

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.1

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ
ЛОКАЛИЗАЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ НА ОСНОВЕ
ВОЗВРАТНОЙ РЕКУРСИИ: ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ
ПРОГРАММНАЯ ПОДДЕРЖКА

© А. Л. Резник, А. А. Соловьев, И. Ю. Резник, Р. М. Кожевников

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: reznik@iae.nsk.su*

Изложен новый подход к построению оптимальных алгоритмов локализации точечных сигнальных источников, обнаруживающих себя генерацией в случайные моменты времени сверхкоротких импульсов. Подход базируется на применении к данному классу задач итеративного метода возвратной рекурсии. Найдено аналитически точное решение задачи для случая, когда априорная плотность вероятности разыскиваемого источника задаётся кусочно-постоянной функцией произвольной сложности. Весь процесс, связанный с построением оптимального поискового алгоритма, который минимизирует математическое ожидание общего времени локализации разыскиваемого точечно-импульсного источника, полностью формализован и реализован в виде автономного программного блока.

Ключевые слова: алгоритмы локализации, точечно-импульсный источник, возвратная рекурсия.

DOI: 10.15372/AUT20250301

EDN: BFUJEQ

Введение. Классические системы обнаружения, пеленгации и сопровождения целевых объектов, траектории и пространственные координаты которых подлежат расчёту, классифицируют, как правило, по двум категориям. Первая основана на активной локализации, когда азимутальное направление и дальность разыскиваемого объекта оцениваются по отражённому от него сигналу. Этот метод является основным инструментом, используемым, например, в современных радиолокационных системах [1, 2]. Второй метод локализации базируется на приёме сигнала, генерируемого самим разыскиваемым объектом. Наиболее характерной областью, в которой применяются такого рода пассивные поисковые системы, является гидроакустика [3, 4]. В представленной работе рассматриваются проблемы, связанные с построением конструктивных алгоритмов скоростного оценивания координат малоразмерных сигнальных источников, обнаруживающих себя генерацией в случайные моменты времени сверхкоротких (мгновенных) импульсов. Подобного рода задачи не укладываются в стандартные схемы обнаружения и уточнения координат целевых объектов и требуют разработки своих специфических методов исследования. Необходимость построения алгоритмов локализации сигнальных источников со случайной дисциплиной генерации импульсов возникает, в частности, в астрофизике при поиске барстеров — непериодически вспыхивающих космических источников рентгеновского излучения [5]. Похожие по математической постановке задачи появляются при отслеживании траекторий малоразмерных и слабоконтрастных объектов на видеопоследовательностях, регистрируемых в процессе дистанционного зондирования земной поверхности [6, 7], а также в дефектоскопии при поиске неисправностей, проявляющихся в виде перемежающихся отказов [8, 9]. При ап-

проксимации и фильтрации зашумлённых изображений малоразмерных подвижных объектов такие задачи могут возникнуть в тех случаях, когда разыскиваемый объект является источником помех, а уточнение его координат необходимо для корректного проведения процедуры шумоподавления [10, 11]. Построение оптимальной стратегии поиска сигнальных источников со случайной дисциплиной генерации импульсов в большинстве случаев требует решения сложных вариационных задач из области оптимального управления и динамического программирования [12, 13]. Так, рассматриваемая в данной работе задача приводит к многомерной системе нелинейных уравнений, численное решение которой затруднено даже при использовании самых передовых вычислительных технологий. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что с его помощью удалось установить и учесть особенности формирования возникающей многомерной системы уравнений, позволившие найти её точное решение. Метод возвратной рекурсии сделал прозрачным и скоростным процесс расчёта параметров оптимального поиска. Методика построения оптимальных возвратно-рекурсивных алгоритмов, которые минимизируют математическое ожидание времени поиска и обеспечивают заданную точность локализации сигнальных импульсных источников, была полностью формализована и реализована в виде автономного программного блока.

1. Постановка задачи. В решаемой ниже задаче (рис. 1) разыскивается малоразмерный импульсный источник, расположенный в пределах поискового интервала $(0, L)$. Известна его априорная плотность вероятности, которая задаётся кусочно-постоянной функцией $H^{(1)}(x)$. Кусочно-постоянное представление выбрано потому, что с помощью аппроксимации нулевого порядка можно приблизить произвольную непрерывную на отрезке $[0, L]$ функцию (т. е. любую функцию класса $C[0, L]$) с любой заранее заданной точностью. В целом, будет рассматриваться одномерная задача, но её решение при необходимости легко

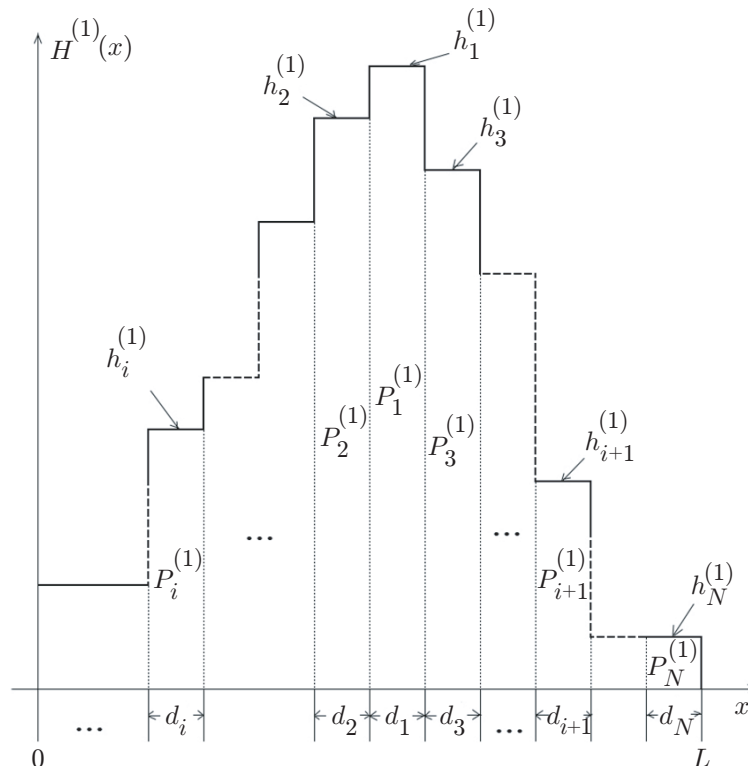


Рис. 1. Априорная функция плотности вероятности разыскиваемого источника $H^{(1)}(x)$

обобщается на двумерный случай. Предполагается, что сигнальный источник достаточно мал, чтобы в рамках решаемой задачи можно было пренебречь его физическими размерами и считать его математической точкой. Разыскиваемый источник в случайные моменты времени генерирует сверхкороткие (мгновенные) импульсы с пуассоновской интенсивностью λ . Это означает, что паузы между импульсами имеют показательное распределение $\text{pause}(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$. Локализация сигнального источника ведётся с помощью детекторного устройства, окно обзора которого может произвольно меняться в течение всего периода поиска. Импульс регистрируется тогда и только тогда, когда в момент генерации он находится в окне обзора детектора. При регистрации импульса сканирующее окно сужается, и дальнейший поиск продолжается внутри детекторного окна с зафиксированным импульсом до достижения требуемой точности локализации. Задача заключается в построении поисковой процедуры, имеющей минимальное (в статистическом плане) время локализации импульсного источника с точностью ε . Под статистически минимальным временем понимается математическое ожидание времени локализации источника, усреднённое по ансамблю реализаций. Требуемая точность считается обеспеченной, если в результате поиска указывается подынтервал $\Delta_\varepsilon \subset (0, L)$, имеющий длину $0 < \varepsilon < L$ и достоверно содержащий разыскиваемый источник.

2. Общий план решения. При построении оптимального алгоритма, минимизирующего (с заданной точностью) математическое ожидание времени локализации разыскиваемого источника, требуется выполнить несколько обязательных условий. Первое: оптимальный поисковый алгоритм всегда должен начинаться с наблюдения детекторным устройством того из фрагментов поискового интервала, который имеет наивысшую плотность вероятности. Второе условие относится к ситуации, когда при длительном отсутствии зафиксированных импульсов требуется осуществить переход к следующему этапу: в этом случае переход должен производиться в тот момент, когда падающая плотность на текущем сканируемом участке сравнивается с плотностью того из не наблюдавшихся ранее подынтервалов, который имел самую высокую плотность. При этом на каждом последующем этапе сканируется расширенный фрагмент (это расширение происходит за счёт добавления к нему не наблюдавшегося ранее подынтервала с самой высокой амплитудой). Третье: в момент, когда на одном из начальных поисковых этапов фиксируется сигнальный импульс, происходит переход к заключительной стадии поиска, которая представляет собой многоэтапную процедуру оптимальной локализации (с требуемой в задаче точностью) импульсного источника, имеющего равномерное распределение внутри детекторного окна, в котором зафиксирован импульс. Такая задача рассматривалась нами ранее, её решение можно найти в [9]. Аналогичный переход к процедуре оптимальной локализации равномерно распределённого точечно-импульсного источника должен произойти и в том случае, когда ни на одном из начальных поисковых этапов не удалось зафиксировать ни одного импульса. В этом случае исходная функция плотности вероятности $H^{(1)}(x)$ (здесь и далее верхний индекс в круглых скобках всегда указывает на привязку параметра к номеру этапа поискового алгоритма) выравнивается на всём интервале $(0, L)$, в результате чего заключительная оптимальная процедура поиска должна вестись уже в пределах всего поискового интервала до достижения требуемой точности локализации.

Таким образом, в вычислительном отношении для построения оптимального алгоритма локализации необходимо для каждого поискового этапа рассчитать его оптимальную предельно допустимую продолжительность и оптимальный размер сканирующего окна детектора. При этом совокупное применение полного набора рассчитанных оптимальных параметров должно обеспечить минимизацию математического ожидания общего времени локализации разыскиваемого источника. Для решения этой задачи нами предложено использовать механизм возвратной рекурсии. Идея такого подхода возникла потому, что

применительно к данной задаче рекурсивный алгоритм перерасчёта общего времени локализации более эффективен и прозрачен, если его проводить не с привязкой к хронологии выполнения поисковых этапов, а совершать вычисления в обратном порядке.

3. Схема возвратной рекурсии. Производя стандартную нормировку на длину поискового интервала L и заменяя величину ε величиной ε/L , можно исключить параметр L из дальнейшего рассмотрения и считать, что $L = 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. В используемом нами представлении многоступенчатая кусочно-постоянная функция $H^{(1)}(x)$, описывающая исходную априорную плотность распределения вероятностей разыскиваемого источника, такова, что все подынтервалы d_i , $(i = 1, \dots, N)$ и соответствующие им амплитудные значения $h_1^{(1)}, (i = 1, \dots, N)$ упорядочены по убыванию плотности: $h_1^{(1)} > h_2^{(1)} > \dots > h_N^{(1)} > 0$. Для удобства дальнейшего изложения предполагается, что исходная функция плотности $H^{(1)}(x)$ не имеет внутри интервала $(0, 1)$ ни одного локального минимума. При несоблюдении этого условия оптимальный алгоритм локализации остаётся прежним, но на ряде этапов подлежащий сканированию фрагмент поискового интервала может оказаться многосвязным.

Общая схема возвратной рекурсии в нашем случае такова. Обозначим через $\text{ET_recurs}(i + 1)$ математическое ожидание остаточного времени, которое требуется оптимальному поисковому алгоритму для завершения поиска и достижения требуемой точности локализации ε в том случае, когда при исполнении i начальных поисковых этапов не зафиксировано ни одного импульса. Тогда на очередном шаге рекурсии расчёт оптимального времени $\text{ET_recurs}(i)$ может быть выполнен с применением «возвратного» соотношения:

$$\begin{aligned} \text{ET_recurs}(i) = & Q_1^{(i)} [t_{\text{max_opt}}^{(i)} + \text{ET_recurs}(i + 1)] + \\ & + Q_2^{(i)} [t_{\text{short}}^{(i)} + \text{ET_uniform}(\varepsilon/l_{\text{opt}}^{(i)})]. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметры, которые необходимо рассчитать для проведения возвратной рекурсии (1), таковы: $Q_1^{(i)}$ — вероятность того, что на i -м поисковом этапе не будет зафиксировано ни одного импульса; $Q_2^{(i)} = 1 - Q_1^{(i)}$ — вероятность того, что на i -м поисковом этапе будет зафиксирован как минимум один импульс; $t_{\text{max_opt}}^{(i)}$ — оптимальное значение максимально допустимой продолжительности i -го поискового этапа; $t_{\text{short}}^{(i)}$ — математическое ожидание интервала времени от начала i -го этапа до регистрации первого импульса; $l_{\text{opt}}^{(i)}$ — оптимальный размер окна детектора на i -м поисковом этапе; $\text{ET_uniform}(\varepsilon/l_{\text{opt}}^{(i)})$ — математическое ожидание времени исполнения заключительной многоэтапной процедуры локализации равномерно распределённого источника (в том случае, если на i -м этапе фиксируется импульс). Циклически повторяя рекурсию (1), т. е. рассчитывая последовательно величины $\text{ET_recurs}(N)$, $\text{ET_recurs}(N - 1)$ и т. д., мы в итоге получим величину $\text{ET_recurs}(1)$, соответствующую математическому ожиданию времени исполнения оптимального алгоритма (т. е. алгоритма, который минимизирует усреднённое по ансамблю реализаций суммарное время поиска для исходно поставленной задачи). При этом на каждом шаге рекурсии для нахождения текущих значений $l_{\text{opt}}^{(i)}$ и $t_{\text{max_opt}}^{(i)}$, определяющих оптимальные размер детекторного окна и значение максимально допустимой продолжительности i -го поискового этапа, будет решаться своя вариационная задача. Для инициации процедуры возвратной рекурсии берётся выражение $\text{ET_recurs}(N)$, соответствующее математическому ожиданию времени исполнения последнего N -го этапа. Заметим, что N -й этап наступает только тогда, когда ни на одном из начальных $(N - 1)$ этапов не зафиксировано ни одного импульса, вследствие чего амплитудные значения исходной функции

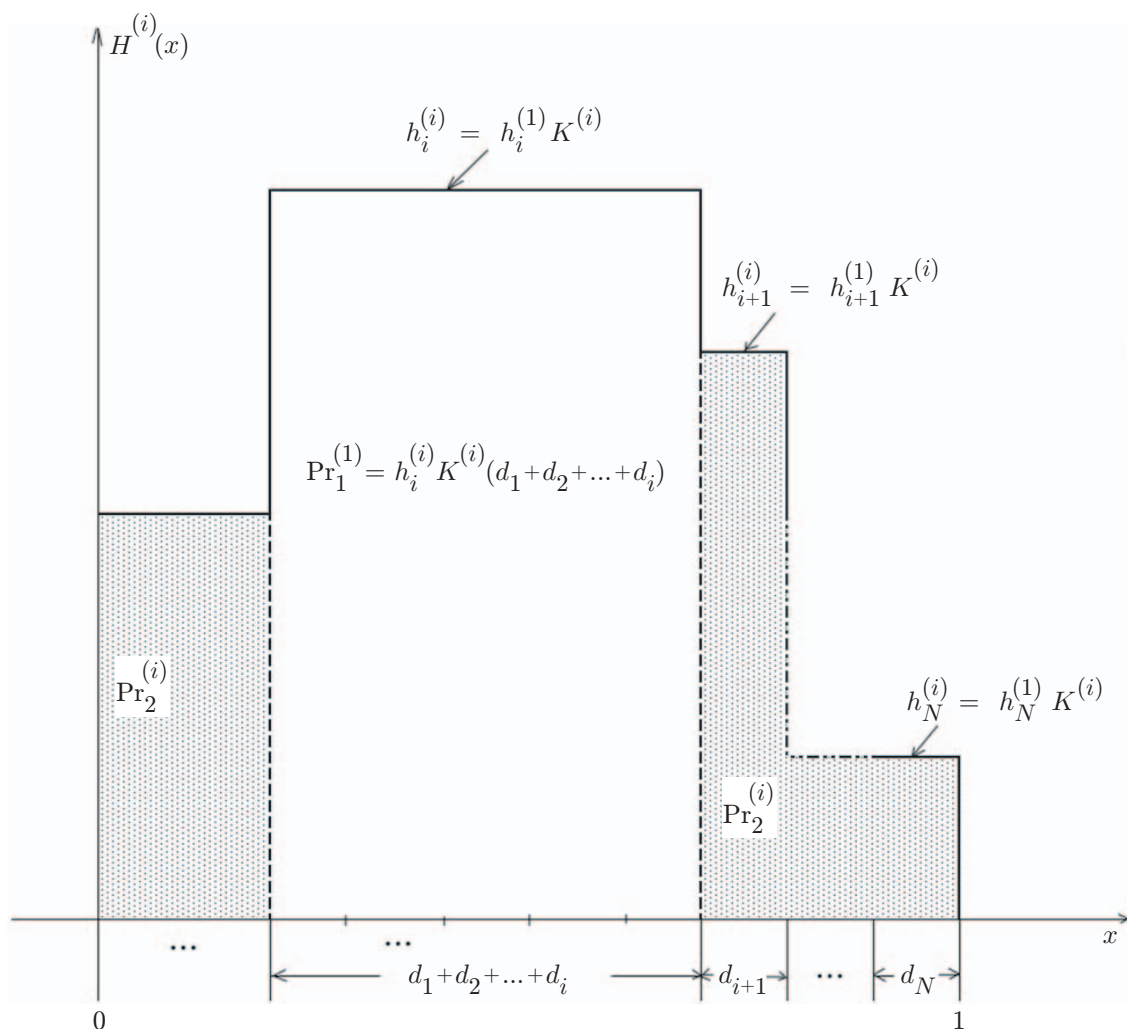


Рис. 2. Трансформированная к началу i -го этапа функция плотности вероятности $H^{(i)}(x)$

плотности вероятности $H^{(1)}(x)$ выравнялись во всём поисковом интервале. Решение возникающей при этом задачи построения оптимального алгоритма локализации равномерно распределённого точно-импульсного источника найдено в [14].

4. Расчёт вспомогательных параметров для построения оптимального алгоритма локализации.

4.1. Расчёт трансформированной функции плотности вероятностей $H^{(i)}(x)$ для каждого поискового этапа. В оптимальной поисковой процедуре (рис. 2) к началу каждого нового i -го этапа (т. е. к моменту, когда при отсутствии зафиксированных импульсов истекло максимально допустимое время исполнения предыдущего $(i - 1)$ -го этапа) должны сравняться плотности вероятностей во всём объединённом фрагменте $(d_1 + \dots + d_i)$. Второе обстоятельство, на которое необходимо обратить внимание, заключается в том, что все плотности вероятностей $h_i^{(i)}, \dots, h_N^{(i)}$, являющиеся амплитудными значениями трансформированной функции $H^{(i)}(x)$ в подынтервалах d_j , $(j = i, \dots, N)$, имеют (по отношению к исходной плотности $H^{(1)}(x)$) один и тот же коэффициент роста $K^{(i)}$. Это происходит потому, что все не наблюдавшиеся ранее фрагменты синхронно и в равной степени подрастали на каждом из $(i - 1)$ предыдущих этапов. Учитывая это, можно рассчитать изменившуюся

к началу i -го этапа функцию плотности $H^{(i)}(x)$:

$$H^{(i)}(x) = \begin{cases} h_i^{(1)} K^{(i)}, & x \in d_j, \quad j = 1, \dots, i; \\ h_j^{(1)} K^{(i)}, & x \in d_j, \quad j = (i+1), \dots, N. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку каждая из функций $H^{(i)}(x)$, $i = 1, \dots, (N-1)$, представляет собой плотность вероятностей, нетрудно вычислить коэффициенты роста $K^{(i)}$, знание которых понадобится в дальнейшем:

$$\begin{aligned} K^{(i)} &= \frac{1}{h_i^{(1)}(d_1 + \dots + d_i) + \sum_{j=i+1}^{j=N} h_j^{(1)} d_j} = \\ &= \frac{1}{h_i^{(1)}(d_1 + \dots + d_i) + (P_{i+1}^{(1)} + \dots + P_N^{(1)})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку на i -м этапе поиск будет проводиться в пределах объединённого фрагмента $(d_1 + \dots + d_i)$, нам потребуется знание вероятности $\text{Pr}_1^{(i)}$ того, что на этом участке присутствует разыскиваемый источник:

$$\text{Pr}_1^{(i)} = h_i^{(1)} K^{(i)}(d_1 + \dots + d_i). \quad (4)$$

Вероятность того, что источник находится вне наблюдаемого на i -м этапе фрагмента $(d_1 + \dots + d_i)$, равна соответственно

$$\text{Pr}_2^{(i)} = 1 - \text{Pr}_1^{(i)}. \quad (5)$$

4.2. Расчёт величин $t_{\max}^{(i)}$ — максимально допустимых продолжительностей каждого из поисковых этапов оптимального алгоритма локализации. Проведём сначала процедуру расчёта максимально допустимого времени $t_{\max}^{(1)}$, в течение которого на первом этапе может (при отсутствии регистрируемых импульсов) сканироваться фрагмент d_1 , соответствующий самой высокой амплитуде $h_1^{(1)}$. В принципе, если на первом этапе весь участок d_1 наблюдать целиком (т. е. если размер детекторного окна $l^{(1)}$ совпадает с d_1), то вероятность не зарегистрировать за время t ни одного импульса складывается из вероятностей двух непересекающихся событий и равна

$$P(t) = (1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp(-\lambda t). \quad (6)$$

Здесь первое слагаемое $(1 - P_1^{(1)})$ соответствует вероятности того, что сигнальный источник расположен вне подынтервала d_1 , а второе слагаемое — вероятности того, что разыскиваемый источник, находясь в подынтервале d_1 , не сгенерировал за время t ни одного импульса. Если же подынтервал d_1 равномерно сканировать детекторным окном $l^{(1)} < d_1$, то вероятность не зарегистрировать за время $t_{\max}^{(1)}$ ни одного импульса станет равной

$$P(t) = (1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp(-\hat{\lambda} t_{\max}^{(1)}), \quad \text{где} \quad \hat{\lambda} = \lambda \frac{l^{(1)}}{d_1}. \quad (7)$$

Поэтому при отсутствии зафиксированных импульсов в течение времени $t_{\max}^{(1)}$ исходная априорная вероятность $P_1^{(1)} = P_1^{(1)}(0)$ того, что импульсный источник расположен в пределах участка d_1 , понижается до величины

$$\begin{aligned} P_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)}) &= \frac{P_1^{(1)} \exp(-\hat{\lambda} t_{\max}^{(1)})}{(1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp(-\hat{\lambda} t_{\max}^{(1)})} = \\ &= \frac{P_1^{(1)} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)}{(1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, значение изменившейся к этому моменту времени амплитуды $h_1^{(1)}$ составит

$$h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)}) = \frac{P_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})}{d_1} = \frac{h_1^{(1)} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)}{(1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)}. \quad (9)$$

Окончание первого этапа наступит тогда, когда падающая при отсутствии импульсов плотность вероятности $h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})$ в подынтервале d_1 сравняется с возросшей к этому моменту плотностью $h_2^{(1)}(t_{\max}^{(1)})$ в подынтервале d_2 . На рис. 2 схематично показано, как при этом трансформируется функция $H^{(1)}(x)$. Сделаем ещё два дополнения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Во-первых, на момент окончания первого этапа (т. е. на момент времени $t_{\max}^{(1)}$) коэффициент $k^{(1)} = h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})/h_1^{(1)}$, соответствующий понижению плотности вероятности $h_1^{(1)}$ в первом подынтервале d_1 , всегда совпадает с коэффициентом понижения самой вероятности $P_1^{(1)}$ (с $P_1^{(1)}(0)$ до $P_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})$), поскольку

$$\frac{P_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})}{P_1^{(1)}} = \frac{h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})d_1}{h_1^{(1)}d_1} = \frac{h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})}{h_1^{(1)}} = k^{(1)}.$$

Во-вторых, коэффициент повышения $K^{(1)}$ является (в отличие от понижающего коэффициента $k^{(1)}$, действующего только в первом подынтервале d_1) общим для всех плотностей $h_i^{(1)}$ и всех вероятностей $P_i^{(1)}$ в каждом из подынтервалов d_i , ($i = 2, \dots, N$). С учётом этих дополнений для момента времени $t_{\max}^{(1)}$, когда плотности $h_1^{(1)}(t_{\max}^{(1)})$ и $h_2^{(1)}(t_{\max}^{(1)})$ должны сравняться, справедливы два очевидных равенства

$$\begin{cases} (1 - P_1^{(1)})K^{(1)} + P_1^{(1)}k^{(1)} = 1, \\ h_2^{(1)}K^{(1)} = h_1^{(1)}k^{(1)}. \end{cases} \quad (10)$$

Решая (10), получим, что

$$h_1^{(1)} k^{(1)} = \frac{h_1^{(1)}}{P_1^{(1)} + (1 - P_1^{(1)}) h_1^{(1)} / h_2^{(1)}}. \quad (11)$$

Поскольку соотношения (9) и (11) описывают одну и ту же (изменившуюся к моменту времени $t_{\max}^{(1)}$) плотность $h_1^{(1)}$, то, приравнявая их правые части, имеем

$$\frac{\exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)}{(1 - P_1^{(1)}) + P_1^{(1)} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right)} = \frac{1}{P_1^{(1)} + (1 - P_1^{(1)}) \frac{h_1^{(1)}}{h_2^{(1)}}},$$

откуда следует, что

$$\frac{h_1^{(1)}}{h_2^{(1)}} \exp\left(-\lambda \frac{l^{(1)}}{d_1} t_{\max}^{(1)}\right) = 1.$$

В результате получаем выражение для максимальной продолжительности первого этапа $t_{\max}^{(1)}$, зависящее от размера детекторного окна $l^{(1)}$:

$$t_{\max}^{(1)} = \frac{1}{\lambda} \frac{d_1}{l^{(1)}} \ln \frac{h_1^{(1)}}{h_2^{(1)}}. \quad (12)$$

Одним из важных моментов, позволяющих провести точный аналитический расчёт и конструктивно построить оптимальный поисковый алгоритм, является то, что описываемая соотношением (12) длительность первого этапа сканирования $t_{\max}^{(1)}$ зависит не от всех параметров исходной плотности $H^{(1)}(x)$, а только от размера подынтервала d_1 и отношения высот $h_1^{(1)} / h_2^{(1)}$. Поэтому расчёт продолжительности всех последующих этапов оптимальной поисковой процедуры (начиная со второго) не требует дополнительных вычислительных затрат и задаётся формулой, аналогичной (12). Так, для отыскания продолжительности $t_{\max}^{(i)}$ этапа с номером i в соотношении (12) необходимо сделать три простые замены, а именно: 1) параметр $l^{(1)}$ следует заменить параметром $l^{(i)}$; 2) вместо величины d_1 нужно использовать величину $(d_1 + \dots + d_i)$; 3) отношение высот $h_1^{(1)} / h_2^{(1)}$ необходимо заменить отношением $h_i^{(1)} / h_{i+1}^{(1)}$. Последняя замена высот корректна, так как модифицирующаяся на каждом i -м этапе функция плотности $H^{(1)}(x)$ всегда умножается на один и тот же общий для всех «подростающих» подынтервалов d_i , ($i = 2, \dots, N$) повышающий коэффициент $K^{(i)}$. В результате получаем соотношение для максимально допустимой продолжительности i -го этапа в зависимости от размера детекторного окна $l^{(i)}$:

$$t_{\max}^{(i)} = \frac{1}{\lambda^{(i)}} \ln \frac{h_i^{(1)}}{h_{i+1}^{(1)}}, \quad \lambda^{(i)} = \lambda \frac{l^{(i)}}{(d_1 + \dots + d_i)}. \quad (13)$$

Таким образом, для построения оптимальной поисковой процедуры достаточно рассчитать набор параметров $l_{\text{opt}}^{(i)}$, при которых минимизируется математическое ожидание суммарного времени локализации разыскиваемого импульсного источника, а для определения

оптимальных величин, описывающих максимально допустимую продолжительность поисковых этапов $t_{\max}^{(i)}$, будут использоваться найденные соотношения (14).

4.3. *Расчёт параметров $Q_1^{(i)}$, $Q_2^{(i)}$, $t_{\text{short}}^{(i)}$ и $ET_{\text{uniform}}(\varepsilon/l_{\text{opt}}^{(i)})$ для рекурсивного соотношения (1).* Параметр $Q_1^{(i)}$ представляет собой вероятность того, что на i -м этапе поиска не будет зафиксировано ни одного импульса. Это может произойти в двух непересекающихся случаях: либо сигнальный источник находится вне пределов сканируемого фрагмента ($d_1 + \dots + d_i$), либо разыскиваемый источник хотя и находится в пределах сканируемого фрагмента, но за период сканирования ни один из (возможно) сгенерированных им импульсов не попал в окно детектора.

С учётом (9) и (13)

$$\begin{aligned} Q_1^{(i)} &= \text{Pr}_2^{(i)} + \text{Pr}_1^{(i)} [\exp(-\lambda_i t_{\max}^{(i)})] = \\ &= \text{Pr}_2^{(i)} + \text{Pr}_1^{(i)} \left[\exp\left(-\lambda_i \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{h_i^{(1)}}{h_{i+1}^{(1)}}\right) \right] = \text{Pr}_2^{(i)} + \text{Pr}_1^{(i)} \frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_i^{(1)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Вероятность $Q_2^{(i)}$ является дополнением к вероятности $Q_1^{(i)}$:

$$Q_2^{(i)} = 1 - Q_1^{(i)} = \text{Pr}_1^{(i)} \left[1 - \frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_i^{(1)}} \right]. \quad (15)$$

Для расчёта входящего в рекурсивное соотношение (1) параметра $t_{\text{short}}^{(i)}$ используем следующий стандартный приём. Если предположить, что некий пуассоновский источник мощностью γ за фиксированный промежуток времени T_{long} произвёл как минимум один импульс, то математическое ожидание длины паузы от начала промежутка до генерации источником первого импульса будет равно

$$T_{\text{short}} = \int_0^{T_{\text{long}}} t \left(\frac{\gamma \exp(-\gamma t)}{\int_0^{T_{\text{long}}} \gamma \exp(-\gamma \tau) d\tau} \right) dt = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \gamma T_{\text{long}} \frac{\exp(-\gamma T_{\text{long}})}{1 - \exp(-\gamma T_{\text{long}})} \right). \quad (16)$$

Если в (16) вместо переменных T_{long} и γ подставить взятые из (13) величины $t_{\max}^{(i)} = (1/\lambda^{(i)}) \ln(h_i^{(1)}/h_{i+1}^{(1)})$ (максимально допустимую продолжительность i -го этапа) и $\lambda^{(i)} = \lambda l^{(i)}/(d_1 + \dots + d_i)$ (условную мощность источника на i -м этапе наблюдения), то получим

$$t_{\text{short}}^{(i)} = \frac{1}{\lambda} \frac{(d_1 + \dots + d_i)}{l^{(i)}} \left(1 - \frac{\ln(h_i^{(1)}/h_{i+1}^{(1)})}{h_i^{(1)}/h_{i+1}^{(1)} - 1} \right), \quad i = 1, \dots, (N-1). \quad (17)$$

Порядок расчёта выражения $ET_{\text{uniform}}(\varepsilon/l^{(i)})$, соответствующего математическому ожиданию времени исполнения оптимального алгоритма локализации равномерно распределённого импульсного источника, можно найти в [14, 15]. Применительно к рассматриваемой задаче на этапе с номером i оптимальное значение величины $ET_{\text{uniform}}^{(i)}$ должно выбираться из набора

$$ET_{\text{uniform}} j^{(i)} = \frac{j}{\lambda} \left(\frac{l_i}{\varepsilon} \right)^{1/j}, \quad j = 1, \dots, n_{\max}^{(i)}, \quad (18)$$

где $n_{\max}^{(i)}$ — такое минимальное натуральное n , что

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)} < \frac{\varepsilon}{l_i}.$$

5. Вариационная задача для расчёта оптимальных размеров детекторных окон. В соответствии со схемой возвратной рекурсии (1) для нахождения параметров, необходимых для построения оптимального поискового алгоритма и с помощью которых рассчитывается математическое ожидание времени его исполнения, нам остаётся найти оптимальные размеры детекторных окон $l_{\text{opt}}^{(i)}$. Действительно, в этом случае конкретные величины $t_{\max_{\text{opt}}}^{(i)}$ (оптимальные значения максимально допустимой продолжительности каждого из поисковых этапов) определяются соотношением (13). Вероятности $Q_1^{(i)}$ и $Q_2^{(i)}$, порядок расчёта которых изложен в разд. 4.3, не зависят от параметров оптимального поискового алгоритма, а зависят лишь от исходной априорной плотности вероятности $H^{(1)}(x)$ и поэтому могут быть рассчитаны заранее. Входящие в рекурсивное соотношение (1) величины $t_{\text{short}}^{(i)}$ зависят от оптимальных размеров детекторных окон $l_{\text{opt}}^{(i)}$ и вычисляются в соответствии с соотношением (17). Математическое ожидание времени исполнения алгоритма многоэтапной оптимальной локализации равномерно распределённого источника $\text{ET_uniform}(\varepsilon/l_{\text{opt}}^{(i)})$ зависит от оптимального размера детекторного окна $l_{\text{opt}}^{(i)}$, и для его расчёта, как уже было отмечено, будет использоваться результат, полученный в [14].

Поскольку размер детекторного окна $l^{(i)}$ на i -м этапе оптимального поискового алгоритма должен обеспечить минимум математическому ожиданию $\text{ET_recurs}(i)$, то для нахождения его оптимального значения $l_{\text{opt}}^{(i)}$ поступим следующим образом. Используя соотношения (13)–(15) и (17), (18), перепишем правую часть соотношения (1) в виде

$$\text{ET_recurs}(i) = \frac{1}{\lambda} \left\{ A(i) \left(\frac{1}{l^{(i)}} \right)^2 + j B(i) \left(\frac{l^{(i)}}{\varepsilon} \right)^{1/j} + \text{const}(i+1) \right\}, \quad (19)$$

где

$$A(i) = (d_1 + \dots + d_i) \left[\text{Pr}_1^{(i)} \left(1 - \frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_i^{(1)}} \right) + \text{Pr}_2^{(i)} \ln \frac{h_i^{(1)}}{h_{i+1}^{(1)}} \right]; \quad B(i) = \text{Pr}_1^{(i)} \left(1 - \frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_i^{(1)}} \right);$$

$$\text{const}(i+1) = \left(\text{Pr}_1^{(i)} \frac{h_{i+1}^{(1)}}{h_i^{(1)}} + \text{Pr}_2^{(i)} \right) \text{ET_recurs}(i+1); \quad j = \overline{1, n_{\max}^{(i)}}.$$

Далее воспользуемся тем, что выражение $\text{ET_recurs}(i)$, рассматриваемое как функция параметра $l^{(i)}$, достигает своего глобального минимума либо на границе анализируемой области (напомним, что на i -м этапе граничными являются точки $l^{(i)} = \varepsilon$ и $l^{(i)} = (d_1 + \dots + d_i)$), либо во внутренней точке $l^{(i)}$, в которой производная $\partial \text{ET_recurs}(i) / \partial l^{(i)}$ обращается в нуль. Ввиду того, что коэффициенты $A(i)$, $B(i)$ и $\text{const}(i+1)$ не зависят от параметра $l^{(i)}$, то для нахождения внутренней точки $l^{(i)}$ с нулевой частной производной имеем уравнение

$$A(i) \left(-\frac{1}{(l^{(i)})^2} \right) + B(i) \varepsilon^{-1/j} (l^{(i)})^{1/j-1} = 0. \quad (20)$$

Разрешая его для всех целочисленных j из диапазона $\overline{1, n_{\max}^{(i)}}$, получим набор значений

$$l_j^{(i)} = \left[\left(\left[\frac{A(i)}{B(i)} \right]^j \varepsilon \right) \right]^{1/(j+1)}. \quad (21)$$

Далее из совокупности, включающей в свой состав весь набор (21) и две граничные точки $l^{(i)} = \varepsilon$ и $l^{(i)} = (d_1 + \dots + d_i)$, в качестве оптимального размера $l_{\text{opt}}^{(i)}$ следует брать то значение, в котором выражение (19) достигает минимума. Циклически повторяя описанную процедуру, можно последовательно рассчитать все оптимальные значения $l_{\text{opt}}^{(N-1)}, l_{\text{opt}}^{(N-2)}, \dots, l_{\text{opt}}^{(1)}$ и полный набор параметров, определяющих алгоритм оптимальной локализации случайного точечно-импульсного источника, имеющего кусочно-постоянную плотность на интервале поиска. Осталось заметить, что для инициации изложенного вычислительного процесса в качестве начального значения $\text{ET_recurs}(N)$ должно быть взято полученное в [14] математическое ожидание времени локализации случайного равномерного распределённого источника.

Заключение. Предложенный метод возвратно-рекурсивного построения алгоритма локализации точечно-импульсного источника был нами полностью формализован и реализован в виде автономного программного блока. Преимущество изложенного подхода заключается в том, что, во-первых, при его использовании не возникает вопрос о близости полученного решения к оптимальному поисковому алгоритму, так как программная схема осуществляет не численный приближённый расчёт, а вычисляет параметры точного аналитически обоснованного решения. Во-вторых, такой подход не требует наличия серьёзных вычислительных ресурсов, поэтому расчёт параметров оптимального алгоритма локализации точечно-импульсного источника, имеющего кусочно-постоянную плотность практически произвольной сложности, может осуществляться на обычном персональном компьютере средней производительности.

Финансирование. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00136).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolawole M. O. Radar Systems, Peak Detection and Tracking. London: Newnes, 2003. 400 p.
2. Арешин Я. О., Заикин Б. А., Котов А. Ф., Решетняк С. А. Алгоритм нелинейной фильтрации координат малоподвижного объекта в двухпозиционной радиосистеме // Радиотехника и электроника. 2019. **64**, № 3. С. 213–219.
3. Kleshchev A. A. Modern Problems of Acoustics and Hydroacoustics. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2022. 261 p.
4. Abbasov I. B. Hydroacoustic Ocean Exploration: Theories and Experimental Application. Hoboken, Beverly: John Wiley & Sons, Inc., 2016. 192 p.
5. Arnaud K., Smith R., Siemiginowska A. Handbook of X-ray Astronomy. Pt. 7. Cambridge Observing Handbooks for Research Astronomers. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 206 p.
6. Иванов В. А., Киричук В. С. Модель инерционного фотоприёмного устройства для анализа пороговой чувствительности в задаче обнаружения движущегося точечного объекта // Автометрия. 2013. **49**, № 1. С. 3–10.
7. Yao Y., Chen T., Bi H. et al. Automated object recognition in high-resolution optical remote sensing imagery // Nat. Sci. Rev. 2023. **10**, Iss. 6. DOI: 10.1093/nsr/nwad122.

8. **Ohring M., Kasprzak L.** Reliability and Failure of Electronic Materials and Devices. Cambridge: Academic Press, 2014. 758 p.
9. **Ye K. Z., Bain A. M.** Methods to Improve the Detection of Failures and Troubleshooting for Technical Diagnostics in Instrument // Manufacturing Sci. and Technol. 2013. **1**, Iss. 2. P. 31–35. DOI: 10.13189/mst.2013.010202.
10. **Mirzaei B., Nezamabadi-Pour H., Raoof A., Derakhshani R.** Small Object Detection and Tracking: A Comprehensive Review // Sensors. 2023. **23**, Iss. 15. P. 1–22. DOI: 10.3390/s23156887.
11. **Абилов В. В., Громилин Г. И., Косых В. П. и др.** Аппроксимация изображения мало-размерного подвижного объекта, формируемого сканирующим многорядным фотоприёмником // Автометрия. 2024. **60**, № 5. С. 41–49. DOI: 10.15372/AUT20240505.
12. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G.** Mathematical Theory of Optimal Processes. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1962. 360 p.
13. **Беллман Р., Калаба Р.** Динамическое программирование и современная теория управления / Пер. с англ. Е. Я. Ройтенберга; под ред. Б. С. Разумихина. М.: Наука, 1969. 120 с.
14. **Reznik A. L., Solov'ev A. A., Torgov A. V.** Algorithms for Optimal Localization of a Random Point-Pulse Source Uniformly Distributed over a Search Interval // Patt. Recogn. and Image Analysis. 2018. **28**, Iss. 2. P. 354–361. DOI: 10.1134/S1054661818020177.
15. **Reznik A. L., Tuzikov A. V., Soloviev A. A. et al.** Time-optimal algorithms focused on the search for random pulsed-point sources // Comput. Opt. 2019. **43**, Iss. 4. P. 605–610. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-605-610.

Поступила в редакцию 26.03.2025

После доработки 24.04.2025

Принята к публикации 29.04.2025
