

УДК 62-40

## ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

© Э. Я. Рапопорт, Ю. Э. Плешивцева, И. С. Левин

*Самарский государственный технический университет,  
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244  
E-mail: edgar.rapoport@mail.ru, yulia\_pl@mail.ru, levin.is@samgtu.ru*

Предложен метод синтеза оптимальных по энергопотреблению регуляторов в открытой и замкнутой областях определения пространственно-временных управляющих воздействий для линейных многомерных объектов с распределёнными параметрами параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния системы к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения параметризуемых алгоритмов оптимального программного управления, существенно использующем фундаментальные закономерности предметной области. Показано, что искомые уравнения регуляторов сводятся к линейным с ограничениями законам обратной связи по неполному наблюдению состояния объекта с нестационарными коэффициентами передачи, которые определяются предварительным расчётом программного управляющего воздействия.

*Ключевые слова:* системы с распределёнными параметрами, минимизация энергопотребления, программное управление, альтернативный метод, синтез оптимального управления.

DOI: 10.15372/AUT20230406

**Введение.** Конструктивный подход к задачам оптимального управления (ЗОУ) системами с распределёнными параметрами (СРП) [1] связан с необходимостью оценки целевого множества конечных состояний СРП в равномерной метрике [2–5].

После предварительной процедуры последовательной параметризации управляющих воздействий, осуществляемой с использованием аналитических условий оптимальности, задача программного управления в подобной постановке сводится к параметрической задаче полубесконечной оптимизации, алгоритмически точное и технически реализуемое решение которой может быть получено с помощью конструктивной технологии альтернативного метода [2–5].

Основные результаты решения проблемы синтеза оптимального управления в системах с сосредоточенными и распределёнными параметрами получены на базе метода динамического программирования или принципа максимума Понтрягина с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний [6–8].

Однако при заданной точности равномерного приближения к требуемому конечному состоянию СРП известные условия трансверсальности неприменимы на негладкой границе целевого множества [3–5], что приводит в данном случае к необходимости разработки специальных методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов, базирующихся на результатах предварительного решения задачи программного управления [3, 9]. В представленной работе указанный подход используется для решения типичной задачи минимизации энергопотребления в СРП параболического типа [3, 9–11] применительно к многомерным моделям объекта с пространственно-временными управляющими

воздействиями в открытой и замкнутой областях их изменения. Некоторые частные случаи изучались ранее [3, 9].

**Постановка задачи.** Пусть управляемая функция состояния  $Q(X, t)$  объекта с определёнными параметрами описывается в зависимости от времени  $t \geq 0$  и пространственных координат  $X \in V$ ,  $X = (x_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , в пределах односвязной области  $V \ni X$  с кусочно-гладкой границей  $S$  линейным многомерным уравнением в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{i=1}^k a_i(X) \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^k b_i(X) \frac{\partial Q}{\partial x_i} + c(x)Q + u_V(x, t), \quad (1)$$

с начальными

$$Q(X, 0) = Q_0(X); \quad X \in \bar{V} = V \cup S, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q}{\partial \Gamma} + \alpha Q = u_S(X, t); \quad X \in S, \quad (3)$$

внутренним  $u_V(X, t)$  или(и) граничным  $u_S(X, t)$  управляющими воздействиями в классе кусочно-непрерывных функций [6], стесняемыми ограничениями

$$0 \leq u_{V \min} \leq u_V(X, t) \leq u_{V \max}; \quad 0 \leq u_{S \min} \leq u_S(X, t) \leq u_{S \max} \quad (4)$$

с известными предельно допустимыми значениями  $u_{V \min}$ ,  $u_{V \max}$ ,  $u_{S \min}$ ,  $u_{S \max} = \text{const}$ . Здесь  $\Gamma$  — вектор внешней нормали к  $S$ ;  $\alpha = \text{const} \geq 0$ ; заданная функция  $Q_0(X)$  интегрируема с квадратом в области  $\bar{V}$ ; коэффициенты  $a_i(X)$ ,  $b_i(X)$ ,  $c(X)$  являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, где не все  $a_i(X)$  в (1) одновременно равны нулю.

За заведомо фиксируемое конечное время  $t_{\text{кон}}$  необходимо обеспечить заданную точность  $\varepsilon$  равномерного приближения результирующего пространственного распределения управляемой величины  $Q(X, t_{\text{кон}})$  к требуемому  $Q^{**}(X) > Q_0(X) \forall X \in \bar{V}$  согласно соотношению

$$\max_{X \in \bar{V}} |Q(X, t_{\text{кон}}) - Q^{**}(X)| \leq \varepsilon, \quad (5)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [2–4].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1)–(4) оценивается квадратичным функционалом качества, в типичных ситуациях характеризующим расход энергии на процесс управления [3, 9–11]:

$$I(u_V, u_S) = \int_0^{t_{\text{кон}}} \left[ \int_{\bar{V}} \rho_V(X) u_V^2(X, t) dX + \int_S \rho_S(X) u_S^2(X, t) dS(X) \right] dt, \quad (6)$$

где  $\rho_V(X)$ ,  $\rho_S(X)$  — заданные коэффициенты.

Будем всюду далее рассматривать область  $\bar{V}$  в форме параллелепипеда в декартовой системе координат  $X = (x, y, z)$ ,  $0 \leq x \leq x_c$ ,  $0 \leq y \leq y_c$ ,  $0 \leq z \leq z_c$ , с одним (для простоты) управлением  $u_S(X, t) = u_S(x, y, t)$  на грани  $z = z_c$ , полагая  $u_S(X, t) = 0$  на других гранях  $x = x_c$  и  $y = y_c$ . Случаи с  $u_S(X, t)$  на других гранях или их совместное использование приводят к аналогичным результатам.

Тогда эквивалентное (1)–(3) представление модели объекта управления может быть получено методом конечных интегральных преобразований в форме бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [3]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -M_n^2\bar{Q}_n + \bar{u}_{Vn}(t) + \bar{u}_{Sn}(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_{0n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

относительно коэффициентов (временных мод)  $\bar{Q}_n(t)$  разложения  $Q(X, t)$  в сходящийся в среднем ряд по ортогональной с весом  $r(X)$  системе собственных функций  $\Phi_n(X)$ , определяемых вместе с собственными числами  $M_n^2$  известными способами [12–14]:

$$Q(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t) \hat{\Phi}_n(X), \quad \hat{\Phi}_n(X) = \frac{\Phi_n(X)}{\|\Phi_n\|}, \quad (8)$$

где  $\|\Phi_n\|$  — норма  $\Phi_n(X)$ .

В уравнениях (7)  $\bar{Q}_{0n}$  — моды  $Q_0(X)$ ;  $\bar{u}_{Vn}(t)$  и  $\bar{u}_{Sn}(t)$  — временные моды разложения  $u_V(X, t)$  и  $u_S(x, y, t)$  в ряд вида (8):

$$u_V(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}(t) \hat{\Phi}_n(X); \quad u_S(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Sn}(t) \hat{\Phi}_n^*(x, y), \quad (9)$$

рассматриваемые далее в качестве бесконечного числа автономных, не зависящих друг от друга сосредоточенных управляющих воздействий. Здесь  $\hat{\Phi}_n^*(x, y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — подобная  $\hat{\Phi}_n(X)$ , ортогональная с весом  $r_1(x, y)$  система собственных функций конечного интегрального преобразования  $u_S(x, y, t)$  в области  $D = (x, y : 0 \leq x \leq x_c; 0 \leq y \leq y_c)$  [12, 13].

Всюду далее в условиях выполнения усиленных условий Коши — Липшица будем учитывать  $N_1$  слагаемых в суммах (8), (9) при  $N_1 = \infty$  или  $N_1 = N < \infty$  в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых далее алгоритмов управления, ограничиваясь в случае  $N_1 = N$  с любой требуемой точностью решением «укороченной» системы  $N$  первых уравнений (7) при достаточно большой величине  $N$  и полагая при этом  $\bar{Q}_n(t) = 0$ , ( $n > N$ ) [15, 16].

Переход к описанию СРП в (7), (8) в терминах модальных переменных при  $\rho_V(X) = r(X)$ ,  $\rho_S(X) = r_1(x, y)$  в (6) приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций  $\hat{\Phi}_n(X)$ ,  $\hat{\Phi}_n^*(x, y)$  [12, 13] к представлению критерия оптимальности (6) в следующем виде:

$$I_1(\bar{u}_V, \bar{u}_S) = \int_0^{t_{\text{кон}}} \left( \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{Vn}^2(t) + \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{Sn}^2(t) \right) dt \rightarrow \min_{\bar{u}_V, \bar{u}_S}, \quad (10)$$

$$\bar{u}_V = (\bar{u}_{Vn}), \quad \bar{u}_S = (\bar{u}_{Sn}), \quad n = \overline{1, N_1},$$

а требования (5) к конечному состоянию объекта предъявляются в форме условия

$$\max_{X \in \bar{V}} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(t_{\text{кон}}) \hat{\Phi}_n(X) - Q^{**}(X) \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

В итоге рассматриваемая задача оптимизации сводится к определению программных оптимальных управлений  $\bar{u}_V^*(t)$ ,  $\bar{u}_S^*(t)$ , по которым восстанавливаются  $u_V^*(X, t)$ ,  $u_S^*(x, y, t)$  в форме разложения в ряды (9), и алгоритмов обратной связи  $u_V^*(\bar{Q}, X, t)$ ,  $u_S^*(\bar{Q}, x, y, t)$ ,

где  $\bar{Q} = (\bar{Q}_n)$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ , обеспечивающих при  $N_1 = \infty$  перевод объекта (7)–(9) за заданное время  $t_{\text{кон}}$  в требуемое конечное состояние согласно (11) при минимально возможном значении критерия оптимальности (10) в условиях ограничений (4).

При использовании усечённой модели объекта с  $N_1 = N < \infty$  все полученные далее результаты следует считать субоптимальными. Всюду далее для простоты без потери общности основных результатов исключается вариант одновременного воздействия обоих управлений  $u_V(X, t)$  и  $u_S(x, y, t)$ , полагая  $u(X, t) = u_V(X, t)$ ,  $X \in \bar{V}$ , или  $u(X, t) = u_S(x, y, t)$ ,  $x, y \in D$ ;  $\bar{u}(t) = (\bar{u}_{Vn}(t))$  или  $\bar{u}(t) = (\bar{u}_{Sn}(t))$ ,  $n = \overline{1, N_1}$ .

**Программное оптимальное управление.** На сформулированную бесконечномерную ( $N_1 = \infty$ ) задачу оптимального управления распространяется принцип максимума Понтрягина [2, 17], согласно которому в рассматриваемой задаче оптимизации (7)–(11) каждое из искомым оптимальных управлений  $\bar{u}_n^*(t)$  определяется в форме явной функции, соответствующей оптимальному процессу сопряжённой переменной  $\psi_n^*(t)$ :

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \min}, \quad \text{если} \quad \left| \frac{1}{2} \psi_n^*(t) \right| < |\bar{u}_{n \min}|; \quad (12)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \psi_n^*(t), \quad \text{если} \quad |\bar{u}_{n \min}| \leq \left| \frac{1}{2} \psi_n^*(t) \right| \leq |\bar{u}_{n \max}|; \quad (13)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \max}, \quad \text{если} \quad \left| \frac{1}{2} \psi_n^*(t) \right| > |\bar{u}_{n \max}|, \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{u}_{n \min}$ ,  $\bar{u}_{n \max}$  — ограничения на  $\bar{u}_n(t) \in [\bar{u}_{n \min}, \bar{u}_{n \max}]$ , связанные общими для всех  $n = \overline{1, N_1}$  условиями (4), и сопряжённые переменные  $\psi_n^*(t)$  в (12)–(14) непосредственно определяются в экспоненциальной форме с точностью до априори неизвестных значений  $\psi_n^*(t_{\text{кон}})$  [9]:

$$\psi_n^*(t) = \psi_n^*(t_{\text{кон}}) \mathbf{e}^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)}, \quad n = \overline{1, N_1}, \quad (15)$$

которые должны быть найдены из условий достижения целевого множества (11).

В [18] применительно к требованиям (11) предложен конструктивный способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (« $\psi$  — параметризация») на множестве  $N^*$ -мерных векторов  $\psi^{(N^*)} = (\tilde{\psi}_n)$ ,  $n = \overline{1, N^*}$ ,  $\tilde{\psi}_n = \psi_n(t_{\text{кон}})$ ,  $N^* < N_1$ , финишных значений первых  $N^*$  сопряжённых функций при равных нулю всех остальных значений  $\psi_n(t_{\text{кон}})$ :

$$\psi^{(N^*)} = (\psi_n(t_{\text{кон}})) = (\tilde{\psi}_n), \quad n = \overline{1, N^*}, \quad N^* \geq 1; \quad \psi_n(t_{\text{кон}}) = 0, \quad n > N^*. \quad (16)$$

С возрастанием  $N^*$  обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве (16) управлений в целевое множество, сужающееся к заданному состоянию  $Q^{**}(X)$  в пространстве  $(\bar{Q}_n)$  с гарантированным выполнением условия (11) для достижимых значений  $\varepsilon$  при некотором конечном значении  $N^* \geq 1$  [18].

Параметризуемое подобным образом оптимальное управление (12)–(14) описывается согласно (15), (16) следующей явной зависимостью от вектора  $\psi_*^{(N^*)}$ :

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \min}, \quad \text{если} \quad \left| \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* \mathbf{e}^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)} \right| < |\bar{u}_{n \min}|, \quad (17)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* \mathbf{e}^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)}, \quad \text{если} \quad |\bar{u}_{n \min}| \leq \left| \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* \mathbf{e}^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)} \right| \leq |\bar{u}_{n \max}|, \quad (18)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \max}, \quad \text{если} \quad \left| \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)} \right| > |\bar{u}_{n \max}|, \quad (19)$$

при  $n = \overline{1, N_0^*}$  и  $\bar{u}_n^*(t) = 0$ ,  $n > N_0^*$ , по которой  $u^*(X, t)$  восстанавливается в форме (9):

$$u^*(X, t) = \sum_{n=1}^{N_0^*} \bar{u}_n^*(t) \hat{\Phi}_{1n}(X). \quad (20)$$

Здесь оптимальная размерность  $N_0^*$  вектора  $\psi_*^{(N_0^*)} = (\tilde{\psi}_n^*)$ ,  $n = \overline{1, N_0^*}$ , определяется в зависимости от заданной величины  $\varepsilon$  в (11) по указанным в [9, 18] правилам и  $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n(X)$ , если  $u(X, t) = u_V(X, t)$ ;  $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n^*(x, y)$ , если  $u(X, t) = u_S(x, y, t)$ .

Если на некоторых временных промежутках оптимального процесса достигаются ограничения  $u^*(X, t) = u_{\max}$  или  $u^*(X, t) = u_{\min}$  в (4) для всех  $X$ , то при этом на данных промежутках выполняются соответственно равенства  $\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \max}$  или  $\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \min}$  в (17), (19) для всех  $n = \overline{1, N_0^*}$ , где  $\bar{u}_{n \max}$  и  $\bar{u}_{n \min}$  определяются как коэффициенты разложения  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  в ряды (9) [12, 13]:

$$\bar{u}_{n \max} = u_{\max} I_n; \quad \bar{u}_{n \min} = u_{\min} I_n, \quad n = \overline{1, N_0^*}, \quad (21)$$

$$I_n = \int_{\bar{V}} \hat{\Phi}_n(X) r(X) dX, \quad \text{если} \quad u(X, t) = u_V(X, t),$$

$$I_n = \int_D \hat{\Phi}_n^*(x, y) r_1(x, y) dx dy, \quad \text{если} \quad u(X, t) = u_S(x, y, t).$$

Выбор всюду далее величин  $\bar{u}_{n \max}$ ,  $\bar{u}_{n \min}$  в (17)–(19) согласно (21) гарантирует выполнение ограничений (4). Дальнейшая проблема сводится к фактическому определению вектора  $\psi_*^{(N_0^*)}$  из условий (5), (11).

*Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и метод её решения.* Рассмотрим сначала типичный случай линейной зависимости  $\bar{u}_n^*(t)$  от вектора параметров  $\psi_*^{(N_0^*)}$  в (18), считая, что ограничения (4) не достигаются на всём протяжении оптимального процесса.

Интегрирование уравнений (7) модели объекта при заданных величинах  $\bar{Q}_{0n}$  с  $\psi_*^{(N_0^*)}$ -параметризованным согласно (16) управлением вида (18) и его подстановка в (10) приводят к представлению конечного состояния  $Q(X, t_{\text{кон}})$ , описываемого разложением в ряд (8), и критерия оптимальности (10) в форме явных зависимостей от своих аргументов соответственно  $Q(X, \psi^{(N_0^*)})$  и  $I_1(\psi^{(N_0^*)})$ .

В результате осуществляется процедура точной редукции рассматриваемой ЗОУ СРП (7)–(11), (18) к специальной задаче математического программирования — задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) для достижимых значений  $\varepsilon$  [2–4]

$$I_1(\psi^{(N_0^*)}) \rightarrow \min_{\psi^{(N_0^*)}}; \quad \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N_0^*)}) - Q^{**}(X)| \leq \varepsilon, \quad (22)$$

на экстремум функции конечного числа переменных  $\psi^{(N_0^*)} = (\tilde{\psi}_i)$ ,  $i = \overline{1, N_0^*}$ , в (16) с бесконечным числом диктуемых требованием (5) ограничений для всех  $X \in \bar{V}$ , эквивалентных в совокупности одному ограничению на функцию максимума в (22).

Как показано в [2–4], альтернансные свойства искомого вектора  $\psi_*^{(N_0^*)}$  приводят к системе соотношений

$$Q(X_j^0, \psi_*^{(N_0^*)}) - Q^{**}(X_j^0) = \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}, \quad (23)$$

в некоторых точках  $X_j^0 \in \bar{V}$ ,  $j = \overline{1, R}$ , общее число  $R$  которых оказывается равным числу всех неизвестных параметров оптимального процесса, включая  $\tilde{\psi}_n^*$ ,  $n = \overline{1, N_0^*}$ , и наряду с ними неизвестное заранее минимально достижимое на множестве векторов  $\psi_*^{(N_0^*)}$  значение  $\varepsilon_{\min}^{(N_0^*)}$  величины  $\varepsilon$ , если  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N_0^*)}$  в (22).

При наличии диктуемой закономерностями предметной области необходимой дополнительной информации о характере зависимости  $Q(X, \psi_*^{(N_0^*)})$  от пространственных координат  $X \in \bar{V}$ , позволяющей идентифицировать в (23) значения  $X_j^0$  для всех  $j = \overline{1, R}$  и знаки  $Q(X_j^0, \psi_*^{(N_0^*)}) - Q^{**}(X_j^0)$  в этих точках, соотношения (23), дополненные условиями существования экстремума функции  $Q(X, \psi_*^{(N_0^*)}) - Q^{**}(X)$  в точках  $X_{jg}^0 \in \text{int}\bar{V}$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ , где  $R_1 \leq R$  и  $X_{jg}^0 \in \{X_j^0\}$ :

$$\frac{\partial}{\partial X} [Q(X_{jg}^0, \psi_*^{(N_0^*)}) - Q^{**}(X_{jg}^0)] = 0, \quad g = \overline{1, R_1}, \quad (24)$$

переводятся в замкнутую относительно искомым неизвестных систему уравнений (23), (24) с однозначно определяемым знаком  $\varepsilon$  в каждой точке  $X_j^0$  [2–5].

Эта система решается известными численными методами относительно величин  $\tilde{\psi}_i^*$ ,  $i = \overline{1, N_0^*}$ , значений  $X_{jg}^0$ ,  $g = \overline{1, R_1}$ , а также  $\varepsilon_{\min}^{(N_0^*)}$ , если в (22), (23)  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N_0^*)}$ .

Подстановка найденных подобным образом значений  $\tilde{\psi}_i^*$ ,  $i = \overline{1, N_0^*}$ , в (18) полностью определяет оптимальное программное управление в открытой области определения управляющих воздействий.

*Учёт ограничений на модальные управления.* В условиях (15) выход  $\bar{u}_n^*(t)$  на ограничения (17), (19) возможен только на начальной и конечной стадиях оптимального процесса с параметрическим представлением  $\bar{u}_n^*(t)$  в следующей форме:

$$\bar{u}_n^*(t) = \begin{cases} \bar{u}_{n \min}, & t \in [0, t_{1n}], t_{1n} \geq 0; \\ \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t_{\text{кон}} - t)}, & t \in [t_{1n}, t_{2n}], t_{2n} \leq t_{\text{кон}}; \\ \bar{u}_{n \max}, & t \in [t_{2n}, t_{\text{кон}}]. \end{cases} \quad n = \overline{1, N_0^*}, \quad (25)$$

Здесь моменты  $t_{1n}$ ,  $t_{2n}$  схода и выхода на ограничения в (17), (19) фиксируются равенствами

$$\bar{u}_n^*(t_{1n}) = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t_{\text{кон}} - t_{1n})} = \bar{u}_{n \min}; \quad \bar{u}_n^*(t_{2n}) = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t_{\text{кон}} - t_{2n})} = \bar{u}_{n \max}, \quad (26)$$

и значения  $t_{1n} \geq 0$ ,  $t_{2n} \leq t_{\text{кон}}$ , определяющие выбор конкретного варианта алгоритма (25), зависят при заданном  $t_{\text{кон}}$  от величин  $\bar{u}_{n \max}$  и  $\bar{u}_{n \min}$ . Интегрирование уравнений (7) с

управлением (25) опять приводит к ЗПО, отличающейся от (22) только конкретной формой зависимостей  $I_1(\psi^{(N_0^*)})$  и  $Q(X, \psi^{(N_0^*)})$  от своих аргументов ввиду различия управляющих воздействий (18) и (25) в открытой и замкнутой областях своего определения. Решение такой задачи сводится к решению по схеме альтернансного метода [2–4] системы уравнений вида (23), (24) теперь уже совместно с уравнениями (26) относительно всех искомым параметров оптимального процесса, в том числе  $t_{1n}, t_{2n}$ , в предположении, что такое решение существует при определённом выборе  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  в (4).

**Синтез оптимального управления.** В условиях отсутствия ограничений (4) объект управления описывается системой уравнений (7) с управляющим воздействием (18). Интегрирование этих уравнений в обратном времени  $\tau = t_{\text{кон}} - t$  приводит, подобно [9], к параметризованной форме их решений относительно временных мод  $\bar{Q}_n^*(t)$  управляемой величины в оптимальном процессе в зависимости от  $\tilde{\psi}_n^*$  и  $\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}})$ . Последующая подстановка в получаемый результат значений  $\tilde{\psi}_n^* = \psi_n^*(t_{\text{кон}})$ , определяемых согласно (16) из соотношений (15), позволяет найти  $\psi_n^*(t)$  в виде следующей линейной зависимости от величин  $\bar{Q}_n^*(t)$  и  $\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}})$ :

$$\psi_n^*(t) = A_n(t)\bar{Q}_n^*(t) + B_n(t)\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}}), \quad n = \overline{1, N_0^*}, \quad \psi_n^*(t) = 0, \quad n = \overline{N_0^* + 1, N_1}, \quad t < t_{\text{кон}},$$

$$A_n(t) = -4M_n^2(e^{2M_n^2(t_{\text{кон}}-t)} - 1)^{-1}, \quad B_n(t) = 4M_n^2(e^{M_n^2(t_{\text{кон}}-t)} - e^{-M_n^2(t_{\text{кон}}-t)})^{-1}. \quad (27)$$

Теперь алгоритм управления (18) приводит с учётом равенств (15), (27) к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами  $A_n(t), B_n(t)$  обратной связи по временным модам  $\bar{Q}_n(t), n = \overline{1, N_0^*}$ , управляемой величины:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^*(\bar{Q}, t) = \bar{u}_n^*(\bar{Q}_n, t) &= \frac{1}{2} A_n(t)\bar{Q}_n(t) + \frac{1}{2} B_n(t)\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}}), \quad n = \overline{1, N_0^*}, \\ \bar{u}_n^*(\bar{Q}, t) &= 0, \quad n > N_0^*; \end{aligned} \quad (28)$$

$$u^*(\bar{Q}, X, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0^*} (A_n(t)\bar{Q}_n(t) + B_n(t)\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}})) \hat{\Phi}_{1n}(X). \quad (29)$$

Здесь  $\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}})$  определяются по результатам предварительного решения задачи программного управления в открытой области его изменения при найденных альтернансным методом величинах  $\tilde{\psi}_n^*, n = \overline{1, N_0^*}$ , для каждого из реализуемых значений  $\bar{Q}_n(0)$  в (7) и все  $\bar{Q}_{0n}$  вычисляются по результатам наблюдения  $\bar{Q}_n$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

Переход в (28), (29) к обратным связям по неполному измерению состояния  $Q_u(X_u, t) = (Q_u(X_{uj}, t))$  в  $r$  точках  $X_{uj}, j = \overline{1, r}$ , обеспечивается следующим из (8) решением относительно  $\bar{Q}(t)$  векторно-матричного уравнения наблюдения

$$Q_u(X_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t), \quad \Phi_u = [\hat{\Phi}_{1n}(X_{uj})], \quad j = \overline{1, r}, \quad n = \overline{1, N_1}. \quad (30)$$

Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (7) можно ограничиться учётом только  $N_0^*$  первых составляющих  $\bar{Q}(t)$ , то  $\bar{Q}(t)$  непосредственно задаётся решением системы уравнений (30) при  $r = N_0^* = N_1$ :

$$\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t)) = \Phi_u^{-1} Q_u(X_u, t), \quad \bar{Q}_n(t) = [\Phi_u^{-1} Q_u(X_u, t)]_n, \quad n = \overline{1, N_0^*}. \quad (31)$$

Подстановка (31) в (29) приводит к линейному алгоритму синтеза по измеряемому выходу объекта:

$$u^*(Q_u, X, t) = \frac{1}{2} \Phi_u^{-1} Q_u(X_u, t) \varphi(X, t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0^*} B_n(t) \bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}}) \hat{\Phi}_{1n}(X),$$

$$\varphi(X, t) = (A_n(t) \hat{\Phi}_{1n}(X)), \quad n = \overline{1, N_0^*}, \quad (32)$$

где  $\Phi_u^{-1} Q_u(X_u, t)$  — матрица-строка,  $\varphi(X, t)$  — матрица-столбец.

*Синтез в замкнутой области определения управляющих воздействий.* Применительно к ограниченному программному управлению (25) на интервалах  $[t_{1n}, t_{2n}] \in t$  сохраняются линейные алгоритмы синтеза вида (28), (29), (32), где  $\tilde{\psi}_n^*$  и  $\bar{Q}_n^*(t_{\text{кон}})$  находятся по результатам решения задачи программного управления теперь уже в замкнутой области его определения. Точное решение задачи синтеза во всей замкнутой области определения управляющих воздействий связано с серьезными затруднениями [19]. В большинстве случаев с приемлемой в приложениях точностью искомые законы обратной связи  $\tilde{u}_n^*(\bar{Q}, t)$ ,  $\tilde{u}^*(\bar{Q}, X, t)$  и  $\tilde{u}^*(Q_u, X, t)$  могут быть построены по аналогии с программным управлением (17)–(19) путём дополнения регулятора (28) характеристикой усилительного звена с насыщением [19, 20]:

$$\tilde{u}_n^*(\bar{Q}, t) = \tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t) = \begin{cases} \bar{u}_n \min, & |\tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t)| < |\bar{u}_n \min|; \\ \tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t), & |\bar{u}_n \min| \leq |\tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t)| \leq |\bar{u}_n \max|; \\ \bar{u}_n \max, & |\tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t)| > |\bar{u}_n \max|. \end{cases} \quad (33)$$

На этом основании получаем искомые алгоритмы:

$$\tilde{u}^*(\bar{Q}, X, t) = \sum_{n=1}^{N_0^*} \tilde{u}_n^*(\bar{Q}_n, t) \hat{\Phi}_{1n}(X);$$

$$\tilde{u}^*(Q_u, X, t) = \sum_{n=1}^{N_0^*} \tilde{u}_n^*([\Phi_u^{-1} Q_u(X_u, t)]_n, t) \hat{\Phi}_{1n}(X), \quad (34)$$

заведомо удовлетворяющие условиям (4) в силу ограничений (21) в регуляторе (33).

### Оптимальное управление процессом нагрева неограниченной пластины.

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза оптимального по расходу энергии регулятора для управления процессом нагрева неограниченной пластины. Пусть температурное поле  $Q(x, t)$  пластины описывается линейным неоднородным уравнением теплопроводности вида (1)–(3) в относительных единицах при  $k = 1$  в (1) с управляющим воздействием  $u_V(x, t)$  по мощности внутреннего тепловыделения [5, 21]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + u_V(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, t_{\text{кон}}],$$

заданными начальными и граничными условиями

$$Q(x, 0) = Q_0 = \text{const} \geq 0, \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \alpha Q(1, t) = 0,$$

учитывающими тепловые потери в окружающую среду с нулевой температурой на границе  $x = 1$  по закону конвективной теплопередачи с заданным значением  $\alpha$  критерия Био.

Управляющее воздействие  $u_V(x, t)$  стесняется ограничениями

$$0 = u_{V \min} \leq u_V(x, t) \leq u_{V \max} \quad (35)$$

с известными предельно допустимыми значениями  $u_{V \min}$  и  $u_{V \max}$ . В пространстве модальных переменных  $\bar{Q}_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , объект управления описывается системой уравнений вида (7) с автономными модальными управлениями  $\bar{u}_{Vn}(t)$ .

Температурное поле  $Q(x, t)$  представляется его разложением в ряд вида (8) по собственным функциям  $\Phi_n(x) = \cos(M_n x)$  [5, 21]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos(M_n x)}{(M_n^2 + \alpha^2 + \alpha) \sin^2 M_n} \bar{Q}_n(t), \quad (36)$$

где  $M_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , — бесконечно возрастающая последовательность корней трансцендентного уравнения  $M \operatorname{tg} M - \alpha = 0$ .

Распределённое управляющее воздействие  $u_V(x, t)$  восстанавливается по своим составляющим  $\bar{u}_{Vn}(t)$  в форме ряда (9).

Задача заключается в определении алгоритма обратной связи  $u^*(Q, x, t)$ , обеспечивающего перевод объекта управления за заданное время  $t_{\text{кон}}$  в требуемое конечное состояние  $Q^{**}(x) = Q^{**} = \text{const} > Q_0$  с заданной точностью  $\varepsilon$  равномерного приближения согласно (5) при минимальном в условиях (35) значении критерия оптимальности вида (10):

$$I_1(\bar{u}_V) = \int_0^{t_{\text{кон}}} \sum_{n=1}^{N_1} \bar{u}_{Vn}^2(t) dt \rightarrow \min_{\bar{u}_V}.$$

*Определение программного управления.* Ограничимся далее типичным для приложений случаем  $N_0^* = 2$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ ,  $R = 3$  в (23) при  $n = 1, 2$  в (25), (26) [2–5].

Решение задачи программного управления без ограничений (35) определяет  $\bar{u}_n^*(t)$  для  $n = 1, 2$  в форме (18) при  $\tilde{\psi}_1^* > 0$ ,  $\tilde{\psi}_2^* < 0$ , откуда следует согласно (17), что в условиях  $u_{\min} = 0$  получаем  $\bar{u}_{1 \min} = \bar{u}_{2 \min} = 0$  и  $t_{11} = t_{12} = 0$  в (25).

Для определённости рассмотрим характерный вариант с выбором такой величины  $u_{\max}$  в (35), для которой  $\bar{u}_1^*(t) < \bar{u}_{1 \max} \forall t \in [0, t_{\text{кон}}]$ , и следует принять  $t_{21} = t_{\text{кон}}$ , а  $\bar{u}_2^*(t_{22}) = \bar{u}_{2 \max}$  при  $t_{22} < t_{\text{кон}}$  в (25). В таком случае алгоритм (25) конкретизируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^*(t) &= \frac{1}{2} \tilde{\psi}_1^* e^{-M_1^2(t_{\text{кон}}-t)}, \quad t \in [0, t_{\text{кон}}]; \\ \bar{u}_2^*(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{\psi}_2^* e^{-M_2^2(t_{\text{кон}}-t)}, & t \in [0, t_{22}]; \\ \bar{u}_{2 \max}, & t \in [t_{22}, t_{\text{кон}}]. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

В соответствии с (37) в рассматриваемой ситуации на протяжении оптимального процесса достигается только одно ограничение по максимально допустимой величине  $\bar{u}_{2 \max}$

для модального управления  $u_2^*(t)$ . Интегрирование уравнений модального описания объекта управления с управляющими воздействиями (37) приводит к следующим выражениям для  $\bar{Q}_n(t_{\text{кон}})$  при вычислении  $Q(x, \psi_*^{(2)})$  в (23), (24) в форме ряда (36):

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1(t_{\text{кон}}) &= \bar{Q}_{01} e^{-M_1^2 t_{\text{кон}}} + \frac{\tilde{\psi}_1^*}{4M_1^2} (1 - e^{-2M_1^2 t_{\text{кон}}}); \\ \bar{Q}_2(t_{\text{кон}}) &= \bar{Q}_{02} e^{-M_2^2 t_{\text{кон}}} + \frac{\tilde{\psi}_2^*}{4M_2^2} (e^{-2M_2^2(t_{\text{кон}}-t_{22})} - e^{-2M_2^2 t_{\text{кон}}}) + \\ &\quad + \frac{\bar{u}_{2\text{max}}}{M_2^2} (1 - e^{-M_2^2(t_{\text{кон}}-t_{22})}); \\ \bar{Q}_n(t_{\text{кон}}) &= \bar{Q}_{0n} e^{-M_n^2 t_{\text{кон}}}, \quad n = \overline{3, N_1},\end{aligned}\tag{38}$$

$$\text{где } \bar{Q}_{0n} = \frac{2\alpha^2 Q_0}{(M_n^2 + \alpha^2 + \alpha) M_n \sin M_n}, \quad n = \overline{1, N_1}.$$

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева пластины и альтернативные свойства  $Q(x, \psi_*^{(2)})$ , требующие выполнения строгих равенств в (23) в трёх точках  $x_j^0 \in [0, 1]$ ,  $j = 1, 2, 3$ , при  $R = 3$ , определяют в таком случае при  $Q_0 = \text{const}$ , подобно [2–5], форму кривой  $Q(x, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$  результирующего распределения температуры по пространственной координате (рис. 1). Это позволяет перевести равенства (23) в систему уравнений (23), (24) с заведомо идентифицируемыми точками  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 \in (0; 1)$ ,  $x_3^0 = 1$  и знаками  $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**}$ :

$$Q(0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = -\varepsilon_{\min}^{(2)}, \quad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = \varepsilon_{\min}^{(2)},$$

$$Q(1, \psi_*^{(2)}) - Q^{**} = \varepsilon_{\min}^{(2)}, \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} = 0,$$

разрешаемую совместно с одним равенством в (26) для  $\bar{u}_2^*(t_{22})$  при заданном  $\bar{u}_{2\text{max}}$  относительно искомых неизвестных  $\psi_*^{(N_0^*)} = (\tilde{\psi}_1^*, \tilde{\psi}_2^*)$ ,  $x_2^0$ ,  $\varepsilon_{\min}^{(2)}$  и  $t_{22}$  стандартными численными методами. Последующая подстановка найденных значений  $\psi_*^{(N_0^*)} = \psi_*^{(2)}$ ,  $t_{22}$  в (20), (37) окончательно определяет оптимальное программное управление в рассматриваемой задаче оптимизации.

*Синтез оптимального регулятора.* Искомый алгоритм  $\tilde{u}^*(\bar{Q}, x, t)$  обратной связи может быть реализован в форме (34). Согласно (33) и (37) в рассматриваемой задаче при  $t_{11} = t_{12} = 0$ ,  $t_{21} = t_{\text{кон}}$ ,  $t_{22} < t_{\text{кон}}$

$$\tilde{u}_1^*(\bar{Q}_1, t) = \bar{u}_1^*(\bar{Q}_1, t); \quad \tilde{u}_2^*(\bar{Q}_2, t) = \begin{cases} \bar{u}_2^*(\bar{Q}_2, t), & |\bar{u}_2^*(\bar{Q}_2, t)| \leq |\bar{u}_{2\text{max}}|; \\ \bar{u}_{2\text{max}}, & |\bar{u}_2^*(\bar{Q}_2, t)| \geq |\bar{u}_{2\text{max}}|, \end{cases}$$

где  $\bar{u}_n^*(\bar{Q}_n, t)$ ,  $n = 1, 2$ , определяются выражениями (28) и  $\bar{Q}_n(t_{\text{кон}})$  вычисляются по формулам (38) со значениями  $\tilde{\psi}_1^*$ ,  $\tilde{\psi}_2^*$ ,  $t_{22}$ , фиксируемыми по результатам решения задачи программного управления. Уравнение регулятора  $\tilde{u}^*(Q_u, x, t)$  с обратными связями по выходу объекта в случае  $r = N_1 = N_0^* = 2$  в (30) представляется в форме (34) после подстановки (31). На рис. 1, 2 представлены некоторые расчётные результаты, полученные при  $Q^{**} = 0,25$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $Q_0 = 0$ ,  $t_{\text{кон}} = 1,0$ ,  $u_{\text{max}} = 1,82$ ,  $\bar{u}_{1\text{max}} = 1,95$ ,  $\bar{u}_{2\text{max}} = -0,16$ .

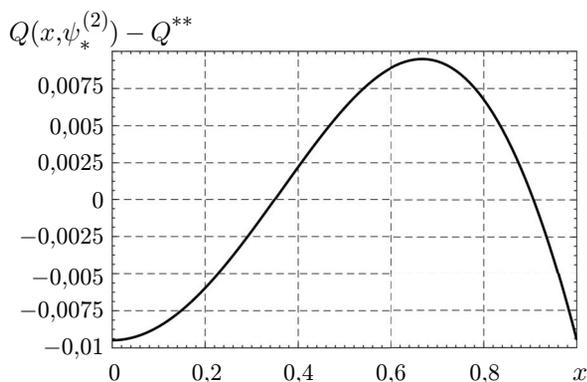


Рис. 1

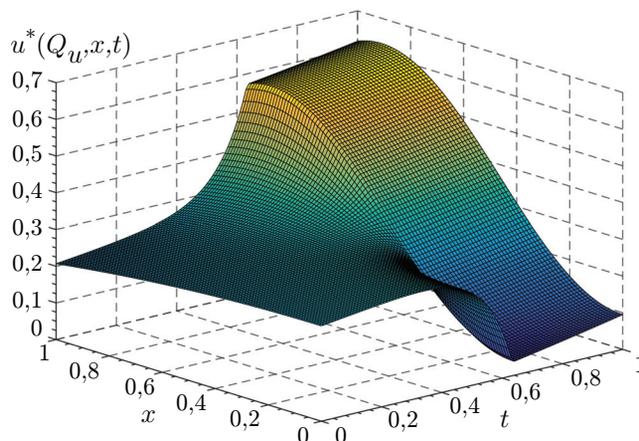


Рис. 2

Рис. 1. Температурное распределение в конце процесса оптимального управления

Рис. 2. Поведение управляющего воздействия на пространственно-временной плоскости в зависимости от изменяющихся во времени сигналов обратной связи

Рис. 1 иллюстрирует распределение температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева при  $\tilde{\psi}_1^* = 0,694$ ,  $\tilde{\psi}_2^* = -16,77$ ,  $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 0,009$ ,  $t_{22} = 0,63$ .

На рис. 2 показано поведение в процессе нагрева на пространственно-временной плоскости оптимального управляющего воздействия, изменяющегося во времени по алгоритму (34) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи с нестационарными коэффициентами передачи при выборе двух измерителей выхода объекта в точках  $x_{u1} = 0$ ,  $x_{u2} = 1$ .

**Заключение.** В данном исследовании разработан метод аналитического конструирования оптимальных по энергопотреблению регуляторов в открытой и замкнутой областях изменения пространственно-временных управляющих воздействий для линейных многомерных моделей объектов с распределёнными параметрами параболического типа применительно к оценкам в равномерной метрике целевых множеств управляемого процесса. Полученные уравнения регуляторов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи с фиксируемыми предварительным решением задачи программного управления нестационарными коэффициентами передачи. Погрешности реализации предлагаемых процедур синтеза непосредственно по неполному наблюдению за состоянием системы определяются требованиями к точности описания модели объекта укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

**Финансирование.** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-29-00180), <https://rscf.ru/project/22-29-00180>, ФГБУ ВО «Самарский государственный технический университет».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
2. Рапопорт Э. Я. Оптимальное управление системами с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2009. 677 с.
3. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 2021. 286 с.

4. Рапопорт Э. Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000. 336 с.
5. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993. 279 с.
6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1977. 480 с.
7. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 368 с.
8. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007. 440 с.
9. Рапопорт Э. Я., Плещивцева Ю. Э. Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределёнными параметрами // Автометрия. 2021. 57, № 4. С. 17–28. DOI: 10.15372/AUT20210403.
10. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
11. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. СПб.: Лань, 2017. 292 с.
12. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
13. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
14. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
15. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974. 415 с.
16. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределённых управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997. 191 с.
17. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Математический сборник (новая серия). 1964. 64(106), № 1. С. 79–101.
18. Плещивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределёнными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 22–33.
19. Летов А. М. Динамика полёта и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
20. Летов А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 255 с.
21. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределёнными параметрами. М.: Высш. шк., 2003. 299 с.

*Поступила в редакцию 29.03.2023*

*После доработки 20.04.2023*

*Принята к публикации 02.05.2023*

---