

УДК 519.6:004.4

## ПОИСК ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

© Е. В. Антипина<sup>1</sup>, С. А. Мустафина<sup>1</sup>, А. Ф. Антипин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уфимский университет науки и технологий,  
450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32

<sup>2</sup> Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий,  
453103, г. Стерлитамак, просп. Ленина, 49  
E-mail: stepashinaev@ya.ru

Рассматривается задача оптимального быстродействия для процесса, описываемого системой нелинейных дифференциальных уравнений. Для определения приближённого решения задачи предложено применить эволюционный метод искусственных иммунных систем, преимуществом которого является отсутствие чувствительности к выбору начального приближения. Для поиска численного решения задачи оптимального быстродействия сформулирован пошаговый алгоритм, работа которого апробирована на модельных задачах. Для каждой задачи получено субоптимальное по быстродействию управление и определены параметры алгоритма, при которых решение рассчитано с наименьшими вычислительными затратами. Продемонстрирована эффективность применения разработанного алгоритма путём сравнения результатов численных расчётов с результатами применения метода неподвижных точек и метода искусственных иммунных систем.

*Ключевые слова:* задача оптимального быстродействия, искусственные иммунные системы, нелинейные управляемые системы, эволюционные методы.

DOI: 10.15372/AUT20250205

EDN: EVZLXW

**Введение.** Важнейшей задачей теории управляемых систем является задача оптимального быстродействия. В настоящее время большой арсенал методов применяется для решения линейных задач, в которых динамика процесса описывается системой линейных дифференциальных уравнений [1–4]. Однако на практике чаще всего приходится иметь дело с нелинейными динамическими системами [5, 6], что усложняет анализ и управление, а также приводит к необходимости применения специальных методов и подходов для их исследования.

Одним из подходов к решению нелинейных задач быстродействия является применение принципа максимума Понтрягина, обеспечивающего высокую точность вычислений [7, 8]. Недостатком применения данного метода при решении практических оптимизационных задач является необходимость определения начальных условий для решения сопряжённой системы, с помощью которой формулируются необходимые условия оптимальности с учётом предметной области решаемой задачи.

Поскольку в большинстве случаев управление процессами необходимо осуществлять в режиме реального времени при изменяющихся условиях, то достаточно найти приближённое решение задачи оптимального управления. Для получения субоптимального по быстродействию управления можно применить метод конечномерной аппроксимации задачи управления и свести тем самым исходную задачу бесконечномерной оптимизации к задаче математического программирования. Однако существенным недостатком применения большинства итерационных методов при решении задач математического программирования является зависимость полученного решения от выбранных начальных значений

оптимизируемых параметров. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов и алгоритмов, позволяющих получить приближённое решение нелинейной задачи оптимального быстродействия независимо от выбора начального приближения.

Одним из современных подходов, применяемых для решения оптимизационных задач, когда традиционные методы могут быть неэффективны, является использование методов эволюционных вычислений [9, 10]. К ним относится метод искусственных иммунных систем, в основу которого положена имитация функционирования иммунитета живых организмов, состоящая в защите от патогенов и антигенов. В этом процессе основную роль играют защитные клетки — антитела, вырабатываемые иммунными клетками и претерпевающие изменения в ходе борьбы с антигенами и патогенами. Наиболее приспособленные для защиты антитела подавляют чужеродные тела, и именно эти клетки запоминает иммунная система для их воспроизведения при повторной атаке организма схожим патогеном. Искусственные иммунные системы успешно применяются при решении задач распознавания образов [11], прогнозирования [12], классификации [13], оптимизации [14] и оптимального управления [15].

Важным преимуществом метода искусственных иммунных систем является независимость найденного решения оптимизационной задачи от выбора начального приближения.

Целью статьи является разработка численного алгоритма для определения приближённого решения нелинейной задачи оптимального быстродействия на основе метода искусственных иммунных систем.

**Постановка задачи.** Пусть математическое описание процесса управления представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad (2)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^\top$  — вектор фазовых переменных;  $u(t) \in D_u \subseteq \mathbb{R}$  — управление;  $D_u$  — множество допустимых значений управления;  $t \in [0, \tau]$  — время;  $f(x(t), u(t), t) = (f_1(x(t), u(t), t), f_2(x(t), u(t), t), \dots, f_n(x(t), u(t), t))$  — вектор-функция, непрерывная вместе со своими частными производными.

Пусть состояние процесса задано в конечный момент времени  $t = \tau$ :

$$x(\tau) = x^1. \quad (3)$$

Управление  $u(t)$  принадлежит классу кусочно-постоянных функций  $u(t) = u_j$ ,  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, r}$ , где  $r$  — число моментов переключений при разбиении  $t_0 < t_1 < \dots < t_{r+1}$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{r+1} = \tau$ .

Множество допустимых значений управления  $D_u$  определяется неравенством

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4)$$

Целевой функционал имеет вид

$$J(u) = \tau. \quad (5)$$

Необходимо найти допустимое управление  $u(t) \in D_u$  ( $t \in [0, \tau]$ ), переводящее процесс, описываемый системой (1), из начального состояния (2) в конечное (3) и доставляющее минимум целевому функционалу (5).

**Алгоритм искусственных иммунных систем.** Для поиска приближённого решения задачи (1)–(5) сформулируем алгоритм на основе метода искусственных иммунных систем. Функционирование искусственной иммунной системы заключается в исследовании области допустимых решений путём смены популяций иммунных клеток, которые являются потенциальными решениями оптимизационной задачи, и применения к ним операций клонирования, мутации и селекции. Функцией приспособленности, определяющей пригодность иммунной клетки в качестве решения задачи, является целевая функция. Обычно условием окончания расчётов считается достижение заданного пользователем максимального количества итераций.

Модифицируем алгоритм метода искусственных иммунных систем для поиска решения нелинейной задачи оптимального быстродействия.

Зададим в качестве популяции набор иммунных клеток  $q_i = (q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$  ( $i = \overline{1, m}$ ), каждая из которых является возможным решением задачи (1)–(5). Элементы иммунной клетки зададим равными значениям управления  $u(t)$  в дискретные моменты времени  $t_0, t_1, \dots, t_r$  и времени  $\tau$  протекания процесса, описываемого системой (1):

$$q_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, & j = \overline{0, r}, \\ \tau, & j = r + 1. \end{cases} \quad (6)$$

Продолжительность функционирования системы  $\tau$  является параметром управления, а также входит в выражение целевого функционала (5). Рассмотрим его только в качестве управления. Функцией приспособленности будет выступать не целевой функционал (5), а функция вида

$$F(q_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i^1)^2}, \quad (7)$$

где  $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$  — значения фазовых переменных, вычисленные путём решения системы дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2) для иммунной клетки  $q_k$  в момент времени  $t = q_{kr+1}$  и кусочно-постоянного управления с узлами  $(q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir})$ . Чем меньше значение  $F(q_k)$ , тем точнее выполнены терминальные условия (3), поэтому иммунная клетка  $q_k$  считается более приспособленной, а значит, больше других подходит в качестве решения задачи быстродействия.

Условием окончания поиска примем не фиксированное количество итераций смены популяции, а выполнение неравенства для некоторой иммунной клетки  $q_i$ :

$$F(q_i) < \varepsilon, \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — заданный пользователем параметр.

Условие (8) может быть выполнено при нескольких наборах управляющих параметров. Поэтому будем заносить возможные решения задачи быстродействия в отдельный массив иммунных клеток *solutions*. В конце работы алгоритма из иммунных клеток массива *solutions* в качестве решения выберем ту клетку  $q_l$ , у которой элемент  $q_{lr+1}$ , соответствующий продолжительности процесса, принимает наименьшее значение.

Модифицированный алгоритм метода искусственных иммунных систем для поиска приближённого решения задачи (1)–(5) состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры алгоритма:  $m$  — количество иммунных клеток в популяции,  $r$  — количество точек разбиения временного интервала,  $\bar{\tau}$  — максимальное значение времени процесса управления,  $p$  — количество клеток-родителей,  $cl$  — количество клонов,

$s$  — количество заменяемых иммунных клеток,  $mut$  — параметр мутации,  $\varepsilon$  — параметр окончания поиска.

Шаг 2. Создать начальную популяцию иммунных клеток  $q_i = (q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$  ( $i = \overline{1, m}$ ), элементы которых рассчитать по формуле

$$q_{ij} = \begin{cases} u_{\min} + \lambda_{ij}(u_{\max} - u_{\min}), & j = \overline{0, r}, \\ \lambda_{ij}\bar{\tau}, & j = r + 1, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\lambda_{ij} \in [0, 1]$  — случайное число.

Шаг 3. Вычислить значение функции приспособленности (7) для каждой иммунной клетки  $q_i = (q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$  ( $i = \overline{1, m}$ ) начальной популяции. Для этого найти численное решение системы дифференциальных уравнений (1) с шагом разбиения интервала времени  $[0, q_{ir+1}]$ , равным  $q_{ir+1}/r$ .

Шаг 4. Проверить условие (8) для каждой клетки начальной популяции. Если оно выполнено, то поместить иммунную клетку в массив *solutions*.

Шаг 5. Выполнить операцию клонирования. Выбрать  $p$  клеток-родителей с наилучшим (наименьшим) значением функции приспособленности (7). Для  $l$ -й клетки родителя ( $l = \overline{1, p}$ ) создать копии  $q^{lk}$  ( $k = \overline{1, cl}$ ).

Шаг 6. Выполнить операцию мутации для каждой клетки-клона  $q^{lk}$  ( $k = \overline{1, cl}$ )  $l$ -й клетки родителя ( $l = \overline{1, p}$ ):

$$q_{ij}^{lk} = \begin{cases} q_{ij}^{lk} + \alpha_l mut, & \gamma_l > 0,5, \\ q_{ij}^{lk} - \beta_l mut, & \gamma_l \leq 0,5, \end{cases}$$

где  $\alpha_l \in [0, a - q_{ij}^l]$ ,  $\beta_l \in [0, q_{ij}^l - b]$ ,  $\gamma_l \in [0, 1]$  — случайные числа, сгенерированные для  $l$ -й клетки-родителя ( $l = \overline{1, p}$ );  $a = u_{\max}$ ,  $b = u_{\min}$  для  $j = \overline{0, r}$ ;  $a = \bar{\tau}$ ,  $b = 0$  для  $j = r + 1$ .

Шаг 7. Вычислить приспособленность каждой клетки, полученной на этапе мутации.

Шаг 8. Выполнить операцию селекции. Среди клонов-мутантов  $l$ -й клетки-родителя ( $l = \overline{1, p}$ ) выбрать наиболее приспособленную клетку и заменить ею клетку-родителя при условии, что она менее приспособлена по сравнению с клоном-мутантом.

Шаг 9. Создать  $s$  новых иммунных клеток. Элементы  $i$ -й клетки вычислить по формуле (9) ( $i = \overline{1, s}$ ). Рассчитать значение функции приспособленности (7) для каждой новой клетки.

Шаг 10. Заменить в текущей популяции  $s$  наименее приспособленных иммунных клеток новыми клетками.

Шаг 11. Проверить условие (8) для иммунных клеток текущей популяции. Если условие (8) выполнено для клетки  $q_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), то поместить её в массив *solutions* и перейти к шагу 12. Иначе перейти к шагу 5.

Шаг 12. Найти в массиве *solutions* иммунную клетку  $q_l$ , у которой последний элемент принимает наименьшее значение. В качестве наименьшей продолжительности процесса принять  $\tau_{\min} = q_{lr+1}$ , а значениям управления  $u(t)$  в дискретные моменты времени присвоить значения элементов  $q_{lj}$  ( $j = \overline{0, r}$ ) согласно формуле (6).

**Вычислительный эксперимент.** Исследуем работу алгоритма на примере нелинейной задачи Цермело [16]. Рассмотрим перемещение материальной точки на плоскости с вектором скорости, по модулю равной единице:

$$\frac{dx_1}{dt} = \cos(x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = \sin(x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = u, \quad (10)$$

где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  — декартовы координаты материальной точки;  $x_3(t)$  — угол, образуемый вектором скорости с положительным направлением оси абсцисс;  $u(t)$  — управление, на которое наложено ограничение

$$-0,5 \leq u(t) \leq 0,5, \quad t \in [0, \tau]. \quad (11)$$

Если в качестве материальной точки рассматривать автомобиль, то управлением  $u(t)$  может выступать угол поворота управляемых колёс [17].

В начальный момент времени точка находится в начале координат, вектор скорости направлен вдоль оси абсцисс:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0. \quad (12)$$

Необходимо за минимальное время  $\tau_{\min}$  перевести точку из начала координат в точку с координатами

$$x_1(\tau) = 4, \quad x_2(\tau) = 3. \quad (13)$$

Для решения задачи (10)–(13) в среде визуального программирования Delphi реализован разработанный алгоритм искусственных иммунных систем. Алгоритм применён со следующими параметрами: количество иммунных клеток в популяции  $m = 50$ , количество точек разбиения интервала времени  $r = 100$ , максимальное значение времени  $\bar{\tau} = 10$ , количество клеток-родителей  $p = 20$ , количество клонов  $cl = 20$ , количество заменяемых иммунных клеток  $s = 10$ , параметр мутации  $mut = 0,3$ , параметр окончания вычислений  $\varepsilon = 0,1$ .

Функция приспособленности имеет вид

$$F(q_k) = \sqrt{(x_1^k - 4)^2 + (x_2^k - 3)^2}.$$

На рис. 1 показано вычисленное управление для задачи (10)–(13). Наименьшее время процесса составило  $\tau_{\min} = 5,19919$ , координаты конечного положения точки:  $x_1(\tau) = 4,062$ ,  $x_2(\tau) = 3,066$ ,  $x_3(\tau) = 0,812$ . Отклонение от терминальных условий равно 0,082.

С целью анализа влияния параметров разработанного алгоритма на результаты расчётов проведена серия вычислительных экспериментов. Для этого осуществлялось 20 запусков программы и оценивалось среднее значение наименьшего времени  $\tau_{\min}$ .

Значение параметра мутации  $mut$  задавалось равным от 0,1 до 0,9 (табл. 1). Выявлено, что изменение значения параметра  $mut$  в интервале от 0,1 до 0,4 не оказывает существенного влияния на результат, который совпадает с субоптимальным решением. С повышением значения параметра мутации с 0,5 до 0,9 происходит увеличение времени расчёта. Поэтому целесообразно для решения задачи Цермело задавать значения параметра мутации из отрезка [0,1; 0,4].

Также проанализировано влияние количества заменяемых иммунных клеток  $s$  на этапе обновления популяции, необходимого для внесения разнообразия в популяцию с целью преодоления попадания решения в локальный экстремум. В ходе вычислений установлено, что его значение можно задавать от 5 до 10, не оказывая существенного влияния на время

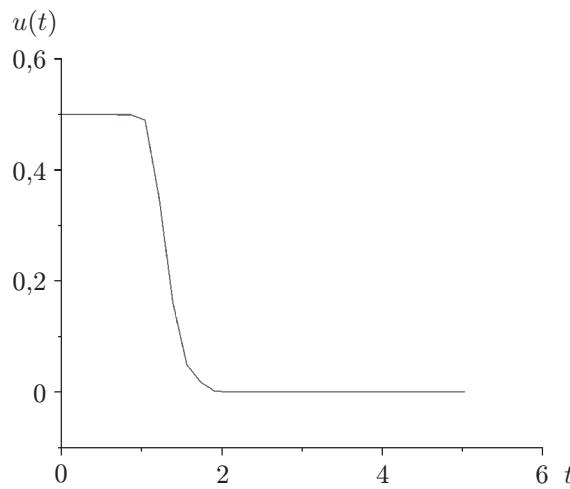


Рис. 1. График управляющей функции в задаче Цермело

Таблица 1

**Зависимость количества итераций поиска решения от значения параметра мутации**

Параметр мутации $mut$	Количество итераций
0,1	3396
0,2	3396
0,3	3396
0,4	3400
0,5	3686
0,6	3997
0,7	4110
0,8	4100
0,9	4180

Таблица 2

**Зависимость количества итераций алгоритма от количества заменяемых иммунных клеток**

Параметр $s$	Количество итераций
5	3389
10	3396
15	3435
20	3512
25	3588

поиска решения задачи (табл. 2), тогда как повышение значения параметра  $s$  приводит к увеличению количества итераций и, как следствие, времени расчёта.

В табл. 3 показано влияние параметра максимального времени процесса  $\bar{\tau}$  на результаты решения задачи (10)–(13) при фиксированных значениях остальных параметров ( $r = 100$ ,  $m = 50$ ,  $\bar{\tau} = 10$ ,  $p = 25$ ,  $cl = 10$ ,  $s = 10$ ,  $mut = 0,3$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ). Увеличение значения  $\bar{\tau}$  не оказывает существенного влияния на значение наименьшего времени  $\tau_{\min}$ , однако приводит к более длительному вычислительному процессу.

Количество иммунных клеток  $m$  варьировалось от 20 до 80 с шагом 10. Структура управления, найденная для популяции размером 20, 30 и 40 иммунных клеток, имеет скачки (рис. 2, 3). Для популяции размером от 50 до 80 кривая управления выравнивается (см. рис. 1), но одновременно увеличивается количество итераций для поиска решения. Поэтому в качестве размера популяции принято значение  $m = 50$ .

Количество родительских клеток  $p$  и клонов  $cl$  задавалось равным 5, 10, 20, 30 и 40. Изменение данных параметров при поиске решения задачи (10)–(13) не оказалось влияния на результаты расчётов. При изменении параметра  $cl$  от 5 до 20 происходит уменьшение количества итераций работы алгоритма (табл. 4). Это связано с тем, что с увеличением количества клонов растёт количество потомков, из которых отбираются лучшие иммунные клетки, и, как следствие, увеличивается вероятность нахождения лучшего решения.

Таблица 3

Зависимость результатов решения задачи Цермело от значения максимального времени  $\bar{\tau}$ 

Параметр $\bar{\tau}$	Количество итераций	Параметр $\tau_{\min}$
10	3396	5,19919
15	3611	5,19932
20	3978	5,19913
25	4225	5,19904
30	4665	5,19921

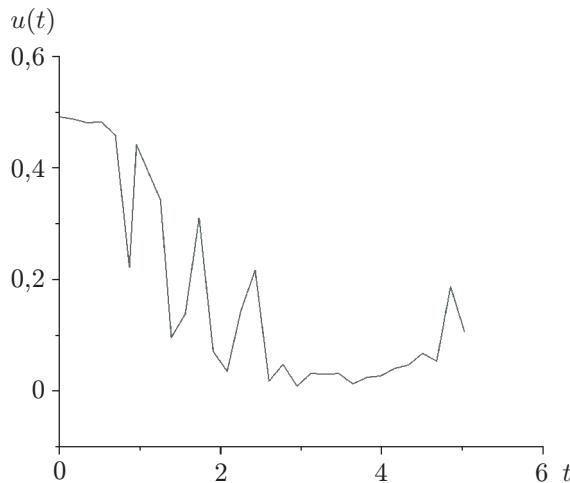


Рис. 2

Рис. 2. График управляющей функции, найденной при размере популяции  $m = 20$

Таблица 4

Зависимость количества итераций поиска решения от числа клонов

Параметр $cl$	Количество итераций
5	3430
10	3405
20	3396
30	3449
40	3517

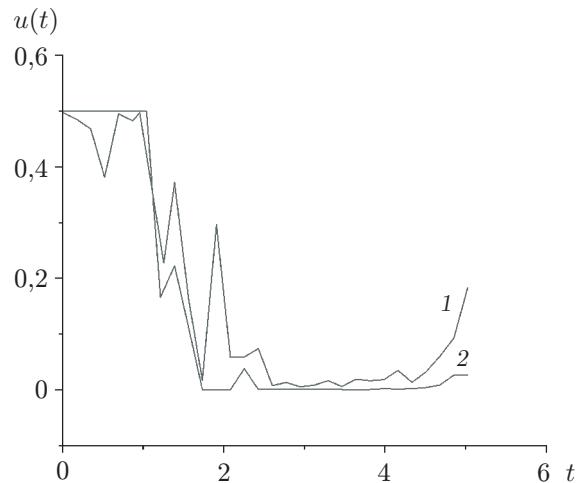


Рис. 3

Рис. 3. График управляющей функции, найденной при разных размерах популяции:

1 — при  $m = 30$ ; 2 — при  $m = 40$

При изменении числа клонов от 20 до 40 увеличивается время вычислительного процесса. Аналогичным образом определено значение параметра  $p$ , отвечающего за количество родительских клеток. Поэтому целесообразно применять параметры  $p$  и  $cl$ , равными 20.

Решение задачи (10)–(13) получено ранее в [16] с помощью метода неподвижных точек. Значение  $\tau_{\min}$  составило 5,117, что на 1,6 % ниже по сравнению со значением времени, вычисленным с помощью алгоритма искусственных иммунных систем. Однако в работе [16] отмечено, что метод неподвижных точек не сводится к решению задачи при некоторых начальных значениях управляющих параметров. Для этих значений также найдено решение с помощью алгоритма искусственных иммунных систем с теми же параметрами алгоритма, что и при случайных начальных значениях оптимизируемых параметров.

На рис. 4, 5 показано итеративное изменение управления  $u(t)$  для двух различных начальных приближений:  $u^0(t) = 0$  и  $u^0(t) = -0,5$  при  $\tau^0 = 1$ . В этом случае на шаге 2 алгоритма элементы иммунных клеток  $q_i = (q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{ir}, q_{ir+1})$  ( $i = \overline{1, m}$ ) начальной популяции задавались не случайным образом, а заполнялись фиксированными значениями:

$$q_{ij} = \begin{cases} u^0, & j = \overline{0, r}, \\ 1, & j = r + 1. \end{cases}$$

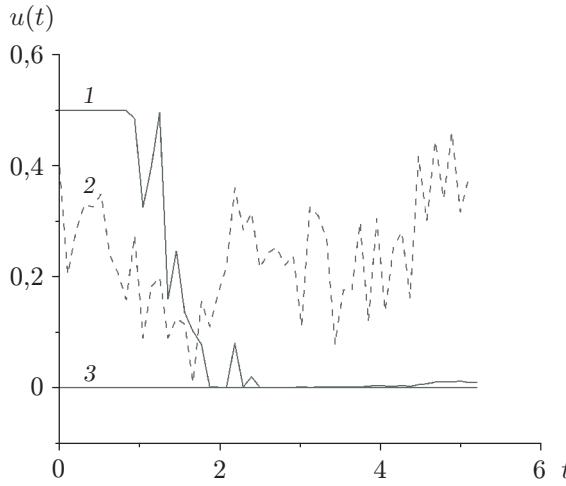


Рис. 4

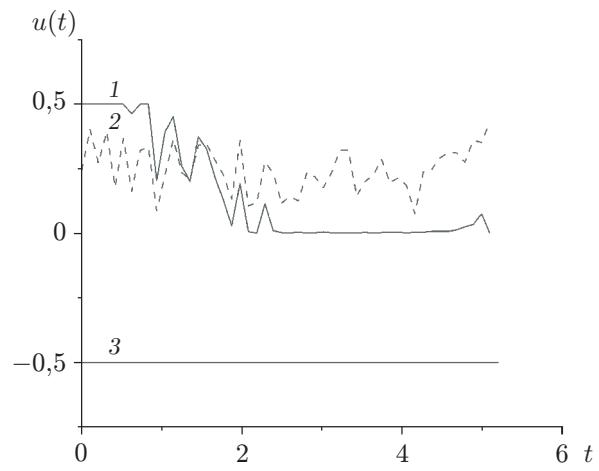


Рис. 5

Рис. 4. Изменение управляющей функции при  $u^0(t) = 0$ ,  $\tau^0 = 1$  (1 — после 3000 итераций, 2 — после 100 итераций, 3 — начальное приближение)

Рис. 5. Изменение управления  $u(t)$  при  $u^0(t) = -0,5$ ,  $\tau^0 = 1$  (1 — после 5000 итераций, 2 — после 200 итераций, 3 — начальное приближение)

Таблица 5

**Значения наименьшего времени в задаче Цермело  
при разных начальных приближениях**

Параметр $u^0(t)$	Параметр $\tau^0$	Количество итераций	Параметр $\tau_{\min}$
-0,5	1	5578	5,19919
-0,5	5	5416	5,19985
-0,5	10	5623	5,19953
0	1	3415	5,19981
0	5	3665	5,19908
0,5	1	4198	5,19925
0,5	5	3981	5,19908
0,5	10	4254	5,19914

Для первого случая управление  $u(t)$  сходится к субоптимальным значениям быстрее (после 3000 итераций) по сравнению со вторым приближением (после 5000 итераций). Поэтому можно сделать вывод, что начальные значения оптимизируемых параметров влияют на скорость сходимости к субоптимальному решению.

В табл. 5 показано значение наименьшего времени перемещения материальной точки при различных начальных приближениях  $u^0(t)$  и  $\tau^0$ . Видно, что при разных начальных значениях искомых параметров происходит несущественное изменение наименьшего времени  $\tau_{\min}$ , но количество итераций его поиска различно.

Таким образом, при различных начальных приближениях решения, вычисленные с помощью разработанного алгоритма, сходятся к оптимальным значениям управляющих параметров с разной скоростью сходимости.

Разработанный алгоритм применим для решения задачи Дуффинга [18], в которой рассматривается нелинейная система управления

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_1^3 + u, \quad (14)$$

где на управление  $u(t)$  наложены ограничения

$$-1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, \tau]. \quad (15)$$

Заданы начальное и конечное состояния системы

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad (16)$$

$$x_1(\tau) = 0, \quad x_2(\tau) = 0. \quad (17)$$

Необходимо найти управление  $u(t)$  с учётом ограничений (15), которое за минимальное время  $\tau_{\min}$  переводит систему (14) из состояния (16) в состояние (17).

Процедура подбора параметров алгоритма искусственных иммунных систем подробно описана в первом примере. Аналогичным образом подобраны параметры алгоритма для решения задачи Дуффинга: количество иммунных клеток в популяции  $m = 50$ , количество точек разбиения интервала времени  $r = 100$ , максимальное значение времени  $\bar{\tau} = 5$ , количество клеток-родителей  $p = 20$ , количество клонов  $cl = 10$ , количество заменяемых иммунных клеток  $s = 10$ , параметр мутации  $mut = 0,5$ , параметр окончания вычислений  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Функция приспособленности для задачи (14)–(17) имеет вид

$$F(q_k) = \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^2}.$$

В результате применения алгоритма вычислено наименьшее время процесса  $\tau_{\min} = 2,339$  и управление, показанное на рис. 6. Рассчитаны значения фазовых переменных в конце процесса:  $x_1(\tau_{\min}) = -2,1 \cdot 10^{-18}$ ,  $x_2(\tau_{\min}) = 1,16 \cdot 10^{-18}$ ; отклонение от терминальных ограничений (17) составляет  $2,59 \cdot 10^{-18}$ .

Полученное решение отличается от найденного ранее решения задачи (14)–(17) с помощью метода искусственных нейронных сетей [18], в котором наименьшее время процесса  $\tau_{\min} = 2,346$ , отклонение от терминального состояния оказалось равным  $9,78 \cdot 10^{-3}$ . Отсюда следует, что точность получаемого решения с помощью алгоритма искусственных иммунных систем выше, поэтому его можно применять для решения нелинейных задач оптимального быстродействия.

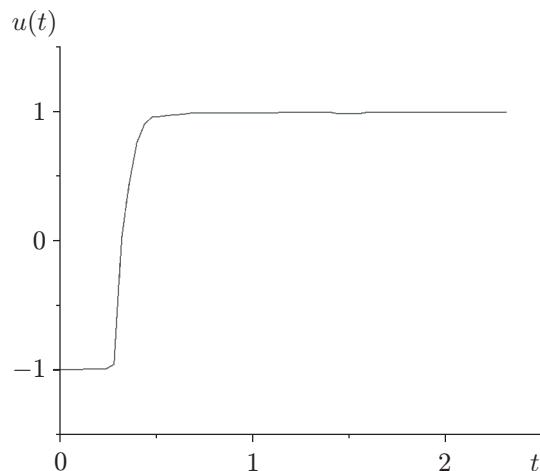


Рис. 6. График управляемой функции в задаче Дуффинга

Проведённые численные расчёты показали, что алгоритм искусственных иммунных систем позволяет находить решение задачи оптимального быстродействия для нелинейных управляемых систем с большей точностью по сравнению с другими методами, и при этом результаты вычислений не зависят от выбора начального приближения.

**Заключение.** Разработанный алгоритм искусственных иммунных систем можно применять для поиска приближённого решения задачи оптимального быстродействия для процессов, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений. Важным преимуществом предложенного подхода является отсутствие чувствительности вычисленного решения к выбору начального приближения.

Работа алгоритма продемонстрирована на примерах задач Цермело и Дуффинга. В результате проведённых расчётов для каждой из задач вычислено приближённое решение нелинейной задачи оптимального быстродействия, найдено наименьшее время и управление, переводящее точку из начального в её конечное положение. Определены параметры эффективной работы алгоритма. Проведено сравнение решения задачи Цермело с решением, вычисленным с помощью метода неподвижных точек, и продемонстрирована его сходимость к субоптимальным значениям при различных начальных приближениях. Показано, что решение задачи Дуффинга найдено с большей точностью выполнения терминальных условий при меньшем времени процесса по сравнению с методом искусственных нейронных сетей.

Алгоритм можно применять для решения нелинейных задач быстродействия, в которых имеется несколько управляемых воздействий, путём модификации структуры иммунной клетки.

**Финансирование.** Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (код научной темы FZWU-2023-0002).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Итерационный метод вычисления оптимального по быстродействию управления квазилинейными системами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2003. **6**, № 3. С. 227–247.
2. Шевченко Г. В. Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. **42**, № 8. С. 1166–1178.
3. Флоринский В. В. Решение линейной задачи быстродействия с двумерным управлением // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2015. **5**, вып. 38. С. 89–95.
4. Новиков Д. А. О простейшей задаче быстродействия с фазовым ограничением при управлении пространственной ориентацией тела // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. **29**, № 3. С. 62–72. DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-3-62-72.
5. Павлюковец С. А., Вельченко А. А., Радкевич А. А. Математическая модель системы управления мобильным гусеничным роботом с учётом кинематических и динамических параметров // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 3. С. 33–38. DOI: 10.21122/2309-4923-2023-3-33-38.
6. Антипина Е. В., Мустафина С. А., Антипин А. Ф. Поиск оптимальных начальных концентраций веществ катализитической реакции на основе кинетической модели // Автометрия. 2023. **59**, № 4. С. 78–87. DOI: 10.15372/AUT20230409.
7. Понtryagin Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

8. **Карамзин Д. Ю.** Принцип максимума Понtryгина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2018. № 20. С. 46–61.
9. **Katoch S., Chauhan S. S., Kumar V.** A review on genetic algorithm: Past, present, and future // Multimedia Tools and Applications. 2020. **80**, Iss. 5. P. 8091–8126. DOI: 10.1007/s11042-020-10139-6.
10. **Mustafina S., Antipin A., Antipina E. et al.** Search for the optimal ratio of the initial substances of a chemical reaction based on evolutionary calculations // ARPN Journ. Eng. and Appl. Sci. 2020. **15**, N 1. P. 56–60.
11. **Михерский Р. М.** Применение искусственной иммунной системы для распознавания зрительных образов // Компьютерная оптика. 2018. **42**, № 1. С. 113–117. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-113-117.
12. **Самигулина Г. А.** Разработка интеллектуальных экспертных систем прогнозирования и управления на основе искусственных иммунных систем // Проблемы информатики. 2010. № 1. С. 15–22.
13. **Shekhar S., Sharma D. K., Agarwal D. K., Pathak Y.** Artificial Immune Systems-Based Classification Model for Code-Mixed Social Media Data // IRBM. 2022. **43**, Iss. 2. P. 120–129.
14. **Alonso F. R., Oliveira D. Q., Zambroni de Souza A. C.** Artificial Immune Systems Optimization Approach for Multiobjective Distribution System Reconfiguration // IEEE Trans. Power Systems. 2015. **30**, Iss. 2. P. 840–847.
15. **Антипина Е. В., Мустафина С. А., Антипин А. Ф.** Поиск оптимальных режимных параметров катализитического процесса на основе эволюционных вычислений // Теоретические основы химической технологии. 2022. **56**, № 2. С. 158–166. DOI: 10.31857/S0040357122020038.
16. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
17. **Булдаев А. С.** Методы неподвижных точек в задачах оптимизации управляемых систем // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2020. **183**. С. 22–34. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-183-22-34.
18. **Аль-Бареда А. Я. С., Пупков К. А.** Решение задачи синтеза системы управления методом искусственных нейронных сетей // Фундаментальные исследования. 2015. Вып. 11. С. 853–857.

Поступила в редакцию 11.11.2024  
После доработки 11.12.2024  
Принята к публикации 17.03.2025