

УДК 621.385.69

## ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРУППОВОГО ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ МОДЕЛЬНОГО ЦИФРОВОГО СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ ШУМОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

© К. С. Жохов, Т. В. Ганджа, М. И. Кочергин

*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР),  
634034, г. Томск, просп. Ленина, 40  
E-mail: derpiend@gmail.com*

Рассматриваются особенности вычисления группового времени задержки сигнала на основе цифровых измерений S-параметров СВЧ-устройств. Проведено исследование методов вычисления группового времени задержки сигнала со случайной шумовой составляющей на основе дифференцирования методом приращения и на базе аппроксимации. Предложен способ вычисления группового времени задержки, основанный на методе дифференцирования с использованием скользящей кусочно-линейной аппроксимации. Данный алгоритм более устойчив к шумовой составляющей рассматриваемого сигнала, чем стандартный способ вычисления группового времени задержки сигнала, разработанный на примере метода односторонней разности, и обладает меньшей вычислительной сложностью, чем представленный в статье метод, основанный на квадратичной аппроксимации. Приведены результаты тестирования работы описываемых методов, которые иллюстрируют их пригодность для использования при вычислении группового времени задержки.

*Ключевые слова:* групповое время задержки, дифференцирование, скользящая аппроксимация, матрица, векторный анализатор цепей.

DOI: 10.15372/AUT20240205

EDN: NXNPTQ

**Введение.** Развитие помехоустойчивых алгоритмов дифференцирования цифровых сигналов (АДЦС) сохраняет свою актуальность до настоящего времени, несмотря на широкий спектр опубликованных работ в данной области [1–5]. Этот факт обусловлен, в частности, тем, что задача цифрового дифференцирования сигналов встречается в различных областях науки и техники: в системах автоматизированного управления, цифровой обработке сигналов, геофизике и даже в медицине при анализе биомедицинских сигналов [1–5], что накладывает свои ограничения и требования к реализациям соответствующих алгоритмов. Также цифровое дифференцирование сигналов может применяться при обработке измерений сигналов в ВЧ- и СВЧ-диапазонах, а именно для вычисления группового времени задержки (ГВЗ), характеризующего время задержки прохождения сигнала на пути от входа до выхода цепи. Значение ГВЗ основано на измерениях фазы и является результатом вычисления её отрицательной производной по частоте [6–9].

Реальный измеряемый сигнал всегда содержит в себе ошибку, обусловленную наличием шумов, или случайную ошибку. Получение достаточно точных оценок производных такого сигнала является нетривиальной задачей. Сложность решения данной задачи связана с наличием противоречивых требований к ней: с одной стороны, необходимо обеспечить достаточное быстродействие вычислительного алгоритма, а с другой — высокую точность вычисляемых оценок производных и их устойчивость к шумовой составляющей дифференцируемого сигнала. Также ГВЗ достаточно трудно измерить из-за того, что средство измерения фиксирует дискретные значения фазы, а ГВЗ является отрицательной производной от фазы по частоте. Использование дискретного дифференцирования может вносить

трудности в вычисления, поскольку интервал  $\Delta f$ , называемый апертурой задержки, оказывает сильное влияние на результат измерения. Если шаг частотной сетки будет очень мал, то даже незначительная зашумлённость фазовой характеристики вызовет большую зашумлённость ГВЗ. Это, в свою очередь, обуславливает необходимость развития помехоустойчивых и быстродействующих алгоритмов вычисления производной цифрового сигнала.

**Особенности вычисления ГВЗ на основе цифровых измерений S-параметров СВЧ-устройств.** Сверхвысокочастотные устройства представляют собой электронные устройства, которые работают на частотах от 300 МГц до 300 ГГц. Они используются в различных областях, таких как радиолокация, связь, медицинская техника и др. Одной из ключевых характеристик, описывающих поведение различных типов СВЧ-устройств, являются S-параметры [8].

В теории СВЧ-параметры рассеяния, или S-параметры, определяют связь независимых параметров входного сигнала с зависимыми сигналами и представляют собой коэффициенты отражения и передачи исследуемого устройства [9]. Они описывают, как сигнал проходит через испытываемое устройство и какие потери происходят на пути передачи.

При анализе СВЧ-сигналов, измеряемых с помощью векторных анализаторов цепей (ВАЦ), одной из получаемых характеристик исследуемого устройства является ГВЗ, которое характеризует время задержки прохождения сигнала на пути от входа до выхода цепи [8]. Групповое время задержки связано с S-параметрами через фазовую скорость сигнала. Сигналы на высоких частотах могут быть сильно искажены из-за задержек, и ГВЗ позволяет определить проблемы со скоростью передачи сигнала.

Простейшим методом вычисления ГВЗ, который реализован в большинстве программных пакетов для управления работой ВАЦ, является алгоритм дифференцирования, основанный на методе односторонней разности, согласно формуле (1):

$$p_k = \frac{s(t_k + \Delta t) - s(t_k)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Этот алгоритм является предельно просто устроенным и крайне экономичным по объёму вычислений, а также не требует каких-либо априорных сведений о дифференцируемом сигнале  $S$  и его производных [1]. Также для вычисления производной методом центральных разностей можно использовать формулу (2):

$$p_k = \frac{s(t_k + \Delta t) - s(t_k - \Delta t)}{2 \Delta t}. \quad (2)$$

Значительным недостатком этих методов является их высокая чувствительность к ошибкам задания приращений  $\Delta t$  и  $\Delta s_t$ . Когда к вычисленной производной  $p_t$  добавляется слагаемое  $\Delta_\varepsilon$  — составляющая ошибки вычисления производной  $p_k$ , обуславливаемая наличием ошибок в задании значений сигнала  $S$ , составляющая ошибки определяется равенством (3):

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Из равенства составляющей ошибки вычисления производной можно заметить, что, если  $\varepsilon_t$  и  $\varepsilon_{t-1}$  имеют малые, но конечные значения, то при достаточно малых значениях  $\Delta t$  ошибка  $\Delta_\varepsilon$  может принимать сколько угодно большие значения и оказаться по модулю существенно больше, чем вычисляемая производная  $p_k$ . В свою очередь, при увеличении значения  $\Delta t$  растёт абсолютное значение ошибки задания приращения  $\Delta t$ , что также влияет на суммарную погрешность дифференцирования. Данное обстоятельство иллюстрирует важность выбора корректной величины приращения  $\Delta t$  и необходимость создания новых АДЦС, свободных от вышеперечисленных недостатков [2].

**Исследование АДЦС на модельных сигналах.** Первым шагом к уменьшению ошибки при численном дифференцировании сигнала  $S$  стало решение увеличить количество рассматриваемых узлов для вычисления производной методом расчёта отношения центральных конечных разностей [1]. Для расчёта по пяти узлам была использована формула:

$$p_k = \frac{s(t_k - 2\Delta t) - 8s(t_k - \Delta t) + 8s(t_k + \Delta t) - s(t_k + 2\Delta t)}{12\Delta t}, \quad (4)$$

для расчёта по семи узлам применялась формула:

$$p_k = \frac{s(t_{k+3}) - 9s(t_{k+2}) + 45s(t_{k+1}) - 45s(t_{k-1}) + 9s(t_{k-2}) - s(t_{k-3}))}{60\Delta t}. \quad (5)$$

В качестве дифференцируемых сигналов использовался сигнал, задаваемый равенством вида:

$$S = s_t + \varepsilon_t = \sin(t) + \varepsilon_t, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_t$  — некоторое значение ошибки измерения истинного сигнала  $s_t$ , генерирующееся при помощи специального метода, который добавляет к исходной, численно заданной функции равномерно распределённые случайные числа. Все рассматриваемые далее алгоритмы были реализованы в среде GNU Octave, где было произведено сравнение их точности и вычислительной эффективности.

Результаты дифференцирования сигнала  $S$  с внесённой ошибкой  $\varepsilon_t$  представлены на рис. 1. Цифрой 1 отмечен график результатов дифференцирования по семи узлам, цифрой 2 — по пяти узлам, цифрой 3 — по трём узлам. График аналитически вычисленной производной  $S = \cos(t)$  отмечен цифрой 4, а график исходной функции  $S = \sin(t)$  — цифрой 5. На фрагменте с приближением (рис. 1, *b*) цифрой 1 обозначен график результатов дифференцирования по семи узлам, цифрой 2 — по пяти узлам, цифрой 3 — по трём узлам.

Как следует из представленных результатов, при вычислении ГВЗ с применением метода отношения центральных конечных разностей шумовая составляющая исходного сигнала значительно усиливается, что мешает использовать результат дифференцирования для исследования сигнала.

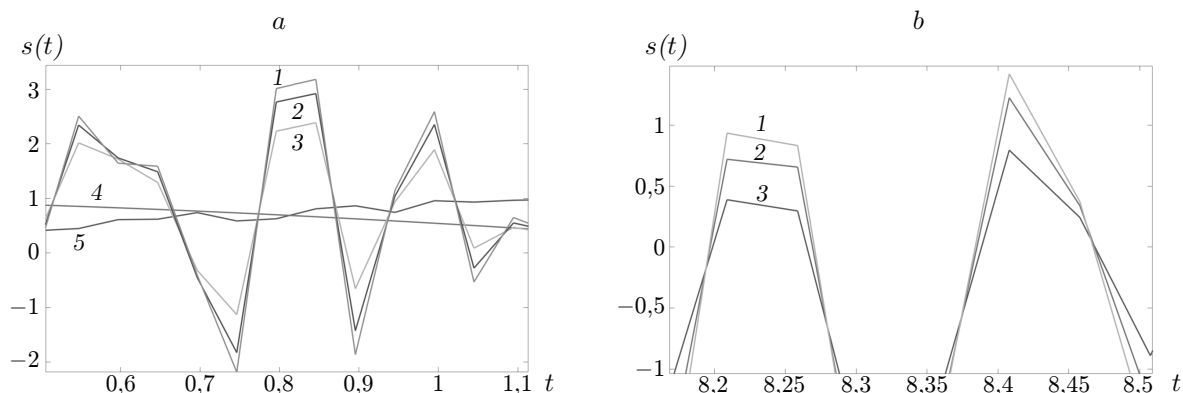


Рис. 1. Оценка помехоустойчивости методом конечных разностей при вариации количества узлов дифференцирования: *a* — общий вид графика, *b* — фрагмент с приближением

Таблица 1

## Сравнение RSSE при разном количестве узлов дифференцирования

Количество узлов дифференцирования	RSSE
3	21,477
5	19,158
7	14,552

Для оценки помехоустойчивости работы алгоритмов будет рассчитываться Root sum square error (RSSE) по формуле:

$$\text{RSSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}, \quad (7)$$

где  $p_i$  — значение, вычисленное при помощи рассматриваемого алгоритма АДЦС, а  $q_i$  — значение в той же точке, аналитически вычисленное производной смоделированного сигнала  $S' = \sin(t)' = \cos(t)$  [10].

Сравнение значений RSSE при численном дифференцировании методом центральных разностей при вариации числа узлов дифференцирования представлено в табл. 1. Вычисления проводились с шагом по оси времени, равным 0,05.

Из табл. 1 можно заключить, что RSSE уменьшается при увеличении рассматриваемых узлов дифференцирования, но всё равно остаётся высоким при расчёте оценки производной для вычисления ГВЗ.

**Дифференцирование сигналов с применением скользящей квадратичной аппроксимации (СКА).** В качестве функции, аппроксимирующей сигнал  $S = s(t)$ , используется алгебраический полином второго порядка, который определяется равенством:

$$s(t) = c_0 t^2 + c_1 t + c_2, \quad (8)$$

где  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты, значения которых подбираются с целью минимизировать погрешность аппроксимации производной (7) [4].

Задача аппроксимации заданного сигнала  $s(t)$  полиномом решается в режиме скользящего окна, при котором с учётом технических возможностей вычислительного устройства выбирается некоторое натуральное число  $m$ , называемое шириной скользящего окна, и делается это с учётом выполнения неравенства:

$$3 < m < M, \quad (9)$$

где  $M$  — верхняя граница допустимых значений  $m$ .

Используя первые  $m$  значений  $t$  и  $s(t)$  и вектор коэффициентов начальных оценок  $\mathbf{c}^\top$ , составляется и решается система линейных алгебраических уравнений вида

$$A_k \mathbf{c}_k^\top = \mathbf{s}_k^\top, \quad (10)$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} t_m^2 & t_m & 1 \\ t_{m-1}^2 & t_{m-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_k^2 & t_k & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_k^\top = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_k^\top = \begin{bmatrix} s_m \\ s_{m-1} \\ \vdots \\ s_k \end{bmatrix}. \quad (11)$$

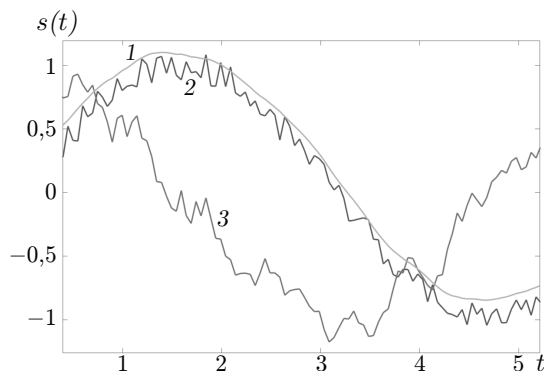


Рис. 2. Результаты применения метода скользящей аппроксимации дифференцируемого сигнала со случайной шумовой составляющей квадратичным полиномом

В качестве решения  $\mathbf{c}_k^\top$  приведённой выше системы уравнений (11) используется его псевдорешение  $\mathbf{c}_{k+}^\top$ , которое вычисляется равенством:

$$\mathbf{c}_{k+}^\top = A_k^+ \mathbf{s}_k^\top, \quad (12)$$

где  $A_k^+$  — матрица, псевдообратная к матрице  $A_k$  [7].

Полученный в результате решения вектор поправок  $\mathbf{c}_{k+}^\top$  подставляется в изначальный полином, и в центре скользящего окна вычисляется производная полученного при этом равенства в соответствии с формулой:

$$\frac{ds}{dt} = 2c_0 t_{k+m/2} + c_1. \quad (13)$$

Результат дифференцирования сигнала  $S = \sin(t)$  представлен на рис. 2, где помимо исходной функции (обозначена цифрой 2), а также функции, полученной методом дифференцирования с применением СКА (отмечена цифрой 3), приведён график восстановленного исходного сигнала с помощью интегрирования продифференцированной функции  $S$  (обозначен цифрой 1). Ширина скользящего окна  $m = 12$ .

Как можно наблюдать на рис. 2, восстановленный сигнал  $S = \sin(t)$  содержит меньше шумов, чем исходный сигнал. Оценка RSSE исходного зашумлённого сигнала и смоделированного сигнала  $S$  без шумов составила 1,03045, а восстановленного — 0,833875. Оценка RSSE продифференцированного сигнала и смоделированной аналитически рассчитанной производной сигнала  $S$  равна 1,8790. Следовательно, дифференцирование с использованием СКА позволяет с более высокой точностью определять производную численно заданной функции, включающей равномерно распределённый шум. Однако этот метод требует значительных вычислительных затрат, связанных с матричными операциями и расчётом псевдообратных матриц. Чтобы снизить вычислительную сложность алгоритма дифференцирования, было принято решение использовать алгоритм скользящей кусочно-линейной аппроксимации (СКЛА), поскольку он потенциально обладает меньшей вычислительной сложностью и, соответственно, более высоким быстродействием.

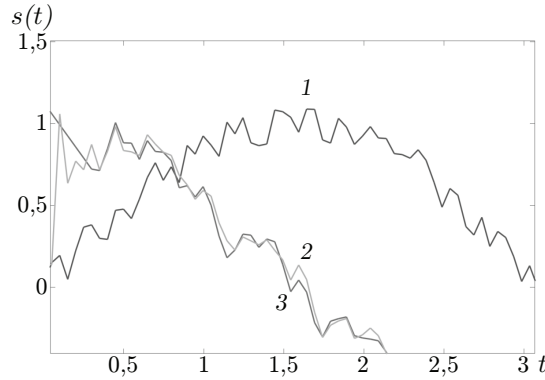


Рис. 3. Сравнение помехоустойчивости алгоритмов дифференцирования с использованием квадратичной и линейной скользящих аппроксимаций

**Дифференцирование сигналов с применением СКЛА.** Для линейной аппроксимации модельного сигнала  $S = \sin(t)$  будет использоваться полином, который определяется равенством:

$$s(t) = c_0 t + c_1. \quad (14)$$

По аналогии с методом квадратичной аппроксимации составляется система линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{c}_{k+}^\top = A_k^+ \mathbf{s}_k^\top, \quad (15)$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} t_m & 1 \\ t_{m-1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_k & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_k^\top = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s}_k^\top = \begin{bmatrix} s_m \\ s_{m-1} \\ \vdots \\ s_k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Полученный в результате решения уравнения (16) вектор поправок  $\mathbf{c}_{k+}^\top$  подставляется в изначальный полином и в центре скользящего окна вычисляется производная полученного при этом равенства в соответствии с эквивалентом:

$$\frac{ds}{dt} = c_0. \quad (17)$$

Результат сравнения дифференцирования сигнала  $S = \sin(t)$  (обозначен цифрой 1) методами СКА (обозначен цифрой 2) и СКЛА (обозначен цифрой 3) представлен на рис. 3, ширина скользящего окна  $m = 12$ . Как можно видеть из результатов сравнения на графике, методы дают схожий результат дифференцирования.

Для расчёта вектора коэффициентов поправок  $\mathbf{c}_{k+}^\top$  без применения матричных операций необходимо использовать формулы:

$$c_0 = \frac{m \sum_{i=k}^m t_i s(t_i) - \sum_{i=k}^m t_i \sum_{i=k}^m s(t_i)}{m \sum_{i=k}^m t_i^2 - \left( \sum_{i=k}^m t_i \right)^2}, \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=k}^m s(t_i) - c_0 \sum_{i=k}^m t_i \right). \quad (19)$$

При сравнении оценок производных, полученных дифференцированием с применением СКЛА матричным и алгебраическим методами, значения RSSE получились одинаковыми и равными 1,9622.

Для вычисления значений производной на концах численно заданной функции используется алгоритм постепенного изменения ширины скользящего окна до значений, позволяющих производить дифференцирование. Данный алгоритм заключается в том, что в начале численно заданной функции ширина скользящего окна принимается равной 3 и увеличивается на единицу для каждой последующей точки до тех пор, пока индекс обрабатываемого значения не станет равен  $m/2$ . Когда до конца диапазона дифференцирования остаётся  $m/2$  точек, дифференцирование начинается с последней точки в обратном направлении по аналогии с началом.

**Сравнение рассмотренных алгоритмов.** Представленные в работе методики дифференцирования разными алгоритмами были размещены на одном графике и представлены на рис. 4, *a*, где цифрой 1 отмечен график результата дифференцирования при помощи метода конечных приращений, цифрой 2 — с использованием квадратичной аппроксимации, цифрой 3 — с применением метода, основанного на кусочно-линейной аппроксимации. Скорость работы алгоритмов также была измерена и отображена на графиках рис. 4, *b*, где цифрой 1 обозначена скорость работы метода дифференцирования с квадратичной аппроксимации, цифрой 2 — кусочно-линейной аппроксимации и цифрой 3 — конечных приращений.

Сравнение точности вычисления (RSSE) и среднего времени работы алгоритмов ( $\bar{t}$ ) было проведено в табл. 2.

Как можно видеть из приведённых результатов, метод конечных приращений обладает наибольшей скоростью расчётов (в 12 раз выше, чем у СКЛА, и в 17 — чем у СКА), но оценка RSSE указывает на его низкую помехоустойчивость, что затрудняет его применение. При этом метод СКЛА уступает в точности СКА всего на 5 %, но обладает большей скоростью вычислений на 35 %. Достичь такого уменьшения вычислительной сложности позволил отказ от матричных операций в пользу алгебраических формул.

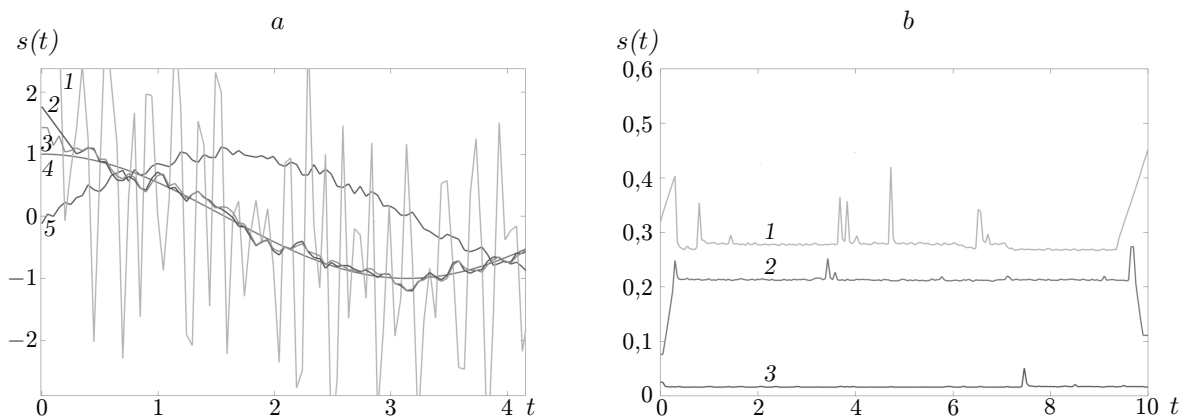


Рис. 4. Сравнение помехоустойчивости при вычислении оценок производных (а) и времени работы (b) рассматриваемых АДЦС

Таблица 2

**Сравнение помехоустойчивости и времени работы рассматриваемых методов  
вычисления производной, ширина скользящего окна  $m$  равна 12**

Метод вычисления производной	RSSE	$\bar{t}$ , с
Метод конечных приращений	14,384	0,01692
Метод скользящей квадратичной аппроксимации	2,0601	0,21
Метод скользящей линейной аппроксимации	2,1686	0,2832

**Заключение.** В ходе выполнения исследовательской работы были получены следующие результаты относительно методов и алгоритмов дифференцирования наблюдаемого сигнала:

1. Метод дифференцирования цифрового сигнала, основанный на применении скользящей кусочно-линейной аппроксимации, позволяет вычислять ГВЗ с более высокой точностью, чем метод конечных приращений.

2. Метод дифференцирования цифрового сигнала обладает меньшей вычислительной сложностью, чем метод, базирующийся на применении скользящей квадратичной аппроксимации, при сравнимой точности (в пределах 5 %) вычисления.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Майстренко А. В., Светлаков А. А. Методы и алгоритмы цифрового дифференцирования сигналов в системах реального времени. Томск: ТУСУР, 2009. 138 с.
2. Безуглов Д. А., Крутов В. А., Швачко О. В. Метод дифференцирования сигналов с использованием сплайн-аппроксимации // Фундаментальные исследования. 2017. № 4. Ч. 1. С. 24–28.
3. Жмудь В. А., Димитров Л. В. Исследование причин шумов при многократном дифференцировании сигнала цифровым способом // Автоматика и программная инженерия. 2017. 2, № 20. С. 80–89.
4. Светлаков А. А. Обобщённые обратные матрицы: Некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. Томск: Научтехлитиздат, 2003. 385 с.
5. Васин В. В. Об устойчивом вычислении производной в пространстве  $C(-\infty, \infty)$  // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1973. 13, № 6. С. 1383–1389.
6. Дансмор Д. П. Измерения параметров СВЧ-устройств с использованием передовых методик векторного анализа цепей: Настольная книга инженера / Пер. с англ. Е. Ю. Харитоновой, Е. В. Андроновой, А. С. Бондаренко. М.: Техносфера, 2019. 736 с.
7. Хибель М. Основы векторного анализа цепей / Пер. с англ. С. М. Смольского; под ред. У. Филипп. М.: Издательский дом МЭИ, 2009. 500 с.
8. Глазов Г. Н., Горевой А. В. Методы измерений на СВЧ. Управляемые генераторы СВЧ. Т. 2. Ч. 1. Томск: Красное знамя, 2015. 496 с.
9. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1989. 240 с.
10. Амелькин С. А., Захаров А. В., Хачумов В. М. Обобщённое расстояние Евклида–Махаланобиса и его свойства // ИТиВС. 2006. Вып. 4. С. 40–44.

Поступила в редакцию 16.08.2023

После доработки 25.01.2024

Принята к публикации 25.01.2024