УДК 519.854.3-6

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ЧАСТОТНЫХ СВОЙСТВ ОТ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ В МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

**© А. А. Мизюканова, Г. П. Чикильдин**

*Новосибирский государственный технический университет,*
*630073, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20*
*E-mail: mizyukanova.anna@gmail.com, chikildin@gmail.com*

Рассматривается задача параметрической идентификации линейного динамического объекта с одним входом и выходом в условиях неполной априорной информации на основе метода наименьших квадратов. На этапе формирования системы уравнений относительно неизвестных параметров используется формирующая функция специального вида, позволяющая заменить операции численного дифференцирования измеренных сигналов входа и выхода идентифицируемого объекта операцией интегрирования по частям. Получены в аналитическом виде зависимости частотных свойств формирующей функции и её производных от корректирующих параметров данной функции. Приводятся результаты, иллюстрирующие практически полное совпадение частот, полученных экспериментально и по аналитическим соотношениям.

*Ключевые слова:* параметрическая идентификация, система с одним входом и выходом, метод наименьших квадратов, система алгебраических уравнений, формирующая функция, частотные свойства, аппроксимирующие полиномы.

DOI: 10.15372/AUT20250206
EDN: IWYGZA

**Введение.** Идентификация динамических объектов управления, в том числе и параметрическая, является ключевым звеном в области системного анализа и управления. Этот процесс помогает определить модель, которая наилучшим образом соответствует наблюдаемым данным. С помощью корректно идентифицированной модели можно глубже понять физические и математические процессы, происходящие в системе, а также делать более точные прогнозы её будущего поведения, что особенно актуально в инженерных областях, начиная с робототехники и заканчивая аэрокосмической отраслью.

Основными математическими моделями при синтезе систем управления, как правило, являются дифференциальное уравнение или соответствующая ему передаточная функция. Оценка параметров модели объекта, когда его входные и выходные сигналы подвержены влиянию шумов, является более сложной проблемой [1–3]. На сегодняшний день существует достаточно большое количество работ, в которых предлагаются те или иные подходы к решению задачи параметрической идентификации, например метод наименьших квадратов и его модификации [4–7], метод максимального правдоподобия [2, 8], метод инструментальной переменной [9], адаптивные методы [10], методы, использующие нейронные сети [11, 12], и др.

Однако, несмотря на большое количество существующих методов, задача создания высокоточных и помехоустойчивых алгоритмов идентификации остаётся актуальной и в настоящее время даже в простейших случаях, когда речь идёт об идентификации линейных, стационарных, динамических объектов. Эффективное функционирование методов параметрической идентификации во многом зависит от количества и качества априорной информации. Основной проблемой получения полной априорной информации для оценивания параметров дифференциального уравнения является отсутствие возможности измерений производных входного и чаще выходного сигналов идентифицируемого объекта. Проблема получения качественной априорной информации связана с помехами, естественным образом искажающими измеряемые сигналы объекта, например, из-за несовершенства измерительной и регистрирующей аппаратуры, внешних возмущающих воздействий и т. д. В результате возникает необходимость использования дифференцирующих устройств, алгоритмов или методов, позволяющих избежать дифференцирования зашумлённых сигналов без потери информации.

Известно, что численное дифференцирование зашумлённых сигналов является некорректно поставленной задачей. Существуют различные подходы для восстановления производных по времени или замены операции численного дифференцирования, основанные на линейных дифференцирующих фильтрах, формулах аппроксимации с использованием интегралов и модулирующих функциях [3, 13–18].

В данной работе для замены численного дифференцирования измеренных сигналов предлагается использование некоторой аналитически заданной функции, которая вместе со своими производными применяется в процессе формирования системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно искомых параметров идентифицируемого объекта. Вид такой функции, удовлетворяющей определённым требованиям, необходимым для решения задачи идентификации, предложен в [19]. Суть данного подхода [19] сводится к замене производных измеряемых сигналов аналитически взятыми производными данной функции посредством известной процедуры многократного интегрирования по частям.

Представленный в [19] подход подтверждается результатами многочисленных модельных исследований, которые иллюстрируют эффективность предлагаемого подхода. В частности, в [20, 21] решается задача параметрической идентификации линейного динамического объекта третьего порядка на базе метода наименьших квадратов, предполагающего формирование СЛАУ. Приводятся результаты, позволяющие сделать заключение о возможности использования формирующей функции (ФФ) и процедуры интегрирования по частям в задачах параметрической идентификации. Анализируются частотные свойства формирующей функции и её производных. Интересен тот факт, что их амплитудные спектры схожи с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) полосовых фильтров, что положительно сказывается на свойствах матрицы, формируемой СЛАУ, если указанные спектры будут располагаться в пределах эффективной полосы АЧХ объекта. В результате возникает задача выбора таких параметров ФФ (назовём их корректирующими параметрами), которые бы позволяли варьировать расположением спектров формирующей функции и её производных, т. е. получить аналитическую зависимость влияния корректирующих параметров на частотные свойства совокупности указанных функций.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача параметрической идентификации линейного стационарного динамического объекта с одним входом и выходом. Объект представлен математической моделью в форме дифференциального уравнения

$$y^{(l)}(t) + \sum_{i=1}^{l} a_i y^{(i-1)}(t) = \sum_{j=1}^{r+1} b_j x^{(j-1)}(t). \tag{1}$$

Необходимо оценить параметры $a_i$, $i \in [1, l]$, и $b_j$, $j \in [1, r+1]$.

Априорной информацией являются измеренные с помехами входной $x_*(t) = x(t) + \delta x(t)$ и выходной $y_*(t) = y(t) + \delta y(t)$ сигналы объекта управления.

Структура идентифицируемого объекта (порядки левой $l$ и правой $r$ частей уравнения) предполагается известной.

Проблема идентификации заключается в отсутствии априорной информации о производных входного $x^{(j)}(t)$, $j \in [1, r]$, и выходного $y^{(i)}(t)$, $i \in [1, l]$, сигналов.

Ставится задача обойти операцию численного дифференцирования при формировании системы алгебраических уравнений за счёт использования специальных формирующих функций, параметры которых определяли бы требуемые частотные свойства этих функций, т. е. получить аналитическую зависимость влияния корректирующих параметров формирующих функций на их частотные свойства.

**Основная часть.** Представим уравнение (1) в виде [19–21]

$$\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(t) = u_0(t), \qquad n = l + r + 1. \tag{2}$$

Здесь $a_j = \{a_j,\ j \in [1, l]$ или $b_j,\ j \in [l+1, l+r+1]\}$ — параметры, подлежащие идентификации, $u_j(t) = \{y^{(j-1)},\ j \in [1, l]$ или $-x^{(j-1)},\ j \in [1, r+1]\}$, и $u_0(t) = -y^{(l)}(t)$ — координаты объекта.

В уравнении (2) необходимо определить $n$ неизвестных коэффициентов $a_j$, $j \in [1, n]$, что требует формирования как минимум системы $n$ алгебраических уравнений.

Предлагается осуществлять формирование системы [19] путём умножения каждого слагаемого уравнения (2) на линейно независимые ФФ: $w_i(t - \tau)$, $i \in [1, m_u]$, $m_u \geqslant n$, с последующим интегрированием по $\tau$ в пределах $[0, t]$. В результате получим

$$u_{ij} a_j = u_{0i}, \qquad i \in [1, m_u], \quad j \in [1, n], \tag{3}$$

где

$$u_{ij} = \Big\{ \int\limits_0^t w_i(t-\tau) y^{(j-1)}(\tau)\, d\tau, \qquad j \in [1, l]$$

$$\text{или} \quad -\int\limits_0^t w_i(t-\tau) x^{(j-l-1)}(\tau)\, d\tau, \qquad j \in [l+1, n] \Big\},$$

$$u_{0i} = -\int\limits_0^t w_i(t-\tau) y^{(l)}(\tau)\, d\tau.$$

Выражение (3) представляет собой систему $m_u \geqslant n$ линейных алгебраических уравнений относительно $n$ искомых параметров.

В [19] производится многократное интегрирование каждого элемента системы по частям, чтобы избежать дифференцирования измеренных сигналов входа и выхода идентифицируемого объекта. Для этого ФФ выбирается в виде

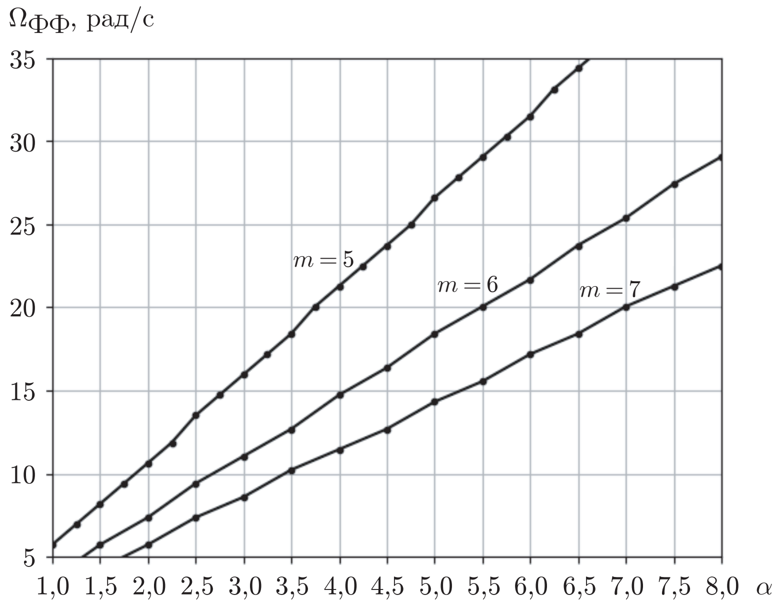
$$w(t) = \frac{\alpha^{(m+1)}}{m!} t^m \mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad m > l, \quad \alpha > 0, \tag{4}$$

которая вместе со своими производными удовлетворяет условиям

$$w^{(j)}(0) \approx w^{(j)}(T) \approx 0, \qquad j \in [0, n-1], \tag{5}$$

а

$$|w^{(n)}(T)| \leqslant \delta_w w_{\max}^{(n)} \quad \text{при } t \geqslant T, \qquad w_{\max}^{(n)} = \sup_{t \in [0, \infty]} |w^n(t)| \quad \text{при } \delta_w = 0{,}001\text{–}0{,}01. \tag{6}$$




Зависимость $\Omega_{ФФ} = f(\alpha)$ при $m = \text{const}$

Формирующую функцию и её производные можно трактовать как импульсные характеристики динамических звеньев, АЧХ которых несколько похожи на АЧХ полосовых фильтров [19], что в целом положительно сказывается на свойствах матрицы формируемой системы (3), особенно если такие АЧХ будут располагаться в пределах эффективной длительности АЧХ идентифицируемого объекта [5].

Вид временны́х и частотных характеристик ФФ и её производных определяется корректирующими параметрами $\alpha$ и $m$. Таким образом, зная максимальную частоту $\Omega_{\max}$ эффективной длительности АЧХ объекта, приходим к задаче выбора (по возможности в аналитическом виде) таких параметров $\alpha$ и $m$, которые бы обеспечили желаемое расположение АЧХ ФФ в ограниченном диапазоне частот.

Проведён ряд экспериментов относительно влияния параметров $\alpha$ и $m$ на частотные свойства ФФ и её производных. В результате получены графики зависимостей $\Omega_{ФФ} = f(\alpha)$ при $m \in [5, 7]$, где $\Omega_{ФФ}$ — максимальная частота, ограничивающая эффективную длительность спектра старшей производной ФФ. Данные графики представлены на рисунке.

Численные значения $\alpha$ и $m$ взяты из рабочего диапазона при моделировании объектов идентификации второго и третьего порядков [20, 21]. Вид приведённых кривых позволил аппроксимировать их полиномами первого порядка и получить следующие аналитические зависимости:

$$\alpha = \Omega_{ФФ}/5{,}3178 \qquad \text{для}\, m = 5, \tag{7}$$

$$\alpha = \Omega_{ФФ}/3{,}5997 - 0{,}0682 \qquad \text{для}\, m = 6, \tag{8}$$

$$\alpha = \Omega_{ФФ}/2{,}7816 - 0{,}2059 \qquad \text{для}\, m = 7. \tag{9}$$

Таким образом, выбирая параметр $m$ из рабочего диапазона и задавая частоту $\Omega_{ФФ} \approx \approx \Omega_{\max}$ вблизи максимальной частоты АЧХ объекта, можно с помощью представленных зависимостей (7)–(9) вычислить наиболее подходящее значение параметра $\alpha$.

В таблице приведены частоты формирующей функции $\Omega_{ФФ}$: частота $\Omega_{эксп}$, определённая экспериментально за счёт задания параметров формирующей функции $\alpha$, $m$ и постро-

Таблица

**Сравнительная таблица экспериментальных и расчётных данных для разных $m$**

| $\alpha$ | $m = 5$ | | $m = 6$ | | $m = 7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Omega_{эксп}$, рад/с | $\Omega_{расч}$, рад/с | $\Omega_{эксп}$, рад/с | $\Omega_{расч}$, рад/с | $\Omega_{эксп}$, рад/с | $\Omega_{расч}$, рад/с |
| 1 | 5,726861 | 5,3178 | 3,681554 | 3,8452 | 2,863431 | 3,35433 |
| 2 | 10,63560 | 10,6356 | 7,363107 | 7,4449 | 5,726861 | 6,13593 |
| 3 | 15,95340 | 15,9534 | 11,04466 | 11,0446 | 8,590292 | 8,91753 |
| 4 | 21,27120 | 21,2712 | 14,72621 | 14,6443 | 11,45372 | 11,6991 |
| 5 | 26,58900 | 26,5890 | 18,40777 | 18,2440 | 14,31715 | 14,4807 |
| 6 | 31,49774 | 31,9068 | 21,68026 | 21,8437 | 17,18058 | 17,2623 |
| 7 | 36,81554 | 37,2246 | 25,36181 | 25,4434 | 20,04401 | 20,0439 |
| 8 | 42,54240 | 42,5424 | 29,04337 | 29,0431 | 22,49838 | 22,8255 |

ения спектральной характеристики; частота $\Omega_{расч}$, полученная по формульным выражениям (7)–(9). Представленные данные иллюстрируют хорошее (90 %) совпадение результатов. Максимальная погрешность наблюдается при уменьшении значений параметра $\alpha$ и росте параметра $m$, что заведомо предполагает необходимость выбора этих корректирующих параметров в диапазоне, минимизирующем погрешность.

Результаты идентификации модельных объектов второго и третьего порядков [20, 21] показывают снижение среднеквадратичной погрешности идентификации параметров в случае сближения частоты $\Omega_{ФФ}$ с максимальной частотой АЧХ идентифицируемого объекта, что практически всегда возможно по причине удобного размещения совокупности спектров ФФ и её производных в диапазоне эффективной длительности АЧХ объекта.

**Заключение.** В представленной работе предложен способ решения задачи параметрической идентификации линейного динамического объекта с одним входом и выходом в условиях отсутствия априорной информации о производных измеряемых сигналов. Замена численного дифференцирования измеренных сигналов осуществляется за счёт интегрирования по частям на этапе формирования системы линейных алгебраических уравнений с помощью специальной формирующей функции и её производных.

Получены аналитические зависимости частотных свойств формирующей функции от её корректирующих параметров, которые позволяют выбирать частотный диапазон расположения спектральных характеристик ФФ и её производных вблизи диапазона эффективной длительности амплитудно-частотной характеристики идентифицируемого объекта, что, в свою очередь, улучшает свойства матрицы формируемой системы алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров.

Приведены результаты, иллюстрирующие эффективность использования полученных аналитических выражений для определения требуемых частот расположения спектральных характеристик формирующей функции и её производных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Fuller W. A.** Measurement Error Models. N. Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2006. 480 p.
2. **Söderström T.** Errors-in-Variables Methods in System Identification / Eds. by A. Isidori, J. H. van Schuppen, E. D. Sontag, M. Krstic // Communications and Control Engineering. Cham: Springer, 2018. 485 p.
3. **Sinha N. K., Rao G. P.** Identification of Continuous-Time Systems. Methodology and Computer Implementation / Eds. by N. K. Sinha, G. P. Rao // Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering. Vol. 7. Dordrecht: Springer, 2012. 637 p.
4. **Турчак Л. И.** Основы численных методов / Под ред. В. В. Щенникова. М.: Наука, 1987. 320 с.

5. **Анисимов А. С., Симонов М. М., Чикильдин Г. П.** Исследование алгоритмов идентификации импульсной и частотных характеристик. Новосибирск: Издательство НГТУ, 1996. 49 с.
6. **Söderström T., Hong M., Zheng W. X.** Convergence properties of bias-eliminating algorithms for errors-in-variables identification // Int. Journ. Adaptive Control and Signal Processing. 2005. **19**, Iss. 9. P. 703–722.
7. **Ljung L., Söderström T.** Theory and Practice of Recursive Identification / Ed. by A. S. Willsky // Signal Processing, Optimization, and Control. Vol. 4. Mass.: MIT Press, 1983. 556 p.
8. **Kay S. M.** Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. N. J.: PTR Prentice-Hall, Inc., 1993. 595 p.
9. **Young P. C.** An Instrumental Variable Method for Real-time Identification of a Noisy Process // Automatica. 1970. **6**. P. 271–287.
10. **Кику А. Г., Костюк В. И., Краскевич В. Е. и др.** Адаптивные системы идентификации. Киев: Техніка, 1975. 284 с.
11. **Forgione M., Piga D.** Model structures and fitting criteria for system identification with neural networks // Proc. of the 14th IEEE Int. Conf. Application of Information and Communication Technologies (AICT). Tashkent, Uzbekistan, 7–9 Oct., 2020. 6 p.
12. **Gupta G., Xiao X., Bogdan P.** Multiwavelet-based Operator Learning for Differential Equations // Proc. of the 35th Conf. Neural Information Processing Systems (NeurIPS). Online, 6–14 Dec., 2021. Vol. 34. P. 24048–24062.
13. **Othmane A., Kiltz L., Rudolph J.** Survey on algebraic numerical differentiation: Historical developments, parametrization, examples, and applications // Int. Journ. Systems Science. 2022. **53**, Iss. 9. P. 1848–1887. DOI: 10.1080/00207721.2022.2025948.
14. **Young P.** Parameter Estimation for Continuous-Time Models — A Survey // Automatica. 1981. **17**, Iss. 1. P. 23–39.
15. **Unbehauen H., Rao G. P.** Continuous-time approaches to system identification — A survey // Automatica. 1990. **26**, Iss. 1. P. 23–35.
16. **Nielsen J. N., Madsen H., Young P. C.** Parameter estimation in stochastic differential equations: An overview // Ann. Rev. Control. 2000. **24**. P. 83–94.
17. **Garnier H., Mensler M., Richard A.** Continuous-time model identification from sampled data: Implementation issues and performance evaluation // Int. Journ. Control. 2003. **76**, N 13. P. 1337–1357.
18. **Young P. C., Garnier H.** Identification and estimation of continuous-time, data-based mechanistic (DBM) models for environmental systems // Environmental Modelling and Software. 2006. **21**, Iss. 8. P. 1055–1072.
19. **Чикильдин Г. П., Мизюканова А. А.** Анализ функции, формирующей алгебраическую систему в параметрической идентификации // Системы анализа и обработки данных. 2022. **86**, № 2. С. 95–104.
20. **Mizyukanova A. A., Chikildin G. P.** Parametric Identification Under Incomplete a Priori Information // Proc. of the IEEE 24th Int. Conf. Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM). Novosibirsk, Russia, 29 June – 3 July, 2023. P. 1640–1643.
21. **Mizyukanova A. A., Chikildin G. P., Karasenko I. I.** On Linear Algebraic System Forming in Parametric Identification Problems // Proc. of the IEEE XVI Int. Sci. and Tech. Conf. Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk, Russia, 10–12 Nov., 2023. P. 940–943.


*Поступила в редакцию 19.02.2025*
*После доработки 05.03.2025*
*Принята к публикации 17.03.2025*