^2/2d} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \frac{\sin[k(\tilde{x}-x)D_1/2d]}{\pi(\tilde{x}-x)} e^{jkx^2/2d} dx. \tag{4}$$

На первый взгляд это выражение напоминает импульсный отклик известной пространственно-инвариантной системы [2] с конечной апертурной диафрагмой. Однако фундаментальное отличие состоит в том, что подынтегральное выражение содержит дополнительный фазовый квадратичный член, зависящий от входной координаты  $x$ .

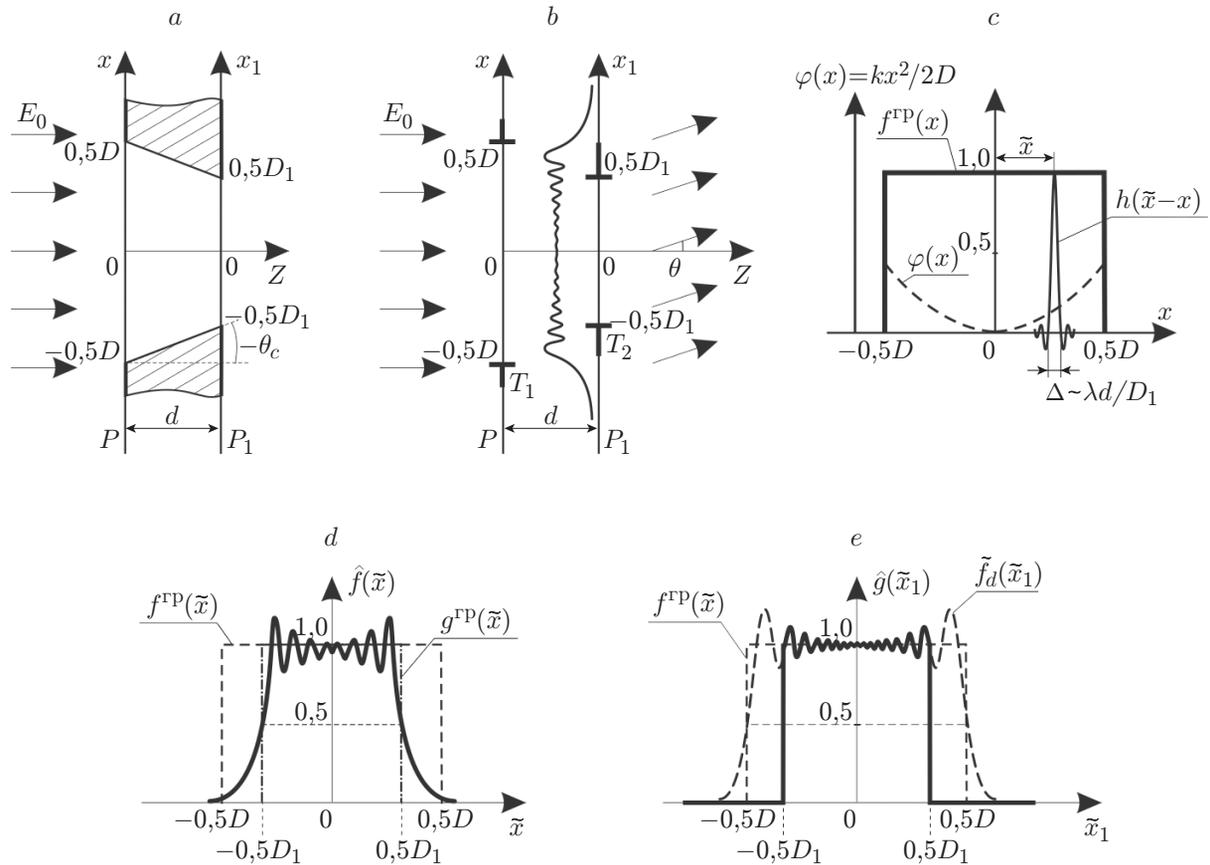


Рис. 4. Структура полей в изображениях граней протяжённого отверстия с сужающейся апертурой в дифракционно-неограниченной системе: сечение отверстия (а) и его объёмная модель в виде ЭТ (b), пояснение к формированию поля в изображении передней грани (c), поведение полей  $\hat{f}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  в изображениях передней (d) и задней (e) граней объекта

Для нахождения поля  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  в плоскости изображения задней грани  $P_4$  примем во внимание, что оно определяется модуляцией френелевского изображения  $\widetilde{\text{Rect}}_d(x_1/D)$  передней апертуры распределением  $\text{Rect}(x_1/D_1)$ , описывающим прозрачность задней апертуры протяжённого отверстия (см. рис. 3, e и 4, e):

$$\hat{g}(\tilde{x}_1) = \text{Rect}(\tilde{x}_1/D_1) \widetilde{\text{Rect}}_d(\tilde{x}_1/D). \quad (5)$$

Полученные формулы (4) и (5) описывают формирование изображений передней и задней граней протяжённого отверстия при любых соотношениях параметров  $D$ ,  $D_1$ ,  $d$  и  $\lambda$  в дифракционно-неограниченной проекционной системе.

Проанализируем поведение полей  $\hat{f}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  при различных соотношениях входной  $D$  и выходной  $D_1$  апертур и сравним полученные при этом результаты с известными.

Рассмотрим сначала объект с расширяющейся апертурой, когда  $D_1 > D$  (см. рис. 3, a—c). Типичные картины полей  $\hat{f}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  показаны на рис. 3, d, e. Если выбрать протяжённое отверстие, у которого задняя апертура много больше передней, т. е.  $D_1 \gg D$  (объёмное отверстие с сильно расширяющейся апертурой), то в предельном случае  $kD_1/2d \rightarrow \infty$  функция  $h(\tilde{x} - x) = \frac{\sin[k(\tilde{x} - x)D_1/2d]}{\pi(\tilde{x} - x)}$  с характерной шириной

$\Delta x \sim \lambda d/D_1$  стремится к дельта-функции Дирака:  $h(\tilde{x} - x) \rightarrow \delta(\tilde{x} - x)$ . В результате поле  $\hat{f}(\tilde{x})$  согласно формуле (4) имеет вид  $\hat{f}(\tilde{x}) = \text{Rect}(\tilde{x}/D)$ , что соответствует идеальному проецированию плоского объекта ( $d = 0$ ) — щели шириной  $D$ . Отметим, что при этом распределение  $\hat{g}(\tilde{x}_1) = \widetilde{\text{Rect}}_d(x_1/D_1)$  соответствует френелевскому изображению прямоугольной функции  $f(x) = \text{Rect}(x/D)$ , наблюдаемому в плоскости  $P_4$ .

Проанализируем теперь объекты с сужающейся апертурой, когда  $D > D_1$  (см. рис. 4,  $a-c$ ). Картины полей  $\hat{f}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}(\tilde{x}_1)$  для таких объектов представлены на рис. 4,  $d-e$ . Особый интерес представляют протяжённые отверстия с сильно сужающейся апертурой, т. е.  $D \gg D_1$ . Очевидно, что в этом случае поле в плоскости  $P_1$  приблизительно будет равно  $\hat{g}(x_1) \approx \text{Rect}(x_1/D_1)$ , поскольку в пределах  $|x_1| \leq 0,5D_1$  функция  $\widetilde{\text{Rect}}_d(x_1/D_1) \approx 1$ . Можно показать, что в обратном ходе лучей поле во входной плоскости  $P$  имеет вид размытой версии изображения выходной щели размером  $D_1$ , которая соответствует френелевскому образу функции  $\text{Rect}(x_1/D_1)$ .

Самое интересное состоит в том, что при  $D > D_1$  имеет место ограничение поля в плоскости  $P$ , которое задаётся размером  $D_1$  [19]. С математической точки зрения такое ограничение определяется поведением функции  $e^{jkx^2/2d}$  в пределах поля  $|x| \leq 0,5D$ . Действительно, при увеличении  $x$  нарастает изменение фазы этой функции, которое приводит к неожиданному результату вычисления интеграла. Если на характерном размере  $\Delta x \sim \lambda d/D_1$  функции  $h(\tilde{x} - x)$  происходит изменение фазы  $\psi(x) = kx^2/2d$  в пределах  $2\pi$ , то можно ожидать, что результат интегрирования будет равен нулю. Очевидно, что изменение фазы в пределах  $\Delta x$  зависит от координаты  $x$ . Если теперь в выражение для приращения фазы  $\Delta\psi(x) = kx\Delta x/d$  подставить  $\Delta x$  и положить  $\Delta\psi = \pi$ , то получим  $2\tilde{x}_{\text{вх}} \sim D_1$ , т. е. характерный размер входного поля  $2\tilde{x}_{\text{вх}}$ , наблюдаемого в плоскости  $P_3$ , равен  $D_1$ . Таким образом, выходная щель выполняет роль полевой диафрагмы. В этом случае при  $D_1 < D$  информация о размере  $D$  в изображениях передней и задней граней практически будет отсутствовать.

**Дифракционно-ограниченное изображение граней протяжённого отверстия с произвольным раскрытием.** Такая операция всегда реализуется на практике ввиду конечных размеров апертур оптической системы (см. рис. 2). Импульсный отклик этой системы с угловым размером апертурной диафрагмы  $2\theta_0$  имеет вид  $h_{\omega_0}(\tilde{x}) = \sin(\omega_0\tilde{x}/\pi\tilde{x})$ , где  $\omega_0 = 2\theta_0$  [2]. Выходные распределения полей  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$  в изображениях передней и задней граней объекта в плоскостях  $P_3$  и  $P_4$  будут являться результатом свёртки полей (4) и (5) с откликом  $h_{\omega_0}(\tilde{x})$ :

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = \left\{ e^{-jk\hat{x}^2/2d} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{x}{D}\right) \frac{\sin[k(\hat{x} - x)D_1/2d]}{\pi(\hat{x} - x)} e^{jkx^2/2d} dx \right\} \otimes \frac{\sin(\omega_0\tilde{x})}{\pi\tilde{x}}, \quad (6)$$

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \left\{ \text{Rect}\left(\frac{\hat{x}_1}{D_1}\right) \widetilde{\text{Rect}}_d\left(\frac{\hat{x}_1}{D}\right) \right\} \otimes \frac{\sin(\omega_0\tilde{x})}{\pi\tilde{x}}. \quad (7)$$

Альтернативный подход к нахождению полей  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$  состоит в использовании спектров этих функций:  $\mathbf{F}(\omega)$  и  $\mathbf{G}(\omega) = e^{-j\omega^2 d/2k} \mathbf{F}(\omega)$  [17]. Фильтрация этих полей диафрагмой-фильтром с передаточной функцией  $\mathbf{H}(\omega) = \text{Rect}(\omega/2\omega_0)$ , естественно, приводит к тому же результату. Этот путь на первый взгляд более длинный, тем не менее, будучи наглядным, в ряде случаев быстрее приводит к искомому результату.

С учётом этого поля  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  и  $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$  вычисляются следующим образом:

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = \mathfrak{S}^{-1}\{\mathbf{F}(\omega)\mathbf{H}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega\tilde{x}} d\omega, \quad (8)$$

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \mathfrak{S}^{-1}\{\mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \mathbf{F}(\omega) e^{-j\omega^2 d/2k} e^{j\omega\tilde{x}} d\omega. \quad (9)$$

Далее будут вычислены поля в изображениях граней объёмных отверстий при различных соотношениях размеров апертур  $D$  и  $D_1$  с использованием формулы для поля в дальней зоне  $\mathbf{F}(\omega)$ , полученной в [8, 9]. Согласно этой формуле спектр  $\mathbf{F}(\omega)$  описывается следующим выражением ( $E_0 = 1$ ):

$$\mathbf{F}(\omega) = (j\omega)^{-1} \{R_1(\omega) e^{j\omega D/2} + R_2(\omega) e^{-j\omega D/2} + 2jR_3 e^{j\omega^2 d/2} \sin(\omega D_1/2)\}, \quad (10)$$

где  $R_1(\omega) = \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega + \omega_c) - \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - \omega_{\text{ГР}})$ ,  $R_2(\omega) = -\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega + \omega_{\text{ГР}}) + \tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega - \omega_c)$  — неизотропные диаграммы излучения первичных источников  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 1,  $c$ ,  $d$ );  $R_3 = \text{Rect}_d\left(\frac{x_1 = \pm(0,5D + c)}{D}\right) = -R_4$  — изотропные диаграммы излучения вторичных источников  $S_3$  и  $S_4$ ;  $\omega_c = k \sin \theta_c$ ; угол скоса  $\theta_c = \text{arctg}(c/d)$ ; скос  $c = 0,5(D_1 - D)$ ;  $\omega_{\text{ГР}} = k \sin \theta_{\text{ГР}}$ ; граничный угол  $\theta_{\text{ГР}} = \text{arctg}[(D+c)/d]$ ;  $\omega_{\text{кр}} = k\theta_{\text{кр}}$ , где  $\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$  — критический угол, при котором объёмные эффекты проявляются в полной мере. Функция  $\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega)$  есть не что иное, как интегральная функция Френеля в частотном представлении [15, 18]:

$$\tilde{Y}_{\omega_{\text{кр}}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{j\omega_{\text{кр}}}} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(w) e^{j(\omega-w)^2 d/2k} dw. \quad (11)$$

Отметим, что формула (10) справедлива как для отверстий с расширяющейся апертурой ( $D_1 > D$ ), так и с сужающейся ( $D > D_1$ ).

Ограничимся случаем, когда размеры  $D$  и  $D_1$  много больше размера зоны Френеля, т. е. при  $D \gg \sqrt{\lambda d}$  и  $D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ . Полагаем, что ширина полосы пропускаемых фильтром частот  $2\omega_0$  много меньше критического угла дифракции, т. е.  $2\omega_0 \ll 2\omega_{\text{кр}}$  ( $2\theta_0 \ll 2\theta_{\text{кр}} = 2\sqrt{\lambda/d}$ ), что соответствует случаю слабой объёмности, т. е.  $N_{\theta_0} = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \gg 1$  (глубина фокусировки системы  $\Delta z = \lambda/\theta_0 \gg d$ ).

**Дифракционно-ограниченное изображение передней грани протяжённого отверстия с заметно расширяющейся апертурой.** Исследуем сначала в аналитическом виде формирование изображений объёмного отверстия с заметно расширяющейся апертурой, у которого выходная апертура  $D_1$  больше входной апертуры  $D$ , причём  $D_1 - D = 2c \gg \sqrt{\lambda d}$  (рис. 5,  $a$ ).

При нахождении формулы для распределения поля  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  в изображении передней грани, как и ранее, воспользуемся спектром протяжённого отверстия (10). Положим, что угловые размеры апертурного фильтра  $2\theta_0$  много меньше критического угла дифракции  $\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$  ( $N_{\theta_0} \gg 1$ ), а также заметно меньше угла скоса  $\theta_c = c/d$ . При этом угол скоса  $\theta_c = c/d \gg \theta_{\text{кр}} = \sqrt{\lambda/d}$ . Таким образом, для угловых параметров  $\theta_0$ ,  $\theta_{\text{кр}}$  и  $\theta_c$  можно

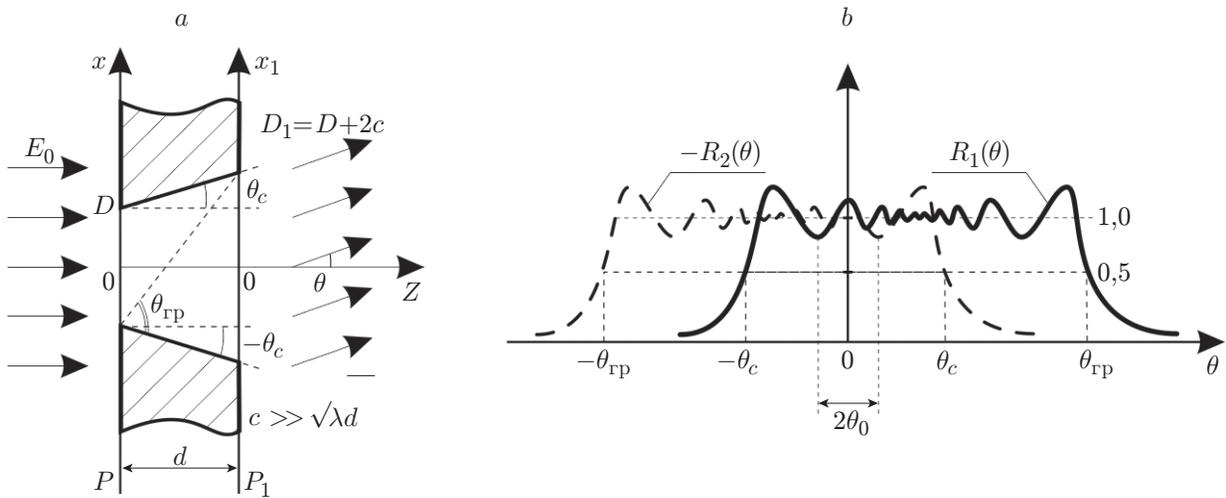


Рис. 5. Формирование дифракционно-ограниченного изображения протяжённо-го отверстия с заметно расширяющейся апертурой ( $D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ ) при слабых объёмных эффектах ( $\theta_0 \ll \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d} \ll \theta_c = c/d$ ): сечение объекта (а) и поведение диаграмм излучения  $R_1(\theta)$  и  $-R_2(\theta)$  (b)

записать следующие неравенства:  $\theta_0 \ll \theta_{кр} \ll \theta_c \ll \theta_{гр} = \arctg(D + c)/d$ . Поведение диаграмм излучения  $R_1(\theta)$  и  $R_2(\theta)$  в спектральной области показано на рис. 5, b.

Если теперь воспользоваться конструктивной аппроксимацией интегральной функции Френеля  $\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega)$ , предложенной в [8, 9], то исходное выражение (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\omega) \approx \mathbf{F}^{ап}(\omega) = & \frac{1}{j\omega} \left\{ e^{j\omega D/2} \left[ 1 - \frac{e^{j(\omega + \omega_c)^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega + \omega_c)/\omega_{кр}} + \frac{e^{j(\omega - \omega_{гр})^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega - \omega_{гр})/\omega_{кр}} \right] - \right. \\ & - e^{-j\omega D/2} \left[ 1 - \frac{e^{j(\omega + \omega_{гр})^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega + \omega_{гр})/\omega_{кр}} + \frac{e^{j(\omega - \omega_c)^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega - \omega_c)/\omega_{кр}} \right] + \\ & \left. + e^{j\omega^2 d/2k} [e^{j\omega D_1/2} - e^{-j\omega D_1/2}] [\tilde{Y}_d(-c) - \tilde{Y}_d(-D - c)] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

С использованием вышеприведённых условий ( $D \gg \sqrt{\lambda d}$ ,  $D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ ,  $\theta_0 \ll \theta_{кр}$ ) это выражение допускает дальнейшее упрощение:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{ап}(\omega) = & \frac{1}{j\omega} \left\{ e^{j\omega D/2} \left[ 1 - \frac{e^{jkc^2/2d} e^{j\pi/4} e^{j\omega c}}{2\pi(\omega + \omega_c)/\omega_{кр}} \right] - e^{-j\omega D/2} \left[ 1 + \frac{e^{jkc^2/2d} e^{j\pi/4} e^{-j\omega c}}{2\pi(\omega - \omega_c)/\omega_{кр}} \right] + \right. \\ & \left. + (e^{j\omega D_1/2} - e^{-j\omega D_1/2}) \frac{\sqrt{\lambda d} e^{jkc^2/2d} e^{j\pi/4}}{2\pi c} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как  $\omega_c \gg \omega_0$ , то функцию  $(\omega \pm \omega_c)^{-1}$  можно разложить в виде  $(\omega \pm \omega_c)^{-1} \approx \omega_c^{-1} (1 \mp \omega/\omega_c)$ . С учётом этого последнее выражение, как показывают расчёты, можно привести к следующему виду:

$$\mathbf{F}^{ап}(\omega) = \frac{e^{j\omega D/2} - e^{-j\omega D/2}}{j\omega} - \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j\omega D_1/2} e^{jkc^2/2d} e^{-j\pi/4}}{4\pi^2 \hat{c}^2}$$

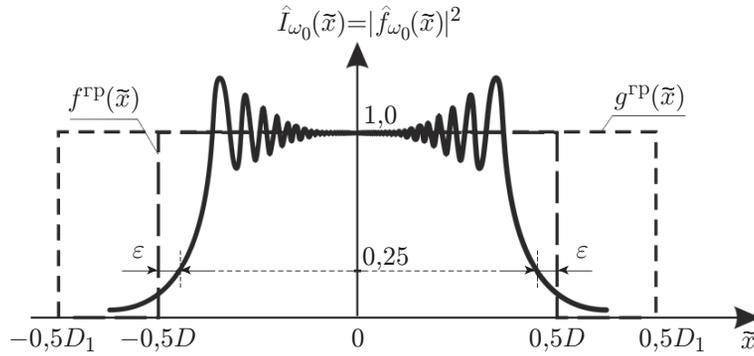


Рис. 6. Типичное распределение интенсивности света  $\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}) = |\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})|^2$  в изображении передней грани объёмного отверстия с заметно расширяющейся апертурой,  $\epsilon$  — смещение положения границы объекта в его изображении

$$-\frac{\sqrt{\lambda d} e^{-j\omega D_1/2} e^{jk^2/2d} e^{-j\pi/4}}{4\pi^2 \hat{c}^2}. \quad (14)$$

Имея в распоряжении спектр  $\mathbf{F}^{\text{ап}}(\omega)$ , нетрудно получить формулу для распределения поля  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  в плоскости изображения передней грани после фильтрации спектра апертурным фильтром с передаточной функцией  $\mathbf{H}(\omega)$ . В результате обратного преобразования Фурье отфильтрованного поля  $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{F}(\omega)\mathbf{H}(\omega)$  для распределения  $\hat{f}(\tilde{x})$  получим

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \mathbf{F}^{\text{ап}}(\omega) e^{j\omega \tilde{x}} d\omega = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} + 0,5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} - 0,5D) - \\ &- \frac{\delta_d}{4\pi^3 \hat{c}^2} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)} \left[ \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} + 0,5D_1)]}{\tilde{x} + 0,5D_1} + \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} - 0,5D_1)]}{\tilde{x} - 0,5D_1} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\delta_d = \sqrt{\lambda d}$ , а  $\hat{c} = c/\sqrt{\lambda d}$ ;  $\Phi_{\omega_0}(t) = Y(t) \otimes \sin(\omega_0 t/\pi t)$ .

В качестве примера на рис. 6 приведено распределение интенсивности света  $\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}) = |\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})|^2$  в изображении передней грани объёмного отверстия с заметно расширяющейся апертурой.

Проанализируем полученное выражение (15). Оно состоит из четырёх членов. Первые два из них описывают дифракционное изображение входной плоской щели шириной  $D$  (в виде свёртки функции  $\text{Rect}(\tilde{x}/D)$  с импульсным откликом  $h_{\omega_0}(\tilde{x}) = \sin(\omega_0 \tilde{x})/\pi \tilde{x}$ ) дифракционно-ограниченной оптической системы. Последние два члена отражают влияние задней грани на изображение передней грани протяжённого отверстия. Вследствие вторичной дифракции границы выходной щели объекта выступают в роли точечных источников, причём амплитуда их зависит от положения границ выходной щели относительно границы передней грани асимметричного объёмного края и уменьшается обратно пропорционально квадрату скоса  $c = 0,5(D_1 - D)$ . Таким образом, при входной апертуре  $D < D_1$  действующей гранью, определяющей структуру выходного изображения, является передняя грань. Отметим, что при наложенном условии  $D \gg \sqrt{\lambda d}$  влиянием перекрёстных краёв на распределение  $\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})$  можно пренебречь и это справедливо при  $\omega_0 D \gg 1$ . В этом случае систематическая погрешность определения положения границы объёмной щели с расширяющейся апертурой будет определяться остаточным влиянием второй грани.

Оценим эту погрешность. С этой целью найдём значение интенсивности света  $\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x}) = |\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x})|^2$  в точке  $\tilde{x} = -0,5D$ , соответствующей геометрическому положению одной из границ передней грани. При условии  $\omega_0 D \gg 1$ , что позволяет не учитывать взаимодействие дифракционных полей границ этой грани, нетрудно получить

$$\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x} = -0,5D) = 0,25 - \frac{\delta_d \omega_0}{4\pi^3 \hat{c}^2} \cos\left(\pi \hat{c}^2 - \frac{\pi}{4}\right). \quad (16)$$

При  $D_1 - D = c \gg \sqrt{\lambda d}$  приведённая погрешность  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon / \sqrt{\lambda d}$  определения положения границы  $\tilde{x} = -0,5D$  пороговым способом равна

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{I}_{\omega_0}(\tilde{x} = -0,5D) - 0,25}{\omega_0 / \pi} = \frac{\cos(\pi \hat{c}^2 - \pi/4)}{4\pi^3 \hat{c}^2} \leq \frac{1}{4\pi^2 \hat{c}^2}. \quad (17)$$

Видно, что изменение погрешности в зависимости от параметра  $\hat{c}$  носит колебательный знакопеременный характер, причём, как и следовало ожидать, эти колебания быстро затухают. Если выбрать, например,  $d = 1$  мм,  $\hat{c} = c / \sqrt{\lambda d} = 3$ ,  $\lambda = 0,5$  мкм ( $\delta_d = 22,4$  мкм), то максимальная погрешность определения положения границы щелевого отверстия согласно формуле (17) не превысит 0,06 мкм, т. е. будет пренебрежимо мала.

При размерном контроле иногда необходимо, чтобы оптическая система обладала приемлемым разрешением. Очевидно, что при малых угловых апертурах  $2\theta_0$  (при большой глубине фокусировки системы) размер импульсного отклика  $\Delta \sim \lambda / \theta_0$  оказывается достаточно большим, что приводит к ухудшению поперечного разрешения системы. Поэтому возникает задача при заданных параметрах  $\theta_c$  и  $\theta_{кр}$  выбрать апертуру  $2\theta_0$  оптимальным образом. Имеется ввиду следующее: оптическая система формирования изображения протяжённого отверстия с расширяющейся апертурой должна иметь такой угловой размер  $2\theta_0$  апертурной диафрагмы, чтобы она обеспечивала, с одной стороны, максимальный размер инвариантного поля, а с другой — приемлемое поперечное разрешение. Исходя из этого, максимально допустимое значение  $\theta_{опт}$  следует выбирать из условия, чтобы этот угол был равен углу скоса  $\theta_c = c/d$  за вычетом угла, пропорционального критическому углу дифракции  $\theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$  (см. рис. 5, b):

$$\theta_{опт} = \theta_c - q\theta_{кр}, \quad (18)$$

где  $q$  — коэффициент запаса. В качестве минимального значения можно выбрать  $q = 2$ . Как показывают расчёты, в этом случае приведённая формула (15) для изображения передней грани в такой квазиинвариативной системе работает достаточно хорошо.

**Дифракционно-ограниченное изображение передней грани протяжённого отверстия с заметно сужающейся апертурой.** Рассмотрим случай протяжённого отверстия, когда разность входной и выходной апертур много больше размера зоны Френеля, т. е.  $2c = D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$  (рис. 7, a). При расчётах поля в дальней зоне будем полагать, как и ранее, что угловые размеры фильтра  $2\theta_0$ , угол скоса  $\theta_c$  объекта, критический угол дифракции  $\theta_{кр}$  и граничный угол  $\theta_{гр} = \arctg(D - c)/d$  подчиняются неравенствам  $\theta_0 \ll \theta_{кр} \ll \theta_c \ll \theta_{гр} = \arctg(D - c)/d$ .

Спектр рассматриваемого объекта  $\mathbf{F}(\omega)$  в общем виде можно получить, если в выражении (10) заменить  $c$  величиной  $-c$ , поскольку  $D = D_1 + 2c$  (рис. 7, b):

$$\mathbf{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \left\{ e^{j\omega D/2} [\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_c) - \tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega - \omega_{гр})] - e^{-j\omega D/2} [\tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega + \omega_{гр}) - \tilde{Y}_{\omega_{кр}}(\omega + \omega_c)] + e^{j\omega^2 d/2k} [e^{j\omega D_1/2} - e^{-j\omega D_1/2}] \widetilde{\text{Rect}}_d \left( \frac{x_1 = 0,5D - |c|}{D} \right) \right\}. \quad (19)$$

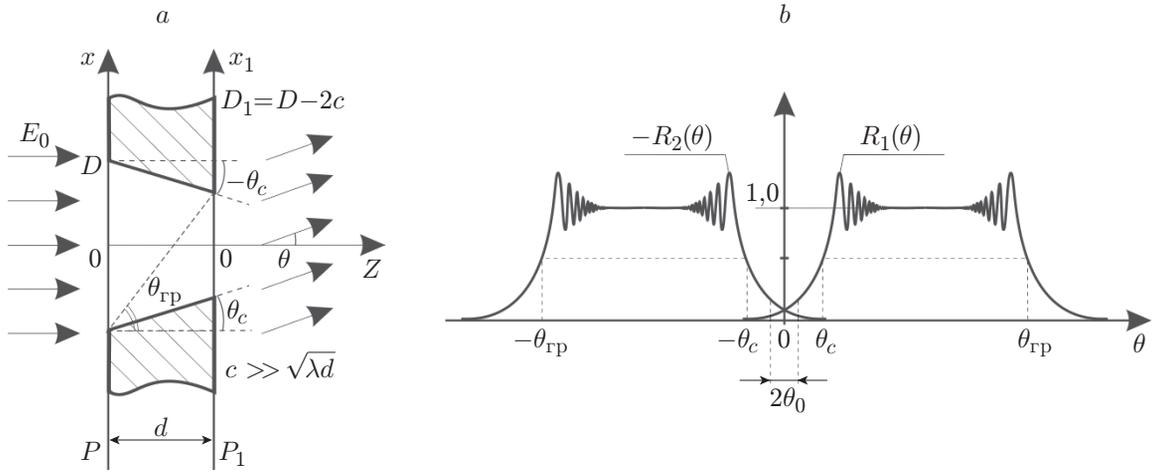


Рис. 7. Формирование изображения протяжённого отверстия с заметно сужающейся апертурой: сечение объекта (а), поведение диаграмм излучения  $R_1(\theta)$  и  $-R_2(\theta)$  (b)

Воспользуемся далее конструктивной аппроксимацией спектра  $\mathbf{F}(\omega)$  с учётом приведённых выше неравенств для параметров  $\theta_0$ ,  $\theta_c$ ,  $\theta_{кр}$  и  $\theta_{гр}$ . Так как граничный угол  $\theta_{гр}$  заметно больше угла скоса  $\theta_c$ , то это позволяет пренебречь влиянием членов, содержащих параметр  $\theta_{гр}$ .

Для спектра  $\mathbf{F}(\omega)$  в аппроксимированном виде можно получить следующее выражение:

$$\mathbf{F}(\omega) \approx \mathbf{F}^{ап}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \left\{ e^{j\omega D/2} \left[ -\frac{e^{j(\omega-\omega_c)^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega-\omega_c)/\omega_{кр}} \right] - e^{-j\omega D/2} \left[ \frac{e^{j(\omega+\omega_c)^2 d/2k} e^{j\pi/4}}{2\pi(\omega+\omega_c)/\omega_{кр}} \right] + \right. \\ \left. + [e^{j\omega D_1/2} - e^{-j\omega D_1/2}] \left[ 1 - \frac{e^{jkc^2/2d} e^{j\pi/4}}{2\pi c/\sqrt{\lambda d}} \right] \right\}. \quad (20)$$

После сокращения ряда членов при  $c \ll d$  выражение (20) заметно упрощается:

$$\mathbf{F}^{ап}(\omega) = \frac{e^{j\omega D_1/2} - e^{-j\omega D_1/2}}{j\omega} + \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j\omega D_1/2} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)}}{4\pi^2 \hat{c}^2} + \\ + \frac{\sqrt{\lambda d} e^{-j\omega D_1/2} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)}}{4\pi^2 \hat{c}^2}. \quad (21)$$

После низкочастотной фильтрации этого спектра фильтром с передаточной функцией  $\mathbf{H}(\omega) = \text{Rect}(\omega/2\omega_0)$  для поля в плоскости изображения передней грани протяжённого отверстия с заметно сужающейся апертурой ( $D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ ) получим выражение

$$\hat{f}_{\omega_0}(\tilde{x}) = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} + 0,5D_1) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x} - 0,5D_1) + \\ + \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)}}{4\pi^3 \hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} + 0,5D_1)]}{\tilde{x} + 0,5D_1} + \frac{\sqrt{\lambda d} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)}}{4\pi^3 \hat{c}^2} \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x} - 0,5D_1)]}{\tilde{x} - 0,5D_1}. \quad (22)$$

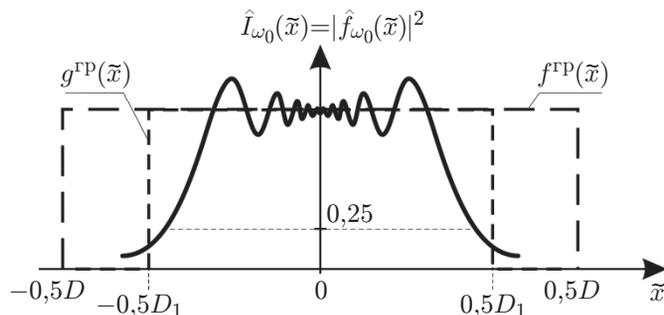


Рис. 8. Распределение интенсивности поля в изображении передней грани протяжённого отверстия с заметно сужающейся апертурой ( $D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ )

Из выражения (22) видно, что при  $D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$  действующей оказывается задняя грань с апертурой  $D_1$  (рис. 8). При этом ошибка определения положения границы в изображении края объёмной щели определяется формулой (17), которая оказывается справедливой также и для сужающегося отверстия. Очевидно, что в этом случае вторичная дифракция является определяющей.

Что касается выбора оптимального размера апертуры фильтра  $2\theta_{\text{опт}}$ , то и для сужающегося отверстия ( $D > D_1$ ) формула (18) для угла  $\theta_{\text{опт}}$  остаётся в силе (см. рис. 7, б). При этом нужно иметь в виду, что в рассматриваемом случае при  $D > D_1$  в диапазоне  $|\theta| \leq \theta_{\text{опт}}$  вклад в поле даёт вторичная дифракция, в то время как при формировании изображения отверстия с расширяющейся апертурой выходное поле определяется первичной дифракцией на объекте.

**Дифракционно-ограниченное изображение задней грани объёмных отверстий с различными раскрытиями.** Рассмотрим кратко формирование поля  $\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1)$  в изображении задней грани в дифракционно-ограниченной системе. Так как в этом случае угловая апертура  $2\theta_0$  диафрагмы-фильтра выбрана достаточно малой (глубина резкости системы  $\Delta z \sim \lambda/\theta_0^2$  много больше толщины объекта  $d$ , т. е.  $\Delta z \gg d$  ( $N = \theta_{\text{кр}}/\theta_0 \gg 1$ )), то поля в плоскостях  $P_3$  и  $P_4$  изображений передней и задней граней слабо отличаются друг от друга. Можно показать, что в случае объёмных отверстий с заметно расширяющимися ( $D_1 - D \gg \sqrt{\lambda d}$ ) и с заметно сужающимися апертурами ( $D - D_1 \gg \sqrt{\lambda d}$ ) выражения для полей в плоскости  $P_4$  имеют соответственно следующий вид:

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0,5D) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0,5D) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{4\pi^3 \tilde{c}^2} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)} \left[ \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 + 0,5D_1)]}{\tilde{x}_1 + 0,5D_1} + \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 - 0,5D_1)]}{\tilde{x}_1 - 0,5D_1} \right], \quad (23)$$

$$\hat{g}_{\omega_0}(\tilde{x}_1) = \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 + 0,5D_1) - \Phi_{\omega_0}(\tilde{x}_1 - 0,5D_1) + \frac{\sqrt{\lambda d}}{4\pi^3 \tilde{c}^2} e^{j(kc^2/2d - \pi/4)} \left[ \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 + 0,5D_1)]}{\tilde{x}_1 + 0,5D_1} + \frac{\sin[\omega_0(\tilde{x}_1 - 0,5D_1)]}{\tilde{x}_1 - 0,5D_1} \right]. \quad (24)$$

Полученные выражения (15), (22)–(24) для полей в изображениях передней и задней внешних граней протяжённых абсолютно поглощающих отверстий с положительным и отрицательным раскрытиями могут быть положены в основу нахождения формул для прецизионного определения размеров их передней (при  $D_1 > D$ ) и задней (при  $D > D_1$ ) апертур.

**Заключение.** Изучены особенности формирования в когерентно-оптической системе изображений внешних граней протяжённых абсолютно поглощающих объёмных отверстий постоянной толщины с произвольным раскрывом отверстий. На основе конструктивной аппроксимации спектров пространственных частот (дифракционных картин Фраунгофера) объектов с различными соотношениями размеров передней ( $D$ ) и задней ( $D_1$ ) апертур получены и проанализированы формулы для полей в изображениях передней и задней граней. Детально исследованы случаи объектов с заметно расширяющейся ( $D_1 - D \gg \delta_d = \sqrt{\lambda d}$ ) и заметно сужающейся ( $D - D_1 \gg \delta_d$ ) апертурами протяжённого отверстия с положительным и отрицательным раскрывами.

Показано, что в случае больших отличий апертур  $D$  и  $D_1$  структура изображения в плоскости, сопряжённой с плоскостью передней грани, зависит от типа раскрыва. Так, при положительном раскрыве ( $D_1 > D$ ), когда задняя грань находится в теневой области, поле на выходе системы соответствует изображению передней грани. А при отрицательном раскрыве, когда задняя грань находится в освещённой области, а передняя затенена задней гранью, на выходе системы наблюдается изображение задней грани. При этом погрешность определения границ в изображении действующей грани объекта обратно пропорциональна квадрату разности апертур.

Проанализированы инвариантные свойства проекционной системы формирования изображений граней протяжённых объектов с большими положительными и отрицательными скосами. Предложена формула для выбора оптимального размера апертурной диафрагмы (фильтра пространственных частот), обеспечивающей квазиинвариантность оптической системы при максимальном поперечном разрешении системы.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность Е. В. Сергееву и Е. С. Арсениной за техническую помощь при подготовке работы.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация № АААА-А17-117121270018-3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
3. Ваганов Р. Б., Кацеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
4. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1948. 134 с.
5. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. 244 с.
6. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
7. Хёнл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на телах постоянной толщины // Автометрия. 1987. № 3. С. 79–92.
9. Chugui Yu. V., Krivenkov B. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. 6, N 5. P. 617–626.
10. Чугуй Ю. В. Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
11. Чугуй Ю. В. Определение геометрических параметров протяжённых объектов постоянной толщины по их дифракционным картинкам // Автометрия. 1991. № 6. С. 76–92.
12. Чугуй Ю. В. Фурье-оптика 3D-объектов применительно к размерному контролю // Опτικο-информационные измерительные и лазерные технологии и системы: Сб. тр. КТИ НП СО РАН. Новосибирск: Изд-во «Гео», 2012. С. 15–42.

13. **Чугуй Ю. В.** Дифракционные явления на протяжённой асимметричной щели с абсолютно поглощающими внутренними гранями // Автометрия. 2022. **58**, № 1. С. 54–67. DOI: 10.15372/AUT20220107.
14. **Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В.** Дифракция Фраунгофера на отражающих объёмных телах постоянной толщины // Автометрия. 1991. № 4. С. 113–118.
15. **Чугуй Ю. В.** Формирование в когерентном свете изображений асимметричного абсолютно отражающего края 3D-объекта // Автометрия. 2021. **57**, № 3. С. 102–116. DOI: 10.15372/AUT20210312.
16. **Чугуй Ю. В.** Формирование в когерентном свете изображения протяжённого щелевого отверстия симметричного типа с абсолютно поглощающими внутренними гранями // Автометрия. 2022. **58**, № 3. С. 112–126. DOI: 10.15372/AUT20220313.
17. **Сороко Л. М.** Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
18. **Папулис А.** Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.
19. **Arsenault H. H., Brousseau N.** Space variance in quasi-linear coherent optical processors // JOSA. 1973. **63**, N 5. P. 555–558.

*Поступила в редакцию 25.07.2022*

*После доработки 02.08.2022*

*Принята к публикации 29.08.2022*

---