

УДК 535.42:681.786

ДИФРАКЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ФРАУНГОФЕРА В КОГЕРЕНТНОМ СВЕТЕ НА ПРОТЯЖЁННОМ АСИММЕТРИЧНОМ КРАЕ С ОТРАЖАЮЩЕЙ (СЕРОЙ) ВНУТРЕННЕЙ ГРАНЬЮ

© Ю. В. Чугуй

*Конструкторско-технологический институт научного приборостроения СО РАН,
630058, г. Новосибирск, ул. Русская, 41
E-mail: chugui@tdisie.nsc.ru*

С использованием модели эквивалентных транспарантов исследованы дифракционные явления Фраунгофера в когерентном свете на протяжённом объекте постоянной толщины в виде объёмного асимметричного края со скосом и плоской отражающей (серой) внутренней поверхностью объекта, характеризуемой модулем амплитудного коэффициента отражения света и сдвигом фазы в отражённой волне. Показано, что поле в дальней зоне может быть представлено в виде двух компонент: проходящей и отражённой, первая из которых соответствует дифракции света на абсолютно поглощающем асимметричном крае, а вторая описывает дифракционные явления на объёмной структуре в виде бипланарной щели, освещённой плоской волной света. На основе конструктивной аппроксимации интегральной функции Френеля получено в аналитическом виде выражение для спектра объекта, исходя из которого можно исследовать поведение полей в дальней зоне. Показано, что в случае большого скоса объекта основной вклад в поле даёт отражённая компонента. Предложены способы определения геометрических параметров объекта путём измерения положения центрального максимума отражённой компоненты и его эффективной ширины.

Ключевые слова: дифракция Френеля и Фраунгофера на протяжённых объектах постоянной толщины, фурье-оптика, объёмный отражающий край, оптический размерный контроль.

DOI: 10.15372/AUT20230512

Введение. Разработка оптико-электронных средств для контроля геометрии пластин постоянной толщины с плоскими внутренними гранями требует создания теории формирования их дифракционных картин Фраунгофера и изображений. Такая теория должна не только адекватно описывать наблюдаемые в экспериментах явления дифракции света на объектах, но и позволять восстанавливать с высокой точностью их геометрические характеристики. Существующая скалярная теория Френеля — Кирхгофа справедлива лишь для одномерных и двумерных (плоских) объектов [1, 2], а строгие [1, 3–5] и приближённые [6, 7] теории для расчёта дифракционных явлений на таких объектах чрезвычайно сложны для практических применений. Конструктивная теория дифракционных явлений на объёмных телах основана на модели эквивалентных диафрагм [8–10]. В отличие от известных она сравнительно проста (в математическом отношении), физически наглядна и в то же время достаточно точна. Крайне важно, что теория позволяет при расчётах полей применять приближение Френеля — Кирхгофа [1, 2] и хорошо согласуется с экспериментальными данными [9–13].

В [8, 14] исследованы дифракционные явления на пластинах асимметричного типа с абсолютно поглощающими внутренними гранями. Случаи формирования дифракционных картин и изображений металлических пластин с абсолютно отражающими внутренними гранями симметричного и несимметричного типов изучены в [15, 16]. Особенности дифракционных явлений на объёмном отражающем (сером) крае рассмотрены в [17].

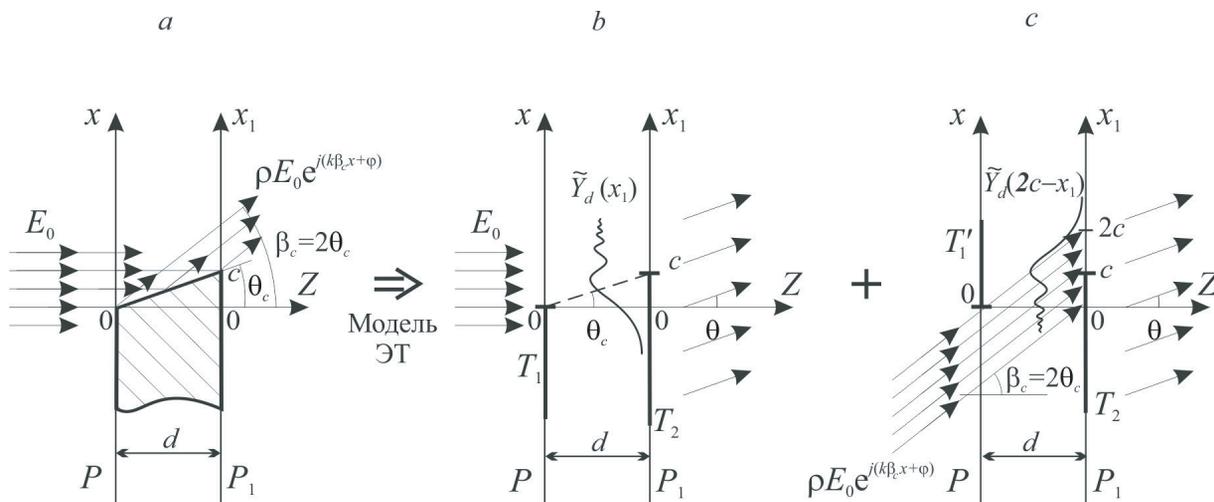


Рис. 1. Объёмный асимметричный серый край с положительным скосом ($c > 0$) и отражающей внутренней поверхностью, модуль коэффициента отражения света которой $0 < \rho < 1$: сечение объекта (а), его общая модель в виде эквивалентных транспарантов (ЭТ), содержащая две компоненты: поглощающую (б) и отражающую (с)

В представленной работе на основе модели эквивалентных транспарантов детально исследованы дифракционные явления в когерентном свете на протяжённом объекте в виде асимметричного края с отражающей (серой) внутренней гранью. Рассмотрено влияние отражающих свойств внутренней поверхности на поле в дальней зоне. На основе конструктивной аппроксимации поля получено в аналитическом виде выражение для спектра объекта, исходя из которого было изучено его поведение при различных геометрических и оптических параметрах объёмного отражающего края.

Оптико-физическая модель дифракции света на объекте в виде эквивалентных транспарантов. На рис. 1, а приведено сечение протяжённого постоянной толщины d асимметричного края с отражающей внутренней плоской гранью, которая расположена к внешним граням под углом θ_c . При $\theta_c \ll \pi/2$ этот параметр равен $\theta_c = c/d$, где c — превышение задней грани над передней (скос), причём величина c может быть как положительной, так и отрицательной. Далее угол θ_c будем называть углом скоса.

В случае абсолютно поглощающих тел модель эквивалентных диафрагм предусматривает замену протяжённого объекта двумя транспарантами нулевой толщины, прозрачность которых соответствует прозрачностям передней и задней граней. Определяющий вклад в дифракционную картину Фраунгофера дают указанные внешние грани, а вклад внутренней грани пренебрежимо мал, что подтверждается результатами экспериментов [9–13]. В общем случае, когда имеет место отражение света от поверхности внутренней грани, она работает как обычное зеркало, отражающее падающие на неё волны с амплитудным коэффициентом отражения света $\dot{\rho}$.

Этот коэффициент в общем случае является комплексной величиной: $\dot{\rho} = \rho e^{j\varphi}$, где $\rho = |\dot{\rho}|$, ($0 \leq \rho \leq 1$), а φ описывает возможное изменение фазы волны при отражении от внутренней поверхности объекта. Величина φ зависит от материала, например, для металлов $\varphi = \pi$ [1].

Обратимся снова к рис. 1, а. Видно, что при освещении такого объекта плоской нормально падающей волной с амплитудой E_0 и пространственным периодом λ часть её $\rho e^{j\varphi} E_0$ отражается от внутренней поверхности, а часть проходит без отражения.

Проходящая компонента (рис. 1, *b*) формирует в дальней зоне дифракционную картину Фраунгофера в модели абсолютно поглощающего объёмного края в виде последовательно расположенных транспарантов T_1 и T_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии d (рис. 1, *c*) и характеризующихся граничными функциями [8]:

$$f_{\text{п}}(x) = Y(x), \quad (1)$$

$$g_{\text{п}}(x_1) = Y(x_1 - c), \quad (2)$$

где $f_{\text{п}}(x)$ и $g_{\text{п}}(x_1)$ — амплитудные коэффициенты пропускания транспарантов T_1 и T_2 , моделирующих прозрачность соответственно передней и задней граней абсолютно поглощающего объекта; $Y(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($Y(x) = 1$ для $x > 0$ и $Y(x) = 0$ для $x < 0$) [17]. Как видно из рис. 1, *c*, освещающая объект волна дифрагирует на первом транспаранте, в результате чего в плоскости P_1 (отстоящей на расстоянии d от плоскости P) формируется дифракционная картина Френеля, которая затем модулируется структурой второго транспаранта.

Рассмотрим теперь отражённую компоненту поля. Она имеет вид плоской наклонной волны, наклон которой согласно законам геометрической оптики равен $\beta_c = 2\theta_c = 2c/d$ (см. рис. 1, *c*). С учётом возможного изменения фазы на φ при отражении от поверхности объекта её можно описать как $\rho E_0 e^{j(k\beta_c x + \varphi)}$ (k — волновое число). Эта волна освещает протяжённую структуру, формируемую в отражённом пучке света. Из несложных построений нетрудно понять, что в качестве граничной функции, соответствующей передней грани, выступает функция $Y(-x)$, описывающая прозрачность инвертированной полуплоскости, которая освещается плоской наклонной волной $\rho E_0 e^{j(k\beta_c x + \varphi)}$ (см. рис. 1, *c*). Граничные функции отражающей компоненты объекта можно представить следующими формулами:

$$f_{\text{отр}}(x) = e^{j(k\beta_c x + \varphi)} Y(-x), \quad (3)$$

$$g_{\text{отр}}(x_1) = Y(x_1 - c). \quad (4)$$

Прозрачность задней грани для случаев абсолютно поглощающей и отражающей компонент остаётся неизменной и равной $Y(x_1 - c)$. Функцию $f_{\text{отр}}(x)$ можно рассматривать как прозрачность транспаранта с комплексным амплитудным коэффициентом $\rho Y(-x) e^{j(k\beta_c x + \varphi)}$, освещённого плоской нормально падающей волной. Поэтому вполне логично описанную модель дифракции на отражающих объектах называть моделью с применением эквивалентных транспарантов.

Используя выражения (1)–(4), для граничных функций $\dot{f}_c(x)$ и $g_c(x_1)$ серого объекта можно получить следующие выражения:

$$\dot{f}_c(x) = Y(x) + \rho e^{j(k\beta_c x + \varphi)} Y(-x), \quad (5)$$

$$g_c(x_1) = Y(x_1 - c). \quad (6)$$

На рис. 2 показаны сечения протяжённого края с отрицательным скосом ($-c$) (рис. 2, *a*) и его модель для проходящей (транспаранты T_1 и T_2 на рис. 2, *b*) и отражённой (транспаранты T'_1 и T'_2 на рис. 2, *c*) компонент поля. Граничные функции, как и в предыдущем случае, описываются выражениями (5) и (6), в которых скос c имеет отрицательное значение. Существенно, что в отражённой компоненте (см. рис. 2, *c*) наклон

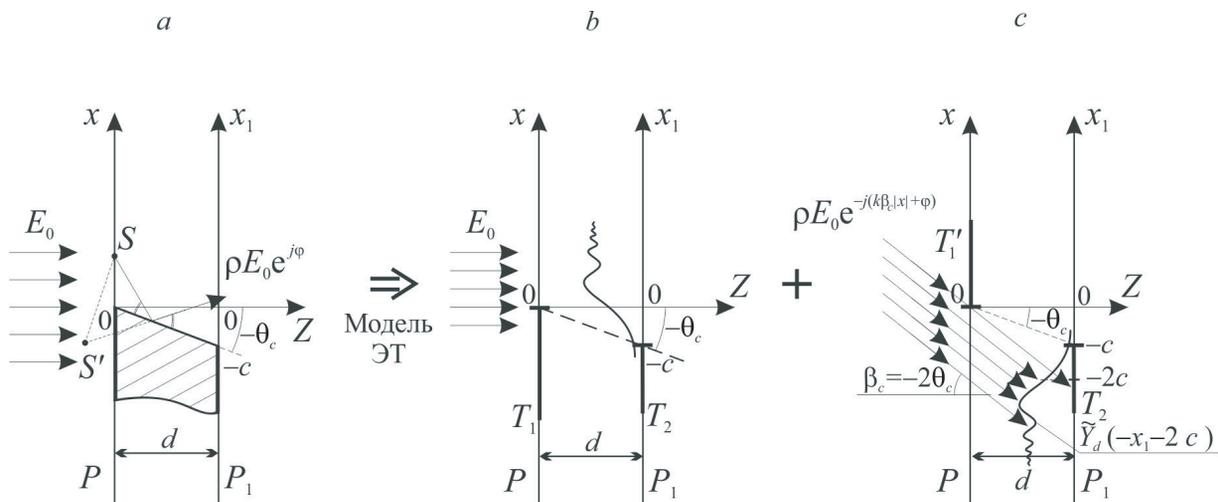


Рис. 2. Асимметричный серый объёмный край с отрицательным скосом ($c < 0$): его сечение (а), модель ЭТ в виде двух компонент: проходящей (абсолютно поглощающей) (b) и отражённой (серой) (c)

плоской освещающей волны меняется на противоположный $\rho E_0 e^{-j(2k|c|x_1/d+\varphi)}$, что приводит к смещению дифракционной картины Френеля для инверсной полуплоскости ($Y(-x)$) на величину $-2c$. В результате выходная полуплоскость P_1 с прозрачностью $Y(x_1 + |c|)$ освещается «хвостами» указанной дифракционной картины. Можно ожидать, что вклад отражённой компоненты в дифракционное поле в дальней зоне будет заметно меньше, чем для протяжённого края с положительным скосом.

Отметим, что центр френелевской картины инверсной полуплоскости, освещаемой наклонной плоской волной с углом $\pm\beta_c$, смещается на величину $\Delta_c = 2\beta_c d = 2c$ относительно оптической оси Z , при этом расстояние от центра картины до границы задней грани, находящейся на расстоянии c от оптической оси, остаётся неизменным и равным c .

Из дифракционной картины Френеля можно получить информацию о пространственной структуре источника дифрагированного поля. Дифракцию света на сером объекте можно рассматривать как результат дифракции света на двух протяжённых структурах: поглощающей и отражающей.

Представленная выше модель дифракции света на асимметричном протяжённом крае с различными отражающими свойствами в виде эквивалентных транспарантов относится к классу конструктивных, поскольку даёт возможность использования стандартных методов расчёта полей на основе теории Гюйгенса — Френеля, справедливой для объектов нулевой толщины.

Нахождение дифракционной картины Фраунгофера для протяжённого асимметричного отражающего края. Будем называть эту картину амплитудным спектром Фурье $F(\theta)$, где θ — угол дифракции, причём $\theta \ll \pi/2$. Поместим далее объект, освещённый плоской нормально падающей волной света, на вход анализатора спектров Фурье (рис. 3). Как известно [2], в задней фокальной плоскости P_2 фурье-объектива формируется дифракционная картина объекта Фраунгофера, соответствующая его пространственно-частотному спектру.

Подобный анализ формирования дифрагированного поля и его структуры приведён в [17].

Фурье-спектры $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ соответствуют поглощающей и отражающей компонен-

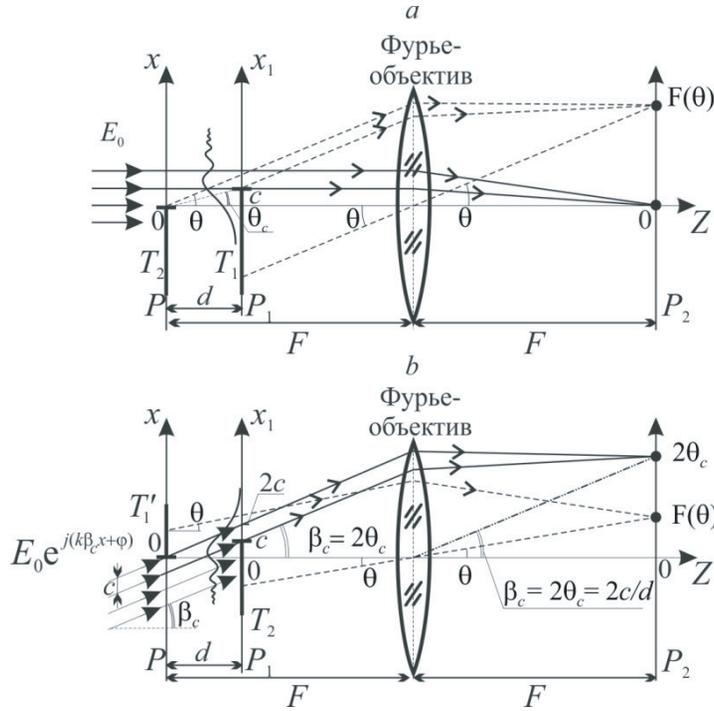


Рис. 3. Формирование анализатором спектров Фурье в задней фокальной плоскости фурье-объектива (P_2) дифракционной картины Фраунгофера объёмного отражающего (серого) асимметричного края: для проходящей (поглощающей) (а) и отражённой (б) компонент модели объёмного серого края

там объекта. Первая из них, как показано в [8], описывается выражением

$$F_1(\theta) = \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1}[\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{jk\theta^2 d/2} e^{-jk\theta c}]. \quad (7)$$

Вторая компонента представляется выражением

$$\begin{aligned} F_2(\theta) &= \frac{\rho e^{j\varphi}}{jk(\theta - \beta_c)} \left[-\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) e^{jk(x-c)^2/2d} e^{jk\theta^2 d/2} e^{-jk\theta c} dx \right] = \\ &= \frac{\rho e^{j\varphi}}{jk(\theta - \beta_c)} \left[-\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражения для $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ в формулу (7), для пространственно-частотного спектра несимметричного отражающего (серого) края получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \pi\delta(k\theta) + (jk\theta)^{-1}[\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2}] + \\ &+ \frac{\rho e^{j\varphi}}{jk(\theta - \beta_c)} \left[-\tilde{Y}_{\theta_{\text{кр}}}(\theta - \theta_c) + \tilde{Y}_d(c) e^{-jk\theta c} e^{jk\theta^2 d/2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Проанализируем эту формулу. Рассмотрим сначала проходящую компоненту спектра $F_1(\theta)$ с максимумом в центре спектра ($\theta = 0$), описывающую дифракцию света на абсолютно поглощающем протяжённом объекте. Первый член её ($\pi\delta(k\theta)$) представляет собой

вклад в картину прошедшего недифрагированного пучка света, второй (в первой квадратной скобке) — дифракцию света на передней грани объекта с учётом виньетирования дифрагированных волн задней гранью. Что касается третьего члена, то он соответствует вторичной дифракции света на задней грани, причём амплитуда её $\tilde{Y}_d(c)$ определяется значением амплитуды дифрагированного поля $\tilde{Y}_d(x_1)$ в точке $x_1 = c$. Фазовая составляющая третьего члена учитывает положение края в поперечном (член $e^{-jk\theta c}$) и продольном (член $e^{jk\theta^2 d/2}$) направлениях. В зависимости от величины и знака параметра c основной вклад в дифрагированное поле объёмного края может давать либо передняя грань при $c \ll -\delta_d$, либо задняя при $c \gg \delta_d$. Это наглядно видно, если обратиться к рис. 1, *b* и рис. 2, *b*. Соответствующие выражения для этих предельных случаев совпадают с известными формулами для плоского края (полуплоскости) [1, 2].

Перейдём теперь к анализу отражённой компоненты $F_2(\theta)$ (член во второй квадратной скобке). На первый взгляд, она не слишком отличается от абсолютно поглощающей компоненты спектра $F_2(\theta)$. Однако при более глубоком анализе можно заметить радикальные отличия. Во-первых, компонента $F_2(\theta)$, сформированная плоской наклонной волной, локализуется в точке $\theta = 2\theta_c = \beta_c$, т. е. в отличие от компоненты $F_1(\theta)$ она смещена относительно оптической оси на угол β_c . Во-вторых, в связи с эффектом отражения света от внутренней грани объекта его передняя грань представлена не полуплоскостью с пропусканием $Y(x)$, а её инверсным аналогом в виде $Y(-x)$. В связи с этим первый член во второй квадратной скобке имеет знак минус, что в корне меняет структуру объекта в отражённом свете: в этом случае мы фактически имеем дело с дифракцией света на бипланарной щели, освещённой наклонной волной света (см. рис. 1, *c*).

В целом отражённая компонента $F_2(\theta)$ в зависимости от комплексной амплитуды $\rho e^{j\varphi}$, определяемой отражающими свойствами внутренней поверхности протяжённого объекта, может значительно влиять на структуру суммарного поля в дальней зоне $F(\theta)$, т. е. на дифракционную картину протяжённого объекта.

Анализ спектра $F(\theta)$ объёмного отражающего края объекта. Проанализируем далее поведение поля (9) в двух характерных точках: $\theta = \theta_c$ (угол наблюдения равен углу скоса) и $\theta = 2\theta_c$ (спектр наблюдается в точке максимальной интенсивности отражённой компоненты спектра $F_2(\theta)$ (см. рис. 3, *b*)). Обратимся к формулам (7) и (8). Учтём, что при $\theta = \theta_c$ функция $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) = 0,5$ [18, 19]. В результате для значений компонент спектра $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ в точке $\theta = \theta_c$ получаем

$$F_1(\theta_c) = \frac{1}{jk\theta_c} [0,5 + \tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) e^{-jk c^2/2d}], \quad F_2(\theta_c) = \frac{\rho e^{j\varphi}}{jk\theta_c} [0,5 - \tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) e^{-jk c^2/2d}]. \quad (10)$$

Откуда для значения суммарного фурье-спектра $F(\theta)$ в точке $\theta = \theta_c$ имеем

$$F(\theta_c) = F_1(\theta_c) + F_2(\theta_c) = (jk\theta_c)^{-1} [0,5(1 + \rho e^{j\varphi}) + (1 - \rho e^{j\varphi}) \tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) e^{-jk c^2/2d}]. \quad (11)$$

Из сравнения полей (10) и (11) видно, что отражённая компонента может вносить заметные амплитудно-фазовые изменения в пространственно-частотный спектр объекта.

Если объект имеет модуль коэффициента отражения света от поверхности $\rho = 1$ и при этом не происходит сдвига фазы отражённой от неё волны ($\varphi = 0$), то в этом случае

$$F(\theta_c) = (jk\theta_c)^{-1}.$$

Видно, что при выбранных параметрах ρ и φ информация о протяжённости объекта d в его пространственно-частотном спектре отсутствует.

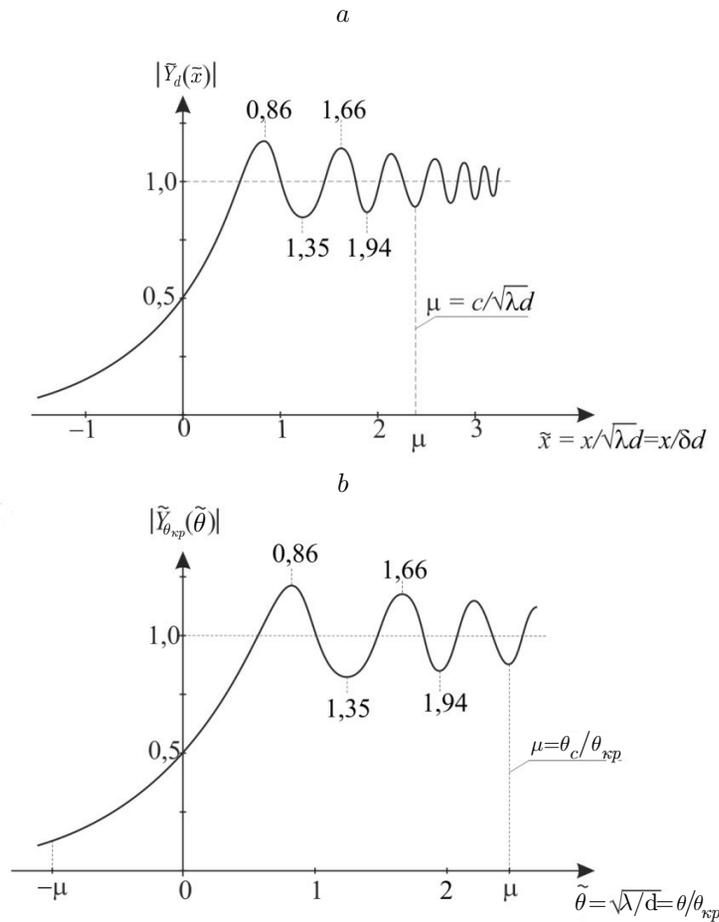


Рис. 4. Графики модулей $|\tilde{Y}_d(\tilde{x})|$ и $|\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\tilde{\theta})|$ интегральной функции Френеля в приведённых координатах: линейных $\tilde{x} = x/\sqrt{\lambda d}$ (a) и угловых $\tilde{\theta} = \theta/\theta_{кр} = \theta/\sqrt{\lambda/d}$ (b)

В случае металлического объекта, у которого, как известно, сдвиг фазы отражённой от поверхности волны $\varphi = \pi$ [1], поле $F(\theta)$ в точке $\theta = \theta_c$ при $\rho = 1$ согласно (11) будет равно:

$$F(\theta_c) = 2(jk\theta_c)^{-1}\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c)e^{-jk^2/2d}.$$

При $\theta_c \gg \theta_{кр}$ (рис. 4, b), как известно [19], функция $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) \rightarrow 1$ и в результате для модуля поля $F(\theta_c)$ получаем

$$|F(\theta_c)| \approx 2(k\theta_c)^{-1},$$

что соответствует модулю значения спектра для абсолютно отражающего симметричного края [15].

Найдём теперь значения полей $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ в точке $\theta = 2\theta_c$, соответствующей максимуму амплитуды отражённой компоненты $F_2(\theta)$. Рассмотрим случай, когда величина скоса c много больше размера зоны Френеля: $c \gg \sqrt{\lambda d}$, т. е. при $\theta_c \gg \theta_{кр}$ ($c \gg \sqrt{\lambda d}$) (см. рис. 4, b). Из выражения (7) для первой компоненты имеем

$$F_1(2\theta_c) = \frac{2}{2jk\theta_c}\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) = \frac{1}{jk\theta_c} \approx \frac{\lambda d}{2\pi jc}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $\theta_c \gg \theta_{кр}$ значение функции $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) \approx 1$.

При вычислении поля второй компоненты $F_2(\theta)$ согласно (8) при $\theta = 2\theta_c$ числитель и знаменатель этой функции обращаются в нуль. Воспользуемся правилом Лопиталья, продифференцировав числитель и знаменатель функции $F_2(\theta)$. В результате из выражения (8) нетрудно получить при $c \gg \sqrt{\lambda d}$ значение

$$F_2(2\theta_c) \approx \rho e^{j\varphi c}.$$

Отношение модулей компонент $|F_2(2\theta_c)|/|F_1(2\theta_c)|$ имеет вид

$$\eta = \frac{|F_2(2\theta_c)|}{|F_1(2\theta_c)|} \approx \frac{2\pi\rho c^2}{\lambda d} = 2\pi\rho\mu^2,$$

т. е. зависит от параметра ρ и приведённого скоса объекта $\mu = c/\sqrt{\lambda d}$. Очевидно, что для отношения интенсивностей рассматриваемых компонент имеем

$$\eta^2 = \frac{|F_2(2\theta_c)|^2}{|F_1(2\theta_c)|^2} \approx \frac{(2\pi)^2\rho^2 c^4}{\lambda^2 d^2} = (2\pi)^2\rho^2\mu^4. \quad (12)$$

Например, при выборе $\rho = 0,5$ и $\mu = c/\sqrt{\lambda d} = 3$ отношения амплитуд и интенсивностей равны соответственно: $\eta_1 = 28,3$, $\eta_2^2 \approx 800$. Видно, что в этом случае отражённая компонента в значительной степени «глушит» проходящую компоненту, соответствующую абсолютно поглощающей компоненте спектра изучаемого объекта. Однако даже в случае невысокой отражающей способности объекта амплитуда проходящей компоненты при больших значениях μ может быть соизмерима с отражённой. Для подтверждения этого найдём граничное значение амплитудного коэффициента отражения света от поверхности $\rho_{гр}$, при котором имеет место равенство амплитуд проходящей и отражённой волн. Из выражения (12) следует, что

$$\rho_{гр} = (2\pi\mu^2)^{-1}.$$

Полагая, например, что приведённый скос $\mu = c/\sqrt{\lambda d} = 5$, получаем, что, действительно, это равенство достигается при малых значениях $\rho_{гр} = 0,64$ %.

Конструктивная аппроксимация поля в дальней зоне. Для более детального анализа в аналитическом виде поведения спектра $F(\theta)$ целесообразно воспользоваться предложенной в [8] конструктивной аппроксимацией смещённой интегральной функции Френеля $\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c)$ в угловых координатах:

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) \approx \tilde{Y}_{\theta_{кр}}^{\text{ап}}(\theta - \theta_c) = Y(\theta - \theta_c) - \frac{0,5e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c)/\theta_{кр} + \text{sgn}(\theta - \theta_c)}, \quad (13)$$

где коэффициент $\alpha = 2$ при $|\theta| \leq \theta_{кр} = \sqrt{\lambda/d}$ и $\alpha = \pi$ при $\theta \gg \theta_{кр}$, а знаковая функция $\text{sgn}(\theta) = 2Y(\theta) - 1$ [2, 18]. Из выражения (13) следует, что

$$\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta_c) \approx \tilde{Y}_{\theta_{кр}}^{\text{ап}}(\theta_c) = \tilde{Y}_d^{\text{ап}}(c) = Y(\theta_c) - \frac{0,5e^{jk\theta_c^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4}\theta_c/\theta_{кр} + \text{sgn}\theta_c}. \quad (14)$$

Воспользовавшись выражениями (13) и (14), абсолютно поглощающую компоненту $F_1(\theta)$ спектра $F(\theta)$ согласно (7) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\tilde{F}_1(\theta) \approx \tilde{F}_1^{\text{ап}}(\theta) = \pi\delta(k\theta) + \frac{1}{jk\theta} \left\{ \left[\tilde{Y}_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) - \frac{0,5e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c)/\theta_{кр} + \text{sgn}(\theta - \theta_c)} \right] + \right.$$

$$+ \left[Y(\theta_c) - \frac{0,5e^{j\theta_c^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4} \theta_c / \theta_{кр} + \operatorname{sgn} \theta_c} \right] e^{-jk\theta_c} e^{jk\theta^2 d/2} \}. \quad (15)$$

Аналогично для второй компоненты $F_2^{\text{ап}}(\theta)$, описывающей спектр объекта в отражённом пучке, можно получить выражение

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_2(\theta) \approx \tilde{F}_2^{\text{ап}}(\theta) &= \frac{\rho e^{j\varphi}}{jk(2\theta_c - \theta)} \left\{ \left[Y_{\theta_{кр}}(\theta - \theta_c) - \frac{0,5e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c) / \theta_{кр} + \operatorname{sgn}(\theta - \theta_c)} \right] - \right. \\ &\left. - \left[Y(\theta_c) - \frac{0,5e^{jk\theta_c^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4} \theta_c / \theta_{кр} + \operatorname{sgn} \theta_c} \right] e^{-jk\theta_c} e^{jk\theta^2 d/2} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если теперь объединить формулы (15) и (16), то для приведённого спектра объекта $\tilde{F}^{\text{ап}}(\theta) = (jk\theta)[F_1^{\text{ап}}(\theta) + F_2^{\text{ап}}(\theta)]$ можно получить более компактное выражение

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\text{ап}}(\theta) &= \frac{2\theta_c - (1 - \rho e^{j\varphi})\theta}{2\theta_c - \theta} \left[Y(\theta - \theta_c) - \frac{0,5e^{jk(\theta - \theta_c)^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4}(\theta - \theta_c) / \theta_{кр} + \operatorname{sgn}(\theta - \theta_c)} \right] + \\ &+ \frac{2\theta_c - (1 + \rho e^{j\varphi})\theta}{2\theta_c - \theta} \left[Y(\theta_c) - \frac{0,5e^{jk\theta_c^2 d/2}}{\alpha e^{-j\pi/4} \theta_c / \theta_{кр} + \operatorname{sgn} \theta_c} \right] e^{-jk\theta_c} e^{jk\theta^2 d/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя формулу (17), аппроксимирующую две компоненты спектра объёмного асимметричного серого края, можно с высокой степенью точности вычислять профили спектра $F(\theta)$ при изменении параметров ρ , φ , c и d в широких пределах.

Рассмотрим поле в информативной части спектра в области углов $\theta > \theta_c$. Для удобства расчёта сделаем замену переменных $w = \theta/\theta_c$. В результате выражение (17) для $w > 1$ с учётом $\alpha \approx \pi$, а $Y(\theta - \theta_c) = 1$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\text{ап}}(w) &= \frac{2 - (1 - \rho e^{j\varphi})w}{2 - w} \left[1 - \frac{0,5e^{j\pi\mu^2(1-w)^2}}{\pi\mu e^{-j\pi/4}(w-1) + 1} \right] + \\ &+ \frac{2 - (1 + \rho e^{j\varphi})w}{2 - w} \left[1 - \frac{0,5e^{j\pi\mu^2}}{\pi\mu e^{-j\pi/4} + 1} \right] e^{-j2\pi\mu^2 w} e^{j\pi\mu^2 w^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае абсолютно поглощающего объекта ($\rho = 0$) для его приведённого спектра мощности $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ согласно (18) имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2 &= |\tilde{F}_2^{\text{ап}}(w)|^2 = \left| 1 - \frac{0,5e^{j\pi\mu^2(1-w)^2}}{\pi\mu e^{-j\pi/4}(w-1) + 1} \right|^2 + \\ &+ \left(1 - \frac{0,5e^{j\pi\mu^2}}{\pi\mu e^{-j\pi/4} + 1} \right) e^{-j2\pi\mu^2 w} e^{j\pi\mu^2 w^2} \Big|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 5, а приведён график поля $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ для абсолютно поглощающего края при выборе параметра $\mu = c/\sqrt{\lambda d}$, характеризующего скос объекта и равного 1.

Видно, что поле (19) описывает результат интерференции двух обобщённых точечных источников света [8] с координатами $(x = 0, \text{плоскость } P)$ и $(x_1 = c, \text{плоскость } P_1)$,

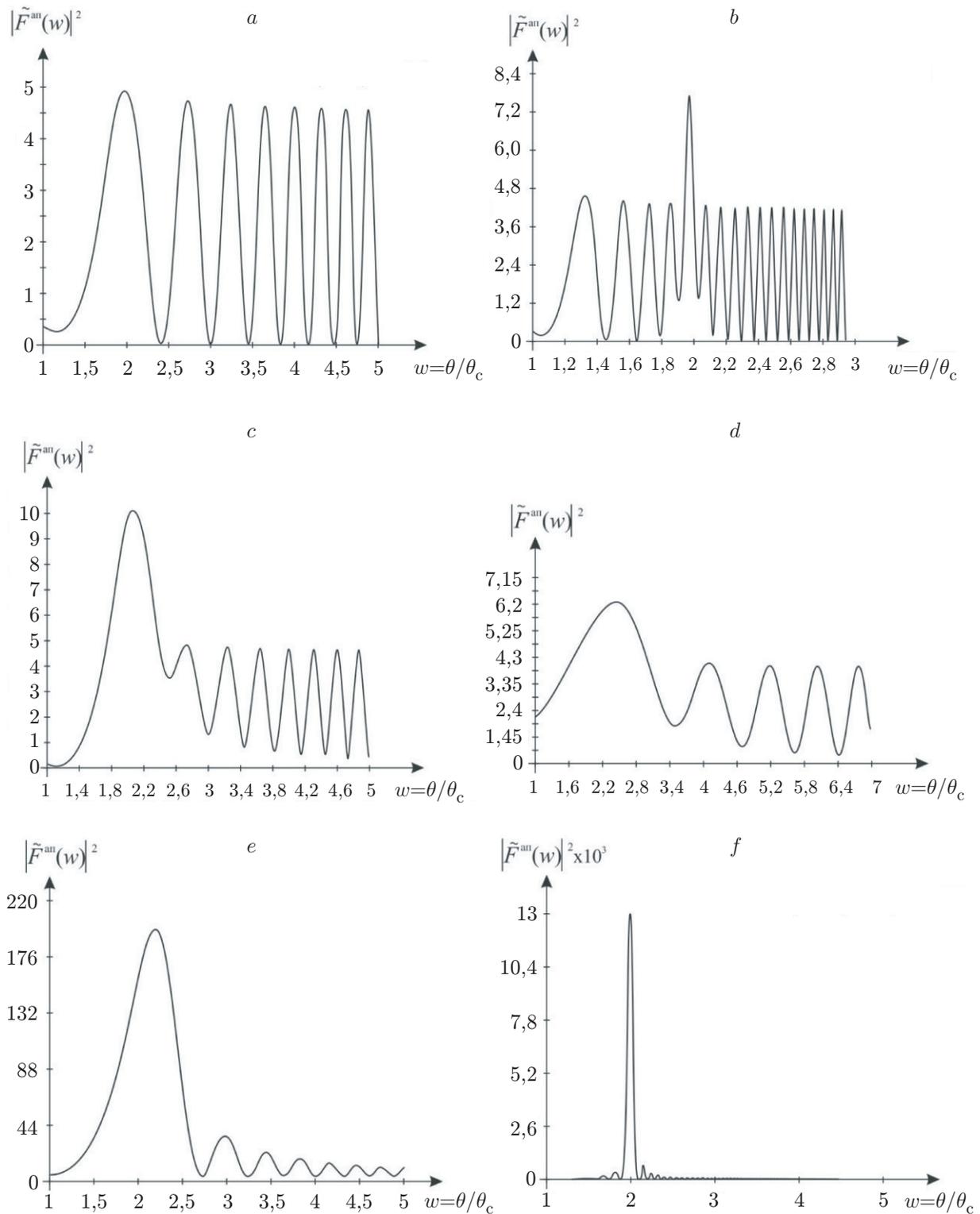


Рис. 5. Графики приведённого спектра мощности $|\tilde{F}^{an}(w)|^2$ протяжённого объекта постоянной толщины при его конструктивной аппроксимации для различных значений модуля коэффициента отражения света ρ , сдвига фазы φ волны, отражённой от поверхности, и приведённого скоса $\mu = c/\sqrt{\lambda d}$: $\rho = 0$, $\mu = 1$ (a); $\rho = 0,018$, $\varphi = 0$, $\mu = 3$ (b); $\rho = 0,16$, $\varphi = 0$, $\mu = 1$ (c); $\rho = 0,3$, $\varphi = \pi$, $\mu = 0,5$ (d); $\rho = 1$, $\varphi = \pi$, $\mu = 1$ (e) и $\rho = 1$, $\varphi = \pi$, $\mu = 3$ (f). Угол скоса объекта $\theta_c = c/d$ ($c \ll d$)

соответствующими границам объёмного края (см. рис. 1, *b*). Профиль поля имеет вид, близкий к ЛЧМ-сигналу, у которого частота f , определяемая поведением производной фазовой функции $\psi = -\pi\mu^2(2w - w^2)$ экспоненциального члена, при $w > 0$ приближённо равна $f(w) \approx \psi'/2\pi = \mu^2(1 - w)$ ($\mu \gg 1$). Откуда следует, что она, действительно, при увеличении w меняется линейно, причём минимальное значение частоты имеет место при $w \approx 1$ ($\theta \approx \theta_c$), а наклон прямой пропорционален $\mu^2 = -c^2/\lambda d$. Интересно отметить, что при $w \gg 1$ из (19) получаем

$$|\tilde{F}_2^{\text{ап}}(w)|^2 = |1 + e^{-j2\pi\mu^2 w} e^{j\pi\mu^2 w^2}|^2 = 4 \cos^2 [\pi\mu^2 w(w - 2)],$$

что соответствует интерференции двух изотропных точечных источников, размещённых в точках $x = 0$ и $x_1 = c$ (см. рис. 1, *b*).

Влияние на спектр мощности $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ амплитуды отражённой компоненты протяжённого края при различных значениях его параметров ρ , φ и μ иллюстрируется графиками, приведёнными на рис. 5, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. На рис. 5, *b* представлен случай, когда модуль коэффициента отражения света ρ при выбранном приведённом скосе $\mu = 3$ равен граничному значению $\rho = \rho_{\text{гр}} = 0,018$ при сдвиге фазы $\mu = \pi$, что, как известно, имеет место для металлических объектов. Так как в этом случае амплитуды проходящей и отражённой волн в точке $\theta = 2\theta_c$ соизмеримы, то в окрестности этого угла вследствие интерференции полей наблюдается заметное увеличение результирующей интенсивности поля (резонансный эффект).

Поведение поля $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ для объекта с $\varphi = 0$, когда параметр ρ почти на порядок больше, чем в предыдущем случае, при выборе $\mu = 1$ показано на рис. 5, *c*. Для сравнения на рис. 5, *d* представлен график поля $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ для металлического объекта ($\varphi = \pi$) со скосом $c < \sqrt{\lambda d}$ ($\mu = 0,5$). И наконец, графики полей $|\tilde{F}^{\text{ап}}(w)|^2$ для металлических объектов с максимальной отражающей способностью ($\varphi = \pi$) при приведённом скосе μ , равном 1 и 3, представлены на рис. 5, *e*, *f*. Видно, что при указанных ρ и μ в окрестности угла $\theta = 2\theta_c$ имеет место возрастание интенсивности центрального максимума отражённой компоненты поля в 6 раз при одновременном сжатии его эффективной ширины в 9 раз.

Для лучшего понимания структуры спектра $F(\theta)$ полезно остановиться на его отражённой компоненте. Она описывает поле в дальней зоне для бипланарной щели, освещённой плоской наклонной волной света (см. рис. 1, *c* и рис. 3, *b*), которая формируется двумя полуплоскостями, одна из которых с прозрачностью $f(x) = Y(-x)$ расположена в плоскости P , а другая с прозрачностью $g(x_1) = Y(x_1 - c)$ — в плоскости P_1 . Напомним, что расстояние между плоскостями составляет d . Эффективная ширина такой щели равна c (на рис. 3, *b* размер наклонного пучка c , приведённого ко входу в плоскости P). При этом, как и в случае плоской щели шириной c , освещённой плоской нормально падающей волной света, амплитуда центрального максимума спектра бипланарной щели при $\mu \gg 1$ пропорциональна ρc , а его интенсивность $\sim \rho^2 c^2$. С учётом введённой нами нормировки спектра $F(\theta)$ путём деления его на функцию $(jk\theta)^{-1}$, которая описывает поведение поля абсолютно поглощающего асимметричного края при $\theta \gg \theta_c$, отношение интенсивности максимумов будет равно $\eta = \rho^2 \mu^4 = \rho^2 c^4 / (\lambda d)^2$, что находится в согласии с вышеприведёнными расчётами.

Что касается ширины центрального максимума, то, как и в случае плоской щели, его угловая ширина $\Delta\theta$ при $\mu \gg 1$ обратно пропорциональна параметру c :

$$\Delta\theta = \lambda/c.$$

С учётом нормировки угла θ на θ_c получаем

$$\Delta\tilde{\theta} = \Delta\theta/\theta_c = \lambda d/c^2 = \mu^{-2}.$$

Анализ максимумов спектра мощности $|\tilde{F}(w)|^2$ при различных значениях параметров ρ и μ свидетельствует о согласии проведённых выше оценок с графическими данными.

Имея в распоряжении два параметра $\beta_c = 2\theta_c = 2c/d$ ($c \ll d$) и $\Delta\hat{\theta} = \Delta\theta/\theta_c = \lambda d/c^2$, описывающих положение центрального максимума и его ширину для отражённой компоненты спектра, нетрудно определить геометрические параметры объекта \hat{c} и \hat{d} по следующим формулам:

$$\hat{c} = \lambda/\Delta\theta, \quad \hat{d} = 2\lambda/(\beta_c \Delta\theta).$$

Очевидно, что погрешность определения этих параметров задаётся точностью измерения углов β_c и $\Delta\theta$.

Заключение. Исследованы дифракционные явления Фраунгофера в когерентном свете на протяжённых объектах постоянной толщины d в виде объёмного асимметричного края с отражающей (серой) внутренней гранью. У таких объектов внутренняя плоская грань не перпендикулярна его внешним граням и составляет с оптической осью угол скоса $\theta_c = c/d$ ($c \ll d$), где c — величина скоса. В основу расчёта поля положена конструктивная модель объекта в виде эквивалентных транспарантов, согласно которой поле в дальней зоне может быть представлено в виде двух компонент, моделирующих внешние грани объекта, первая из которых соответствует дифракции света на абсолютно поглощающем асимметричном крае, а вторая описывает дифракционные явления в отражённом (от внутренней поверхности) свете на структуре типа бипланарная щель, освещённой плоской волной с углом наклона $2\theta_c$.

Показано, что дифракционная картина на такой щели в случае скоса объекта $\mu = c/\sqrt{\lambda d} \gg 1$ имеет вид ярко выраженного максимума в направлении угла $\theta = 2\theta_c$ со слабыми боковыми максимумами и эффективной угловой шириной $\Delta\theta \sim 2\lambda/c$. Эта компонента, пропорциональная амплитудному комплексному коэффициенту отражения света $\hat{\rho} = \rho e^{j\varphi}$ от внутренней поверхности, может приводить к значительным изменениям структуры поля в дальней зоне.

На основе конструктивной аппроксимации интегральной функции Френеля (в классе элементарных функций) получено в аналитическом виде выражение для спектра объекта, которое позволило исследовать поведение полей в дальней зоне при различных соотношениях параметров ρ , φ и μ . Показано, что при $\mu \gg 1$ основной вклад в поле даёт отражённая компонента, при этом отношение амплитуд полей отражённой и проходящей компонент равно $\eta = 2\pi\rho\mu^2$ и может быть большим даже при невысокой отражательной способности протяжённого края. Предложены формулы определения геометрических параметров c и d путём измерения положения центрального максимума в отражённом свете и его эффективной угловой ширины.

Результаты исследований могут быть использованы при разработке оптико-электронных систем размерного контроля протяжённых объектов постоянной толщины.

Благодарность. Автор выражает благодарность сотрудникам Е. В. Власову, Е. В. Сергееву и Е. С. Арсениной за техническую помощь при подготовке статьи.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственная регистрация № АААА-А17-117121270018-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1970. 720 с.
2. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.

3. Ваганов Р. Б., Кацеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
4. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1948. 134 с.
5. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Советское радио, 1962. 244 с.
6. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 248 с.
7. Хёнл Х., Мауэ М., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на телах постоянной толщины // Автометрия. 1987. № 3. С. 79–92.
9. Chugui Yu. V., Krivenkov B. E. Fraunhofer diffraction by volumetric bodies of constant thickness // JOSA. 1989. 6, N 5. P. 617–626.
10. Чугуй Ю. В. Определение геометрических параметров протяжённых объектов постоянной толщины по их дифракционным картинам // Автометрия. 1991. № 6. С. 76–92.
11. Чугуй Ю. В. Дифракционные явления на протяжённой асимметричной щели с абсолютно поглощающими внутренними гранями // Автометрия. 2022. 58, № 1. С. 54–67. DOI: 10.15372/AUT20220107.
12. Чугуй Ю. В. Дифракционные явления на трёхмерных телах постоянной толщины и определение их геометрических параметров // 3D лазерные информационные технологии. Отв. ред. П. Е. Твердохлеб. Новосибирск: Изд-во «Офсет», 2003. С. 428–479.
13. Чугуй Ю. В. Фурье-оптика 3D-объектов применительно к размерному контролю // Опτικο-информационные измерительные и лазерные технологии и системы: Сб. тр. КТИ НП СО РАН. Новосибирск: Изд-во «Гео», 2012. С. 15–42.
14. Чугуй Ю. В. Особенности формирования и оконтуривания изображений объёмных тел в когерентном свете // Автометрия. 1991. № 4. С. 103–112.
15. Кривенков Б. Е., Чугуй Ю. В. Дифракция Фраунгофера на отражающих объёмных телах постоянной толщины // Автометрия. 1991. № 4. С. 113–118.
16. Чугуй Ю. В. Формирование в когерентном свете изображений асимметричного абсолютно отражающего края 3D-объекта // Автометрия. 2021. 57, № 3. С. 102–116. DOI: 10.15372/AUT20210312.
17. Чугуй Ю. В. Фурье-оптика протяжённых объектов постоянной толщины. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2021. 456 с.
18. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
19. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971. 495 с.

Поступила в редакцию 09.03.2023

После доработки 31.03.2023

Принята к публикации 06.04.2023
