УДК 621.321

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

© **А. В. Чехонадских**

Новосибирский государственный технический университет,
630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: chekhonadskikh@corp.nstu.ru

Применяется полиномиальный подход к синтезу оптимальных регуляторов пониженного порядка для линейных стационарных одноканальных систем, описываемых системами дифференциально-алгебраических уравнений. Метод критических корневых диаграмм и корневых многочленов использовался для синтеза таких регуляторов в классических системах автоматического управления. В работе берётся неустойчивый объект управления, заданный неправильной передаточной дробью с числителем 6-й степени и знаменателем 4-й степени. Для него находятся настройки стабилизирующих ПИ$_3$-регуляторов, среди которых выделяется оптимальный по степени устойчивости; расчёт импульсной характеристики подтверждает его астатизм и безымпульсность. Схема метода остаётся той же, что и для классических систем управления, однако возникающие полиномиальные системы уравнений оказываются выше по степени и труднее для численного решения.

Ключевые слова: дескрипторная система, дифференциально-алгебраические уравнения, регулятор пониженного порядка, расположение полюсов, максимальная степень устойчивости, критическая корневая диаграмма, корневой многочлен, полиномиальные уравнения, импульсная характеристика.

DOI: 10.15372/AUT20230311

Введение. Дескрипторные системы управления, часто называемые также сингулярными или обобщёнными, описываются системами дифференциальных и алгебраических уравнений (ДАУ, DAE-systems) [1]. На практике нередко возникают примеры, когда использование алгебраических связей для понижения числа входящих в уравнения переменных неудобно или невозможно [1–3]. Поэтому всю систему, связывающую неизвестную вектор-функцию $x(t)$, внешнее (в частности, управляющее) воздействие $u(t)$ и доступный измерению выход $y(t)$, приходится рассматривать в виде векторного дифференциально-алгебраического уравнения. Если эти связи линейны и стационарны, им можно придать векторно-матричную форму с необратимой матрицей E:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t).$$

Хорошо известно, что свойства систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и ДАУ-систем существенно различаются, в частности, из-за наличия импульсных составляющих в решениях последних. Для существования и единственности решения требуется регулярность матричной пары $(E; A)$, т. е. необращение в тождественный ноль определителя $|sE-A|$ или выполнение неравенства $|\alpha E-A| \neq 0$ для некоторого скаляра α.

Условие регулярности оказывается чисто алгебраическим; применение преобразования Лапласа к векторно-матричному ДАУ приводит также к алгебраическому уравнению для изображений

$$Y(s) = C(sE-A)^{-1}BU(s) + C(sE-A)^{-1}Ex(0);$$

входящая в него дробно-рациональная матрица $G(s) = C(sE - A)^{-1}B$ называется передаточной матрицей системы. При нулевых начальных условиях или при условии $Ex(0) = 0$ она задаёт связь между выходом системы $y(t)$ и управляющим воздействием $u(t)$.

Также алгебраическую форму принимают определения важнейших для ДАУ-систем свойств, таких как

— устойчивость: все полюса системы имеют отрицательную действительную часть, т. е. $\{z \mid \det(zE - A) = 0\} \subset C^{-}$;

— безымпульсность: $\deg\det(sE - A) = \operatorname{rank} E$.

Наконец, система называется допустимой, если она регулярна, устойчива и безымпульсна.

Поскольку основные понятия дескрипторных систем в частотной области принимают алгебраическую форму, попытка применить алгебраические средства для расчёта стабилизирующей обратной связи представляется вполне естественной, что отмечается в [4, 5]. Однако численное решение ДАУ и синтез регуляторов для дескрипторных систем осуществляется исключительно в пространстве состояний. Отчасти это связано с тем, что в отличие от ОДУ-систем передаточная матрица дескрипторной системы за счёт импульсной составляющей оказывается неправильной или, что то же самое, суммой строго правильной и целой полиномиальной матриц: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$; в свою очередь, это предопределяет заметные отличия в поиске стабилизирующего замкнутую систему регулятора.

В представленной работе излагается алгебраический метод нахождения оптимальных или субоптимальных регуляторов пониженного порядка для одноканальных дескрипторных систем. Основные идеи такого подхода для классических линейных стационарных систем управления изложены в работах [6–8], где они демонстрируются на примерах синтеза регулятора пониженного порядка для трёхмассовой конструкции с упругими связями и двойного перевёрнутого математического маятника на подвижном основании.

Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, передаточная функция которого представляет собой неправильную рациональную дробь $G(s) = N_{pl}D_{pl}^{-1}$. Управление переходными процессами осуществляется регулятором с передаточной функцией $Co(s) = N_{co}D_{co}^{-1}$; будем называть его порядок пониженным, если число настраиваемых параметров или способ их вхождения в характеристический многочлен замкнутой системы (знаменатель её передаточной функции $F(s) = N_{pl}N_{co} + D_{pl}D_{co}$) не позволяет обеспечить произвольное расположение характеристических корней, т. е. полюсов системы.

На примере дескрипторной системы, заданной неустойчивой передаточной дробью с целой (импульсной) частью 2-й степени, продемонстрируем применение техники критических корневых диаграмм [6, 7] для построения стабилизирующего ПИ$_3$-регулятора, обеспечивающего оптимальную или субоптимальную степень устойчивости и астатизм замкнутой системы.

Гурвицева функция, критические диаграммы и корневые многочлены. Пусть $\{z_1, \ldots, z_n\}$ — характеристические корни, или полюса замкнутой системы, возможно, совпадающие, так что $n = \deg F(s)$. В качестве целевой возьмём гурвицеву функцию, которая противоположна степени устойчивости системы: $H = \max\limits_k \operatorname{Re} z_k$.

Те корни, на которых достигается максимум, будем называть крайними правыми: $\{p_0, \ldots, p_{2k}\} \subseteq \{z_1, \ldots, z_n\}$, где p_0 — самый правый из действительных корней (если он существует и $H = p_0$), а следующие $2k$ корней образуют комплексно-сопряжённые пары.

Функция $H(\mathrm{K})$ фактически зависит от m настраиваемых параметров регулятора $\mathrm{K} = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$, поэтому достижение максимальной степени устойчивости означает минимизацию гурвицевой функции в m-мерном пространстве свободных параметров регуля-

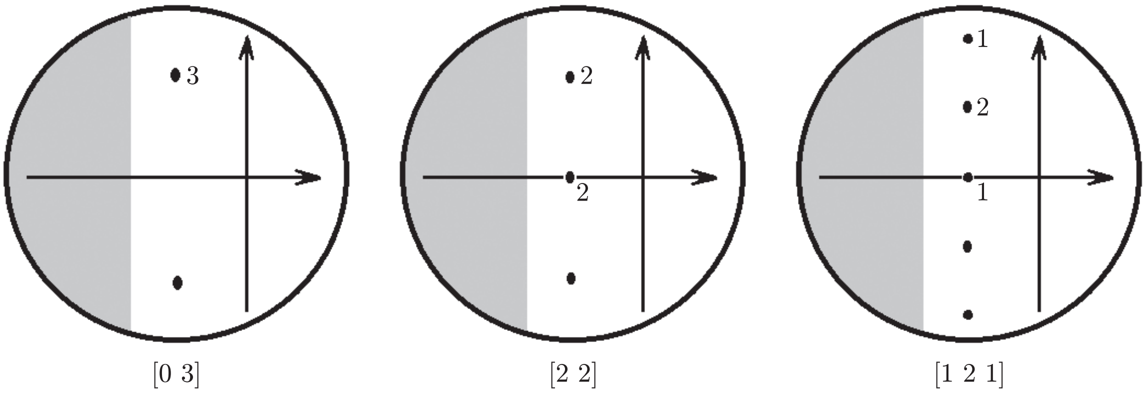

Рис. 1. Критические корневые диаграммы, схематически показывающие расположение правых полюсов для оптимальных регуляторов с четырьмя настраиваемыми параметрами. Значение R-градуировок и степень устойчивости определяются положением крайних правых полюсов, остальные на неё не влияют и условно изображаются серой зоной слева

тора. Этот подход содержательно и технически отличается от нахождения оптимального регулятора с использованием квадратичных функционалов [9].

Минимизация невыпуклых функций сопряжена с хорошо известными трудностями [10]; для функции $H(\mathrm{K})$ они усугубляются её овражным рельефом, многоэкстремальностью и недифференцируемостью [6, 11]. Поэтому обычные оптимизационные средства здесь представляются малоэффективными. Однако на множестве задач удалось убедиться, что типичные минимумы гурвицевой функции находятся в точках пространства параметров, где совпадают либо сами характеристические корни: $z_k = z_l$, т. е. они оказываются кратными, либо их действительные части: $\operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_l$. Аналогичные возможности представляются и для функций, подобных гурвицевой и названных в [6, 7] R-градуировками.

Схематическое изображение взаимного расположения крайних правых корней будем называть корневой диаграммой; три из них, которые потребуются для изложения примера далее, представлены на рис. 1. Поскольку положение остальных корней не влияет на значение гурвицевой функции $H(\mathrm{K})$, они условно изображены на диаграмме серой зоной.

Условие одновременного попадания простого действительного корня и комплексной пары или двух комплексных пар на прямую $\operatorname{Re} z = H(\mathrm{K})$ — правую границу области расположения всех корней — задаёт $(m-1)$-мерное многообразие в пространстве K параметров регулятора. Если действительный корень двукратный, размерность этого многообразия уменьшается на единицу, если двукратна комплексная пара — на двойку. Расположение на правой границе k различных комплексных пар или $k-1$ пары и простого действительного корня задаёт многообразие размерности $m-k+1$. Пока эта размерность положительна, могут быть продолжены минимизация гурвицевой функции (как и другой целевой функции) и соответственно смещение влево правой границы вместе с расположенными на ней корнями. При этом на правую границу попадают корни, находившиеся левее, их подмножество увеличивается, как и число уравнений, задающих границу в пространстве K параметров регулятора, так что размерность соответствующего диаграмме многообразия снижается.

Обозначив значение гурвицевой функции $H(\mathrm{K}) = x$, запишем несовпадающие крайние правые корни: $p_0 = x$, $p_{1,2} = x \pm iy_1, \ldots, p_{2k-1,2k} = x \pm iy_k$ $(0 < y_1 < \ldots < y_k)$.

Пусть n_0 — кратность действительного корня p_0 ($n_0 = 0$, если среди крайних правых корней нет действительного корня); n_1 — кратность комплексной пары $p_{1,2} = x \pm iy_1$ и далее до n_k — кратность пары $p_{2k-1,2k} = x \pm iy_k$.

Тогда при условии $m = n_0+2n_1+\ldots+2n_k-k-1$ размерность многообразия оказывается нулевой (т. е. оно состоит из нескольких точек), а все варианты взаимных расположений правых корней можно перечислить [8]. Поскольку в каждом случае могут достигаться локальные и глобальный экстремумы целевой функции, будем называть соответствующие корневые диаграммы критическими. Их общее число и точные схемы зависят от размерности пространства параметров.

Строка кратностей $[n_0\, n_1\, \ldots\, n_k]$ задаёт код критической корневой диаграммы. Например, для диаграмм на рис. 1 кодами оказываются $[\mathbf{0\ 3}]$, $[\mathbf{2\ 2}]$ и $[\mathbf{1\ 2\ 1}]$.

То расположение корней, которое схематизируется корневой диаграммой, задаёт корневой многочлен [6–8], т. е. набор множителей, включающий эти корни:

$$r(s) = (s-x)^{n_0}[(s-x+iy_1)(s-x-iy_1)]^{n_1}\ldots[(s-x+i\,y_k)(s-x-i\,y_k)]^{n_k} =$$

$$= (s-x)^{n_0}(s^2-2xs+x^2+y_1^2)^{n_1}\ldots(s^2-2xs+x^2+y_k^2)^{n_k}.$$

Если некоторые характеристические корни $\{p_0, \ldots, p_{2k}\}$ кратностей $[n_0\, n_1\, \ldots\, n_k]$ располагаются на комплексной плоскости вертикально $p_0 = \operatorname{Re} p_1 = \ldots = \operatorname{Re} p_{2k}$, то характеристический многочлен $F(s)$ делится на корневой $r(s)$ нацело, т. е. $\operatorname{rem}(F(s), r(s)) = 0$; это условие позволяет сформировать систему уравнений для нахождения критических точек гурвицевой функции. Критическая корневая диаграмма реализуется, этот «вертикальный» набор корней $\{p_0, \ldots, p_{2k}\}$ действительно располагается правее всех остальных.

Расчёт примера. Пусть передаточная функция объекта такова:

$$G(s) = \frac{N_{pl}}{D_{pl}} = \frac{s^6+3s^5+12s^4+17s^3+28s^2+12s+8}{s^4-2s^3+6s^2-8s+8} =$$

$$= IMP\,(s) + \frac{R(s)}{D_{pl}(s)} = s^2+5s+16+\frac{27s^3-36s^2+100s-120}{s^4-2s^3+6s^2-8s+8}.$$

Знаменатель объекта $D_{pl}(s) = s^4-2s^3+6s^2-8s+8 = (s^2-2s+2)(s^2+4)$ содержит два полюса на границе устойчивости и два неустойчивых полюса; колебательность, задаваемая мнимыми частями полюсов, также достаточно велика.

Если взять ПИ3-регулятор с передаточной функцией

$$Co(s) = \frac{N_{co}}{D_{co}} = \frac{a_1s^3+b_1s^2+c_1s+d_1}{s^3},$$

то передаточная функция замкнутой системы

$$W(s) = \frac{G(s)\,Co(s)}{1+G(s)\,Co(s)} = \frac{N_{pl}N_{co}}{N_{pl}N_{co}+D_{pl}D_{co}}$$

приведёт к такому характеристическому многочлену:

$$F(s) = N_{pl}N_{co}+D_{pl}D_{co} = a_1s^9+(3a_1+b_1)s^8+(12a_1+3b_1+c_1+1)s^7+(17a_1+12b_1+$$

$$+3c_1+d_1-2)s^6+(28a_1+17b_1+12c_1+3d_1+6)s^5+(12a_1+28b_1+17c_1+12d_1-8)s^4+$$

$$+(8a_1+12b_1+28c_1+17d_1+8)s^3+(8b_1+12c_1+28d_1)s^2+(8c_1+12d_1)s+8d_1 =$$

$$= a_1 f(s) = a_1[s^9 + (3+b)s^8 + (12+3b+c+a)s^7 + (17+12b+3c+d-2a)s^6 +$$

$$+ (28+17b+12c+3d+6a)s^5 + (12+28b+17c+12d-8a)s^4 + (8+12b+28c+$$

$$+ 17d+8a)s^3 + (8b+12c+28d)s^2 + (8c+12d)s + 8d],$$

где $a = 1/a_1$, $b = b_1/a_1$, $c = c_1/a_1$, $d = d_1/a_1$.

Замкнутая система стабилизируема; например, при числителе $N_{co}(s) = s^3 + 2s^2 + 14s + 18$ степень устойчивости системы равняется 0,176, так как крайние правые полюса здесь $p_{1,2} \approx -0{,}176 \pm 0{,}615$, а остальные характеристические корни $z_3, \ldots, z_9$ расположены левее (их обозначение сменилось, а нумерация продолжена).

Поиск локальных и глобального экстремумов четырёхпараметрической функции $H(a,b,c,d)$ с помощью критических корневых расположений требует рассмотрения 13 корневых диаграмм и 10 различных корневых многочленов [7, 8], поскольку некоторым диаграммам соответствует один и тот же корневой многочлен. Далее проиндексируем корневые многочлены кодами соответствующих корневых диаграмм.

Заметим, что случай [**0 1 1 1 1 1**] пяти простых комплексно-сопряжённых пар с одинаковой действительной частью здесь невозможен, так как он требует многочлена, как минимум, 10-й степени. Теоретически допустимый случай [**1 1 1 1 1**], требующий простоты всех полюсов системы и их расположения на одной вертикали: $\mathrm{Re}\, p_{1,\ldots,8} = p_0$, здесь не возникает. Рассмотрим реализующиеся варианты.

1) Простейший вариант критического корневого расположения включает пятикратный действительный корень $p_{1,\ldots,5} = x$, который должен оказаться правее остальных четырёх. Код критической диаграммы [**5**], корневой многочлен принимает форму $r_{[5]} = (s-x)^5$. При делении характеристического многочлена $f(s)$ на корневой получается остаток степени 4. Поскольку реализация корневого расположения требует деления нацело, остаток нужно приравнять к тождественному нулю:

$$\mathrm{rem}\,(f(s), r_{[5]}) = eq_4 s^4 + eq_3 s^3 + eq_2 s^2 + eq_1 s + eq_0 = 0.$$

Следовательно, в ноль обращаются все его коэффициенты eq_k:

$$eq_4 = (35x^3 - 30x^2 + 30x - 8)a + (70x^4 + 105x^3 + 180x^2 + 85x + 28)b + (35x^3 + 45x^2 +$$
$$+ 60x + 17)c + (15x^2 + 15x + 12)d + 126x^5 + 210x^4 + 420x^3 + 255x^2 + 140x + 12 = 0;$$

$$eq_3 = (80x^3 - 105x^4 - 60x^2 + 8)a - (224x^5 + 315x^4 + 480x^3 + 170x^2 - 12)b - (105x^4 + 120x^3 +$$
$$+ 120x^2 - 28)c - (40x^3 + 30x^2 - 17)d - 20(21x^6 + 33{,}6x^5 + 63x^4 + 34x^3 + 14x^2 - 0{,}4) = 0;$$

$$eq_2 = (126x^5 - 90x^4 + 60x^3)a + (280x^6 + 378x^5 + 540x^4 + 170x^3 + 8)b + (126x^5 + 135x^4 +$$

$$+ 120x^3 + 12)c + (45x^4 + 30x^3 + 28)d + 540x^7 + 840x^6 + 1512x^5 + 765x^4 + 280x^3 = 0;$$

$$eq_1 = (-70x^6 + 48x^5 - 30x^4)a - (160x^7 + 210x^6 + 288x^5 + 85x^4)b - (70x^6 + 72x^5 + 60x^4 - 8)c -$$

$$- (24x^5 + 15x^4 - 12)d - 315x^8 - 480x^7 - 840x^6 - 408x^5 - 140x^4 = 0;$$

$$eq_0 = (15x^7 - 10x^6 + 6x^5)a + (35x^8 + 45x^7 + 60x^6 + 17x^5 + 85x^4)b + (15x^7 + 15x^6 + 12x^5)c + \\ + (5x^6 + 3x^5 + 8)d + 70x^9 + 105x^8 + 180x^7 + 85x^6 + 28x^5 = 0.$$

Стандартная численная процедура решения полиномиальной системы уравнений приводит к неустойчивому значению $x \approx 0{,}2697$.

Однако из уравнения $eq_4 = 0$ можно выразить параметр d и, подставляя его в остальные, получить систему четырёх уравнений $eq'_3 = eq'_2 = eq'_1 = eq'_0 = 0$. Теперь стандартная процедура приводит к другому ответу, который также неустойчив: $x \approx 3{,}1200$.

Далее можно выразить параметр c из уравнения $eq'_3 = 0$ и подставить его в остальные три: $eq''_2 = eq''_1 = eq''_0 = 0$.

Теперь появляется устойчивое решение: $x \approx -2{,}8517$, $a \approx -6{,}3063$, $b \approx 12{,}4939$, соответствующий характеристический многочлен таков:

$$f(s) \approx s^9 + 15{,}4939s^8 + 104{,}1621s^7 + 408{,}9562s^6 + 1073{,}7682s^5 + \\ + 2006{,}5316s^4 + 2604{,}8637s^3 + 2132{,}5753s^2 + 1045{,}3718s + 371{,}6528.$$

Его корни включают две комплексные пары $z_{1,2} \approx -0{,}1921 \pm 0{,}6368$, $z_{3,4} \approx -0{,}4258 \pm 2{,}0673$, а также «почти пятикратную» группу корней:

$$z_5 \approx -2{,}9345, \quad z_{6,7} \approx -2{,}7859 \pm 0,0471, \quad z_{8,9} \approx -2{,}8761 \pm 0,0784.$$

Степень устойчивости здесь немного больше, чем для вышеприведённого случая, но критическое корневое расположение не возникает (можно назвать его зеркальным отражением критического): пятикратный корень оказывается не справа, а слева от остальных. Это позволяет смещать правую комплексную пару влево, уменьшая значение функции $H(a, b, c, d)$ за счёт лучшего выбора параметров регулятора.

2) Случай трёхкратной комплексной пары $p_{1,\dots,6} = x \pm iy$ несколько сложнее. Здесь код критической корневой диаграммы [**0 3**] (см. рис. 1, слева), корневой многочлен $r_{[0\,3]} = (s^2 - 2xs + x^2 + y^2)^3$. Деление $f(s)/r_{[0\,3]}$ приводит к остатку пятой степени

$$\mathrm{rem}\,(f(s), r_{[0\,3]}) = eq_5 s^5 + eq_4 s^4 + eq_3 s^3 + eq_2 s^2 + eq_1 s + eq_0,$$

коэффициенты eq_k которого нужно приравнять к нулю:

$$eq_5 = (21x^2 - 3y^2 - 12x + 6)a + (56x^3 - 24xy^2 + 63x^2 - 9y^2 + 72x + 17)b + (21x^2 - 3y^2 + 18x + \\ + 12)c + (6x + 3)d + 126x^4 + 6y^4 - 108x^2y^2 + 168x^3 - 72xy^2 + 252x^2 - 36y^2 + 102x + 28 = 0;$$

$$\vdots$$

$$eq_0 = (-6x + 2)(x^2 + y^2)^3 a + (-18x^5(x^2 + 3y^2) - 21x^8 - 60x^6y^2 - 54x^4y^4 - 12x^2y^6 + 3y^8 - \\ - 18xy^4(x^2 + 3y^2) - 12(x^2 + y^2)^3)b + (-3(x^2 + y^2)^3)c + (x^2 + y^2)^3 d - \\ - 56x^9 - 144x^7y^2 - 96x^5y^4 + 16x^3y^6 + 24xy^8 - 63x^8 - 180x^6y^2 - 36x^2y^6 - 162x^4y^4 + 9y^8 - \\ - 6x(12x^6 + 13y^6) - 17(x^6 + y^6) - 216x^3y^2(x^2 + y^2) - 51x^2y^2(x^2 + y^2)^5 = 0.$$

Численное решение приводит к следующим значениям:

$$x \approx -0{,}2996, \quad y \approx 1{,}0267, \quad a \approx -0{,}5346, \quad b \approx 0{,}2634, \quad c \approx 1{,}2287, \quad d \approx 0{,}5939.$$

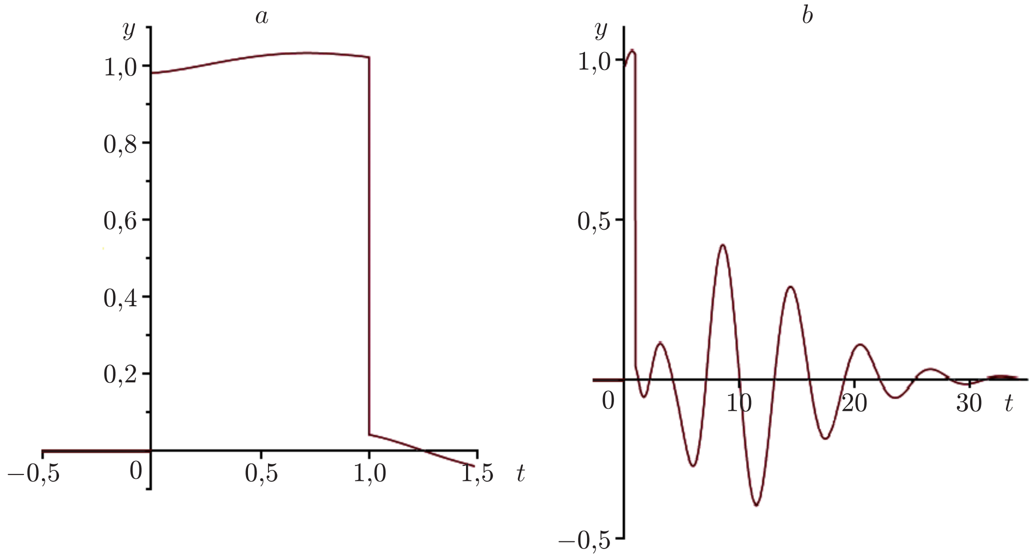

Рис. 2. Импульсная характеристика системы, замкнутой субоптимальным ПИ$_3$-регулятором: *a* — график выхода системы при действии возмущения $\Delta y = \text{Heviside}\,(t) - \text{Heviside}\,(t-1)$; *b* — график участка стабилизации возмущения до 0,01 от начального значения

Характеристический многочлен получается следующим:

$$f(s) \approx s^9 + 3{,}2634s^8 + 13{,}4845s^7 + 25{,}51062s^6 + 45{,}7980s^5 +$$
$$+ 51{,}6685s^4 + 51{,}3860s^3 + 33{,}4812s^2 + 16{,}9566s + 4{,}7510.$$

Его крайние правые корни $p_{1,2} \approx -0{,}2990 \pm 1{,}0270$, $p_{3,4} \approx -0{,}2996 \pm 1{,}0260$, $p_{5,6} \approx$ $\approx -0{,}3002 \pm 1{,}0270$ близки к трёхкратной комплексной паре; тройка остальных расположена левее: $z_{7,8} \approx -0{,}4610 \pm 2{,}3721$, $z_9 \approx -0{,}5437$.

Поэтому критическая корневая диаграмма реализована, и здесь достигается локальный минимум гурвицевой функции, хотя её значение лишь немного ниже, чем в предыдущем случае.

На рис. 2 показана импульсная характеристика системы, на вход которой подаётся возмущение $\Delta y = \text{Heviside}\,(t) - \text{Heviside}\,(t-1)$. Хотя общая динамика переходных процессов астатически устойчива, обращают на себя внимание и наращивание величины возмущения в процессе действия импульса на интервале 0–0,7 с, и рост амплитуды остаточных колебаний на отрезке 1–9 с.

3) Случай двукратной комплексной пары $p_{2,\ldots,6} = x \pm iy$ с той же действительной частью, что и кратный корень $p_{0,1} = x$, схож с предыдущим. Код корневой диаграммы [**2 2**] (см. рис. 1 в центре), корневой многочлен принимает форму $r_{[2\,2]} = (s-x)^2(s^2 - 2xs + x^2 + y^2)^2$. Степень остатка от деления $f(s)/r_{[2\,2]}$ также равна пяти, но уравнения для параметров иные:

$$eq_5 = (21x^2 - 3y^2 - 12x + 6)a + (56x^3 - 24xy^2 + 63x^2 - 9y^2 + 72x + 17)b + (21x^2 - 3y^2 + 18x +$$
$$+ 12)c + (6x+3)d + 126x^4 + 6y^4 - 108x^2y^2 + 168x^3 - 72xy^2 + 252x^2 - 36y^2 + 102x + 28 = 0;$$

$$\vdots$$

$$eq_0 = (-6x+2)(x^2+y^2)^3 a + (-18x^5(x^2+3y^2) - 21x^8 - 60x^6y^2 - 54x^4y^4 - 12x^2y^6 + 3y^8 -$$
$$- 18xy^4(x^2+3y^2) - 12(x^2+y^2)^3)b + (-3(x^2+y^2)^3)c + (x^2+y^2)^3 d -$$
$$- 56x^9 - 144x^7y^2 - 96x^5y^4 + 16x^3y^6 + 24xy^8 - 63x^8 - 180x^6y^2 - 36x^2y^6 - 162x^4y^4 + 9y^8 -$$
$$-6x(12x^6+13y^6) - 17(x^6+y^6) - 216x^3y^2(x^2+y^2) - 51x^2y^2(x^2+y^2)^5 = 0.$$

Численное решение даёт такие значения:

$$x \approx -0{,}6656, \quad y \approx 0{,}5000, \quad a \approx 1{,}3521, \quad b \approx 5{,}1336, \quad c \approx 2{,}5789, \quad d \approx 0{,}4443.$$

Характеристический многочлен получается следующим:

$$f(s) \approx s^9 + 8{,}1336s^8 + 31{,}3318s^7 + 84{,}0800s^6 + 155{,}6640s^5 +$$
$$+ 194{,}0971s^4 + 160{,}31834s^3 + 84{,}4558s^2 + 25{,}9629s + 3{,}5542.$$

Его крайними правыми корнями оказывается пара $p_{1,2} \approx -0{,}3974 \pm 2{,}1992$.

Корневое расположение, предусматривающееся корневой диаграммой, реализуется левее этой пары: $z_{3,4} \approx -0{,}6656 \pm 0{,}0010$, $z_{5,6} \approx -0{,}6653 \pm 0{,}5004$, $z_{7,8} \approx -0{,}6658 \pm 0{,}4995$ (здесь пару $z_{3,4}$ можно рассматривать как «почти двукратный» действительный корень, а комплексные пары $z_{5,6}$, $z_{7,8}$ вместе образуют «почти двукратную» пару). Самым левым окажется простой действительный корень $z_9 \approx -3{,}3452$. Хотя степень устойчивости здесь выше, чем в предыдущих случаях, расположение корней не является критическим, и степень устойчивости может быть улучшена.

4) Наилучший результат получился при таком расположении: крайними правыми полюсами должны быть простой действительный корень $p_0 = x$, двукратная комплексная $p_{1,\ldots,4} = x \pm iy_1$ и простая комплексная $p_{5,6} = x \pm iy_2$ пары с одинаковой действительной частью. Этому соответствуют код диаграммы $[\mathbf{1\ 2\ 1}]$ (см. рис. 1 справа) и корневой многочлен

$$r_{[1\,2\,1]} = (s-x)(s^2 - 2xs + x^2 + y_1^2)^2(s^2 - 2xs + x^2 + y_2^2).$$

Остаток от деления $f(s)/r_{[1\,2\,1]}$ имеет 6-ю степень, и приравнивание к нулю его коэффициентов приводит к уравнениям

$$eq_6 = (7x-2)a + (28x^2 - 2y_1^2 - y_2^2 + 21x + 12)b + (7x+3)c + d +$$
$$+ 84(x^3 + x^2 + x) - (3x+1)(6y_1^2 + 3y_2^2) + 17 = 0;$$

$$\vdots$$

$$eq_0 = x(x^2+y_1^2)^2(x^2+y_2^2)(a + c + (7x+3)b + 28x^2 - 2y_1^2 - y_2^2 + 21x + 12) + 8d = 0.$$

Численное решение таково:

$$x \approx -0{,}4428, \quad y_1 \approx 0{,}5437, \quad y_2 \approx 2{,}1678,$$

$$a \approx 0{,}5250, \quad b \approx 2{,}8725, \quad c \approx 1{,}5885, \quad d \approx 0{,}3098.$$

Оно задаёт следующий характеристический многочлен:

$$f(s) \approx s^9 + 5{,}8725s^8 + 22{,}7308s^7 + 55{,}4948s^6 + 99{,}9727s^5 +$$
$$+ 118{,}9505s^4 + 96{,}4126s^3 + 50{,}7152s^2 + 16{,}4251s + 2{,}4783.$$

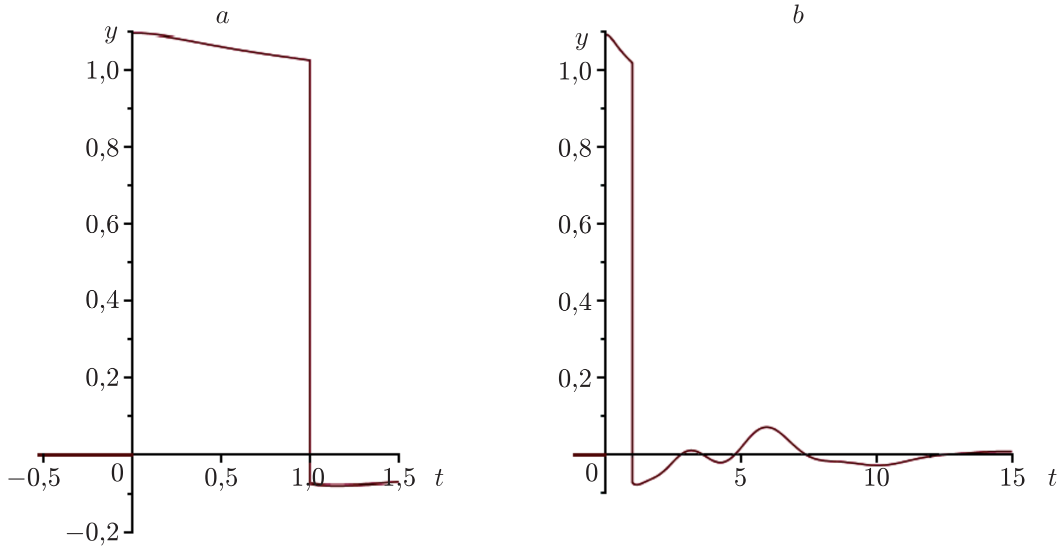

Рис. 3. Импульсная характеристика системы, замкнутой оптимальным ПИ$_3$-регулятором (обозначения как на рис. 2)

На его корневом множестве достигается наибольшее значение степени устойчивости из тех, что удалось найти почти с той же колебательностью по сравнению с самим объектом:

$$p_0 \approx -0{,}44282, \quad p_{1,2} \approx -0{,}44281 \pm 0{,}54371i, \quad p_{3,4} \approx -0{,}44283 \pm 0{,}54379i,$$

$$p_{5,6} \approx -0{,}44282 \pm 2,16780i, \quad z_{7,8} \approx -1{,}38636 \pm 1{,}67497i.$$

Здесь, вероятно, достигается глобальный минимум гурвицевой функции.

На рис. 3 показана импульсная характеристика системы под действием возмущения $\Delta y = \mathrm{Heviside}\,(t) - \mathrm{Heviside}\,(t-1)$. Подавление квадратного импульса начинается уже во время его действия на замкнутую систему; как показывают расчёты, переходные процессы не выходят за рамки 0,01 от исходного возмущения уже после 12 с — это примерно в 2,7 раза быстрее, чем в случае (2).

Замечание. Решение с близким по действительной части значением $x \approx -0{,}4405$ для всей шеренги корней диаграммы рис. 1 (справа) достигается при значениях $y_1 \approx 0{,}9927$, $y_2 \approx 5{,}6147$, $a \approx -0{,}6261$, $b \approx -0{,}0181$, $c \approx 1{,}0880$, однако, как и в варианте 1, вся семёрка полюсов оказывается крайней слева из-за простой пары $p_{1,2} \approx 0{,}0507 \pm 1{,}0215i$ (последняя определяет неустойчивость замкнутой системы).

Заключение. Рассмотренный пример позволяет утверждать, что алгебраический подход к стабилизации дескрипторной системы регулятором заданной структуры позволяет использовать в точности те же приёмы, которые применялись в классических системах управления. Но следует отметить следующие отличия.

Во-первых, вхождение параметров регулятора в числитель его передаточной функции при $\deg N_{pl} > \deg D_{pl}$ приводит к тому, что весь их набор $\{a; b; c; d\}$ входит в каждый коэффициент остатка от деления характеристического многочлена на корневой. Это заметно увеличивает трудности их нахождения из системы $eq_k(a, b, c, d, x, \ldots) = 0$ $(k = 0, \ldots, \deg r(s) - 1)$ линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами; аналогичные системы уравнений для трёхмассового объекта оказывались треугольными, а в одном из случаев — даже диагональными (для двойного перевёрнутого маятника в качестве управляемого объекта, подробное изложение в [11]).

Во-вторых, трудности решения системы $eq_k(a, b, c, d, x, \ldots) = 0$ отчасти выражаются в расходимости стандартных вычислительных процедур в тех случаях, когда решение существует и обнаруживается после некоторых преобразований (например, как в варианте 1; отметим, что при поиске решений в поле комплексных чисел решение находилось почти всегда). Приведённые выше решения являются локальными минимумами, что косвенно подтверждается попытками градиентного спуска из найденных точек: все они не выходили из окрестности указанных значений.

В-третьих, неоднократные попытки решения полиномиальной системы $eq_k(a, b, c, d, x, \ldots) = 0$ с помощью градиентной минимизации до нуля целевой функции $E = \sum_{k=1}^{\deg r(s)} eq_{k-1}^2(a, b, c, d, x, \ldots)$ приводили к постепенному сползанию градиентного спуска в одно из решений системы уравнений $eq_k(a, b, c, d, x, \ldots) = 0$, что косвенно подтверждает их оптимальность; отметим, что градиент ∇E здесь выражается аналитически и находится с незначительными вычислительно-временными затратами (градиентный спуск можно использовать и для непосредственной минимизации R-градуировок, которые в естественных примерах удовлетворяют условию Поляка — Лоясевича [10]).

В-четвёртых, предлагаемый пример показал большое разнообразие решений, соответствующих «зеркальным» (по отношению к критическим) корневым диаграммам; для классических систем управления такое множество некритических расположений корней нетипично.

Наконец, отметим, что алгебраические приёмы для исследования дескрипторных объектов включают в себя матричное уравнение Риккати [1–3], полиномиальную интерполяцию выделенных точек [12], структурированный итеративный поиск собственных значений [13] и др.; тем не менее выбор структуры регуляторов и оптимизация их параметров для дескрипторных систем управления осуществляется в пространстве состояний. Так, в работе [5] сравниваются два различных подхода к стабилизации k-массовой системы с упругими связями и ограничениями в пространстве состояний, хотя в [4] отмечалась возможность адекватного перевода такой модели в строго алгебраическую (т. е. матрично-полиномиальную) форму. Между тем полиномиальные методы показали свою эффективность в задаче стабилизации колебаний трёх тел с упругими связями, рассмотренных в [14, 15] как классическая система управления, а в [5] — как дескрипторная система с сервоограничениями алгебраического типа. Такое же сопоставление возникает для полиномиального решения маятниковых задач [8, 11, 14, 15] и схожих моделей с сервоограничениями, приведённых в [16, 17]. Проанализированный в работе пример убеждает, что полиномиальный подход может служить полезной альтернативой обычным методам стабилизации практически обусловленных моделей дескрипторного типа, а поскольку типичные задачи моделирования нелинейных динамических систем связаны с одновременным рассмотрением дифференциальных и функциональных уравнений (см., напр., [18, 19]), то линеаризация последних также приведёт к решению или качественному исследованию систем ДАУ.

Благодарность. Автор выражает признательность проф. Штефану Тренну (Университет Гронингена) за ознакомление и консультации в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белов А. А., Курдюков А. П.** Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015. 272 с.

2. **Berger Th., Reis T., Trenn S.** Observability of linear differential-algebraic systems — a survey. Surveys in Differential-Algebraic Equations IV /Ed. A. Ilchmann, T. Reis. Springer Editors, 2017. P. 161–219.
3. **Feng Y., Yagoubi M.** Robust Control of Linear Descriptor Systems. Singapore: Springer, 2017. 142 p.
4. **Altmann R., Heiland J.** Simulation of multibody systems with servo constraints through optimal control // Multibody System Dynamics. 2017. **40**, N 1. P. 75–98.
5. **Otto S., Seifried R.** Open-Loop control of underactuated mechanical systems using servo-constraints: Analysis and some examples // Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks /Ed. by Campbell S., Ilchmann A., Mehrmann V., Reis T. Differential-Algebraic Equations Forum. Springer Nature Switzerland AG, 2019. P. 81–122.
6. **Chekhonadskikh A. V., Voevoda A. A.** Algebraic design method of low order control systems // Proc. of the Int. Siberian Conf. on Control and Communications (SIBCON 2015). Proceedings, 2015. 7147022. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147022.
7. **Чехонадских А. В.** Корневые координаты в синтезе одноканальных систем автоматического управления пониженного порядка // Автометрия. 2015. **51**, № 5. С. 113–123.
8. **Chekhonadskikh A. V.** Some classical number sequences in control system design // Siberian Electronic Mathematical Rep. 2017. **14**. P. 620–628.
9. **Wijnbergen P., Trenn S.** Optimal control of DAEs with unconstrained terminal costs // Proc. of the 60th IEEE Conf. Decision and Control (CDC 2021). Austin, USA, Dec. 14–17, 2021. 21541247. P. 5275–5280.
10. **Балашов М. В.** Невыпуклая оптимизация // Теория управления. Дополнительные главы /Под ред. Д. А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019. С. 259–280.
11. **Воевода А. А., Корюкин А. Н., Чехонадских А. В.** О понижении порядка стабилизирующего управления на примере двойного перевёрнутого маятника // Автометрия. 2012. **48**, № 6. С. 69–83.
12. **Зубова С. П.** О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек // Автоматика и телемеханика. 2011. № 1. С. 27–41.
13. **Benner P., Lowe R., Voigt M.** L_∞-Norm computation for large-scale descriptor systems using structured iterative eigensolvers // Numerical Algebra. 2018. **8**, N 1. P. 119–133.
14. **Koryukin A. N., Chekhonadskikh A. V.** Extreme root location of real polynomials and stabilization of 3-mass control system // Algebra and Model Theory 8: Collection of papers. Novosibirsk: NSTU Publ., 2011. P. 19–39.
15. **Корюкин А. Н., Воевода А. А.** ПИД-регуляторы двухмассовой системы и двукратные комплексные пары // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. **18**, № 1. С. 56–68.
16. **Otto S., Seifried R.** Analysis of servo-constraints solution approaches for underactuated multibody systems // Mechanical Sci. 1913. **4**, N 1. P. 113–129.
17. **Blajer W., Seifried R., Kolodziejczyk K.** Servo-constraint realization for underactuated mechanical systems // Archive of Appl. Mechanics. 2015. **85**. P. 1191–1207.
18. **Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С. и др.** Управление вектором скорости летательного аппарата // Автометрия. 2021. **57**, № 4. С. 3–9. DOI: 10.15372/AUT20210401.
19. **Ерёмин Е. Л., Никифорова Л. В., Шеленок Е. А.** Комбинированное нелинейное управление системой перевёрнутых маятников при ограничении управляющих сигналов // Автометрия. 2021. **57**, № 4. С. 74–84. DOI: 10.15372/AUT20210409.

Поступила в редакцию 27.12.2022
После доработки 20.01.2023
Принята к публикации 17.02.2023