УДК 519.254: 534.2: 550.34

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОЛОКАЦИИ В МОНИТОРИНГОВЫХ СИСТЕМАХ

© **М. С. Хайретдинов**[1,2], **Г. М. Шиманская**[1], **О. А. Копылова**[1], **А. А. Якименко**[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6*
[2]*Новосибирский государственный технический университет, 630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20*
E-mail: marat@opg.sscc.ru

Рассматриваются методы решения задач геофизического мониторинга окружающей среды по отношению к мощным импульсным источникам — карьерным взрывам, падающим на Землю телам в виде отработанных ступеней ракет при спутниковых запусках, осколков метеоритов и др. Общая постановка исследования сформулирована как решение обратной задачи восстановления параметров источника по его сейсмическим и акустическим волнам. Проведено численное моделирование, и выполнены экспериментальные исследования предлагаемых методов для оценивания точности пространственной локализации источников на примере использования калибровочных пространственно распределённых взрывов.

Ключевые слова: импульсные источники, геоакустический мониторинг, геолокация, обратная задача, поисковая оптимизация, численное моделирование, полевой эксперимент.

DOI: 10.15372/AUT20250307
EDN: XLWHKG

Введение. К числу важных проблем геоэкологического мониторинга окружающей среды относится задача обнаружения и определения местоположения мощных источников импульсной природы — различных карьерных и полигонных взрывов, падающих на Землю тел в виде отработанных ступеней ракет при спутниковых запусках, ударных машин на строительных объектах, осколков метеоритов и др. — по сейсмическим волнам в Земле и акустическим в атмосфере, порождаемым такими источниками. Актуальность решения подобных задач определяется геоэкологическими рисками для окружающей социальной инфраструктуры и прежде всего для людей, которые порождают такого типа источники. В частности, это относится к разрушительным последствиям от взрывов в районах проведения угледобычи открытым способом, что характерно для угледобывающей области Кузбасса. В рассматриваемых ситуациях экологические риски, оцениваемые удельной плотностью акустической энергии, могут многократно возрастать (в 50 раз и более) из-за развивающегося явления пространственной фокусировки геоакустических волновых полей в заданном азимутальном направлении в результате взаимодействия с метеофакторами (направлением и скоростью ветра, влажностью и др.), а также характерного покрова земной поверхности [1–3].

В данной работе рассмотрены новые подходы к решению первоначально обозначенных задач. Их эффективность оценивается по критериям помехозащищённости и точности и подтверждается результатами численного моделирования и натурного эксперимента.

Совмещённая постановка задачи геолокации. Задача оценки неизвестных параметров источника сводится к решению нелинейной системы условных уравнений:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\eta}\left(X, \boldsymbol{\theta}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\eta}(X, \theta)$ — N-мерный вектор вычисляемых времён пробега (теоретический годограф) или функция регрессии; $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)^\top$ — вектор невязок; $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ — вектор времён вступлений сейсмических волн; $\boldsymbol{\theta} = (x, y, z, v, t)^\top$ — m-мерный вектор оцениваемых параметров; $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)$ — матрица координат датчиков (или точек излучения), а N — число датчиков (или точек излучения).

Определяемыми параметрами выступают скоростная характеристика среды v и время в источнике $t_{\text{и}}$, пространственные координаты источника — x, y, z. Иногда скорость в среде является известной. При оценке параметров используют сведения о распределении ошибок $\varepsilon_i = t_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) - \eta(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$. В дальнейшем будем предполагать, что ε_i — взаимно независимые случайные величины, имеющие распределение с нулевым средним и заданными дисперсиями:

$$E\varepsilon_i = 0, \quad E\varepsilon_i\varepsilon_j = \sigma_i^2\delta_{ij}, \quad \sigma_i = \sigma(\mathbf{x}_i).$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Когда возникают затруднения с заданием дисперсий, то можно принять их равными и получить несмещённую оценку дисперсии наблюдения с единичным весом.

Исходные сейсмические колебания в Земле с учётом характеристик регистраторов описываются в виде модели

$$y_k(t_i) = A_k h_k L[u(t_i - \Delta t_k) + n_k(t_i)]. \tag{2}$$

Здесь A_k — амплитуда колебания на k-м датчике; h_k — чувствительность датчика; L — оператор фильтрации сигнала; $u(t_i - \Delta t_k)$ — полезный, априори неизвестный сигнал; $n_k(t)$ — внешний шум с корреляционной функцией $r_k(\tau)$.

Вследствие решения задачи (1) для топологии регистрирующей системы с набором датчиков с линейной расстановкой возникают задачи обнаружения и интерпретации, связанные с совместным определением по совокупности датчиков времён вступлений априори неизвестных, но близких по форме волн (волновых форм) в пределах регистрирующего профиля. Теория алгоритмов интерпретации в геофизике связана с необходимостью прослеживания корреляции волн неизвестной формы вдоль регистрирующего профиля [4].

В представленной работе предлагается и рассматривается апостериорный подход к решению задачи по всем накопленным данным профильной регистрации. Его алгоритмическая реализация сопряжена с решением трудоёмких в вычислительном плане задач дискретной оптимизации. Предлагается и исследуется иной малоизученный применительно к геофизическому мониторингу подход, в рамках которого решение задачи находится в едином процессе дискретной оптимизации без разбиения задачи на этапы. При этом возможны две формы обнаружения: либо оценивание непосредственно времён прихода волн, либо получение одновременно оценки времён прихода и формы волновых импульсов.

Особенность решения обеих задач связана с учётом вариаций времён вступления волн между соседними датчиками, определяющих ошибки оценивания годографа, — линии вступления волн в зависимости от координат точек возбуждения и наблюдения. Такие вариации определяются рядом факторов: погрешностью позиционирования автономных регистрирующих систем на линейном профиле по сигналам GPS, погрешностью временно́й синхронизации по сигналам GPS каждой из автономных систем, вариациями времён пробега волн в цепи источник — приёмник. С учётом этого в дальнейшем по отношению к набору регистрируемых последовательностей вводится понятие квазипериодических последовательностей, означающее, что временно́й интервал между двумя последовательными импульсами варьируется в пределах заданных сверху и снизу констант. Соответственно, далее будут рассматриваться алгоритмы, которые предназначены для обработки последовательностей, изменяющих свои свойства квазипериодически и искажённых гауссовой помехой [5].

При решении задач предлагается следующая модель анализируемых данных. Пусть компоненты вектора $\mathbf{X} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in \mathrm{Re}^N$ образуют последовательность волновых форм в виде, где

$$x_n = \sum_{m=1}^{M} u_{n-n_m}(m), \qquad n = 0, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Здесь M — число волновых форм в последовательности. Условие варьирования временно́го интервала между импульсами (указанными выше) запишем в виде

$$q \leqslant T_{\min} \leqslant n_m - n_{m-1} \leqslant T_{\max}, \qquad m = 2, \ldots, M, \tag{4}$$

где $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — минимальный и максимальный интервалы между двумя последовательными волновыми формами, задаваемые натуральными числами. Их выбор определяется с учётом характера погрешностей, отмеченных выше.

Положим $U_m = (u_0(m), \ldots, u_{q-1}(m))$, $m = 1, \ldots, M$. Принимаем, что $0 < \|U_m\|^2 < \infty$, $m = 1, \ldots, M$. Введём $w = (U_1, \ldots, U_M)$ и $\eta = (n_1, \ldots, n_M)$. Согласно введённым обозначениям, вектор $\mathbf{X}$ зависит от пары наборов η и w, содержащих одинаковое число M элементов, т. е. $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\eta, w)$. Пусть случайный вектор $\mathbf{Y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})$ есть сумма двух независимых векторов $\mathbf{Y} = \mathbf{X}(\eta, w) + \mathbf{\Xi}$, где вектор шумов $\mathbf{\Xi} = (e_0, \ldots, e_{N-1}) \in \Phi_{x,\sigma^2 I}$, $\sigma^2 < \infty$. Здесь через $\Phi_{x,\sigma^2 I}$ обозначено нормальное распределение с параметрами $(0, \sigma^2 I)$.

С учётом этого задача обнаружения квазипериодических последовательностей волновых форм состоит в том, чтобы по наблюдаемому вектору $\mathbf{Y}$ найти набор η, в соответствии с которым порождён ненаблюдаемый вектор $\mathbf{X}(\eta, w)$. В этой модели компоненты векторов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ соответствуют наблюдаемому и ненаблюдаемому сигналам, а компоненты вектора $\mathbf{\Xi}$ — помехе. Номера компонент векторов ассоциируются с равномерным дискретным временем. Элементам набора $(n_1, \ldots, n_M)$ сопоставляются моменты времени вступления (начала) волновых форм $\hat{\eta} = (\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_N)^\top$; q-мерный набор U_m $(m = 1, \ldots, M)$ соответствует волновой форме.

Для решения задач применяется принцип максимального правдоподобия. Помехоустойчивое максимально правдоподобное обнаружение заданного числа неизвестных волновых форм моделируется следующей дискретной экстремальной задачей.

Задача 1. Дано: числовая последовательность $Y = (y_0, \ldots, y_{N-1})$, натуральные числа q, M, $T_{\min}$ и $T_{\max}$. Найти: набор $\eta = (n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ такой, что

$$F(n_1, \ldots, n_M) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{q-1} y_{n_m+k}^2 \to \max. \tag{5}$$

В случае, когда все волновые формы идентичны, но неизвестны, т. е. $U_m = U = (u_0, \ldots, u_{q-1})$ для каждого $m = 1, \ldots, M$, а их число M неизвестно, проблема обнаружения этих форм индуцирует следующую экстремальную задачу.

Задача 2. Дано: числовая последовательность $Y = (y_0, \ldots, y_{N-1})$, вектор $\mathbf{U}(u_0, \ldots, u_{q-1})$, натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$. Найти: набор $\eta = (n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ и его размерность такие, что

$$S(n_1, \ldots, n_M) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{q-1} u_k(u_k - 2y_{n_i+k}) \to \min. \tag{6}$$

Методы решения. Решение задач (5), (6) связано со случайным перебором, поэтому они относятся к числу NP-трудных. Рассмотрен подход к их решению на основе динамического программирования для ухода от случайного перебора.

Обозначим $G(n_i) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} \tilde{u}_k(\tilde{u}_k - 2y_{n_i+k})$, где $\tilde{u}_k = y_{n_1^*+k}$, $k = 0, \ldots, q-1$, является компонентой неизвестной волны U. Следовательно, задача (6) примет следующий вид на множестве Ω_M:

$$\tilde{S}_1(n_1, \ldots, n_M) = \sum_{i=1}^{M} G(n_i) \to \min_{\Omega_M}. \tag{7}$$

Функционал (6) является сепарабельным и аддитивным, поэтому задачу (7) можно решать методом динамического программирования и в соответствии с принципом оптимальности организовать многошаговый процесс минимизации [5]. Такой подход в данной работе используется для решения задач (5), (6).

Для сокращения перебора изначально необходимо определить время вступления волновой формы по первому каналу при $M = 1$ и после этого решать задачу совместного определения времён приходов волн по всем каналам. Поскольку форма волнового импульса априори неизвестна, то обнаружение его в шумах базируется на применении энергетического критерия [6]:

$$U = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n |V_n|^2}{2(\lambda_n + D)} \geqslant G_0. \tag{8}$$

Здесь V_n — образцы огибающей входного сигнала (1); D — спектральная плотность мощности внешнего шума; G_0 — порог обнаружения, выбираемый по одному из статистических критериев. Параметры $\lambda_n \sim 1/\Delta f$ по отношению к сигналу на выходе узкополосного фильтра с оператором L в (2) и полосой пропускания Δf. Кроме того, должно быть выполнено условие: $\Delta f\, T \gg 1$ [6]. С учётом выполненных замечаний и решения задачи обнаружения (8) получаем оценку $\hat{n}_1$. По найденному значению $\hat{n}_1$ решением задачи 1 находится набор $(y_{\hat{n}_1}, \ldots, y_{\hat{n}_1+q-1})$. Далее, используя этот набор, решаем задачу (2), положив $U = (y_{\hat{n}_1}, \ldots, y_{\hat{n}_1+q-1})$. Наконец, по найденному набору $(\hat{n}_1, \ldots, \hat{n}_{\hat{M}})$ вычисляем оценки компонент вектора $\hat{\mathbf{U}}$. Оптимальные значения компонент искомого набора $\hat{U} = (\hat{u}_0, \ldots, \hat{u}_{q-1})$, соответствующего волновой форме, находятся по формуле $\hat{u}_k = \dfrac{1}{\hat{M}} \sum\limits_{m=1}^{\hat{M}} y_{\hat{n}_m+k}$, $k = 0, \ldots, q-1$, где n_m, $m = 1, \ldots, \hat{M}$, а $\hat{M}$ — элементы оптимального решения задачи (7).

Численное моделирование алгоритма поисковой оптимизации. Для проверки работоспособности и исследования точности работы предложенного алгоритма выполнены численные эксперименты с моделированием различных волновых форм. Задавались образцы реальных волновых форм, одинаковых по форме и длительности и осложнённых гауссовым шумом разного уровня, различные соотношения сигнал/шум. По сгенерированному набору $(n_1, \ldots, n_M)$ случайных номеров формировалась последовательность компонент вектора $\mathbf{X}$. В соответствии с принятой моделью анализируемая последовательность компонент вектора $\mathbf{Y}$ синтезировалась как сумма вектора $\mathbf{X}$ и гауссовского вектора $\mathbf{\Xi}$ с параметрами распределения $(0, \sigma^2 I)$. В качестве примера на рис. 1 приведены в графическом виде результаты совместного обнаружения и выделения волновых форм с помощью

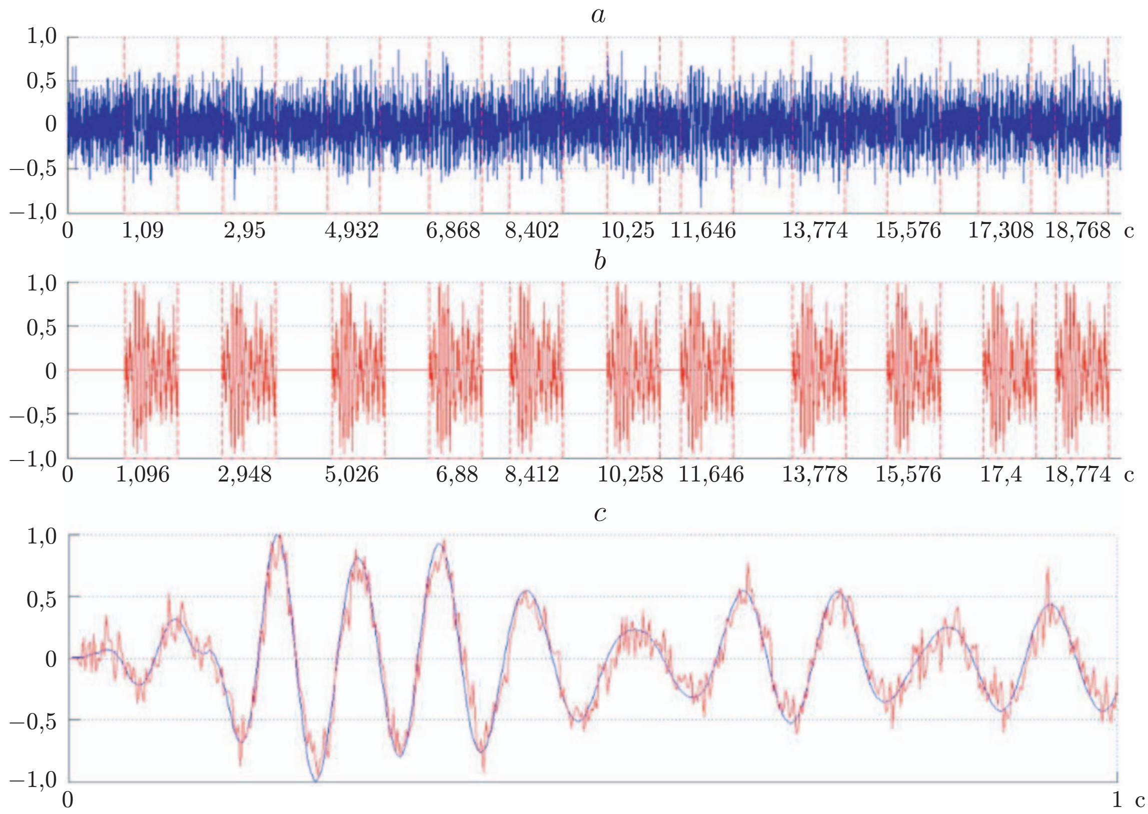

Рис. 1. Соотношение сигнал/шум, равное 1,25; $T_{\min} = 1{,}3$ с; $T_{\max} = 2{,}2$ с; $q = 1$ с; $N = 20$ с; $M = 11$; $\delta_U(M) = 6 \cdot 10^{-2}$: *a* — смоделированная последовательность импульсов в шумах; *b* — последовательность импульсов после применения алгоритмов; *c* — заданная и вычисленная формы импульса

алгоритма решения задачи (2). На рис. 1 изображены: *a* — сгенерированная модельная зашумлённая последовательность; *b* — последовательность, найденная алгоритмом решения задачи (2); *c* — результаты численного оценивания погрешностей выделения одинаковых волновых форм в квазипериодической последовательности на фоне шума для случая отношения сигнал/шум, равного 1,25.

Времена вступлений для всех выделенных импульсов по отношению к обеим последовательностям проставлены на оси абцисс в начале каждого из импульсов. В серии численных экспериментов показано, что средняя абсолютная погрешность оценивания времени вступления волновой формы составляет 0,047 с.

Для проверки качества алгоритма оценивания волновых форм использовалась мера среднеквадратического отклонения в виде $\delta_U(M) = \dfrac{1}{q}\sum\limits_{k=0}^{q-1}(u_k - \hat{u}_k)^2$, где u_k, $\hat{u}_k$, $k = 0, \ldots, q-1$, — заданные и вычисленные компоненты волновой формы U. Относительная среднеквадратическая погрешность оценивания волновой формы для данных на рис. 1, *c* не превышает 6 %.

Эксперименты и результаты. Для оценивания эффективности алгоритмов и реализующих их программ в определении точности координат источника проведены численные и полевые эксперименты с применением пространственно распределённых калибровочных взрывов с тротиловым эквивалентом 400–2600 г и регистрирующей системы в кре-

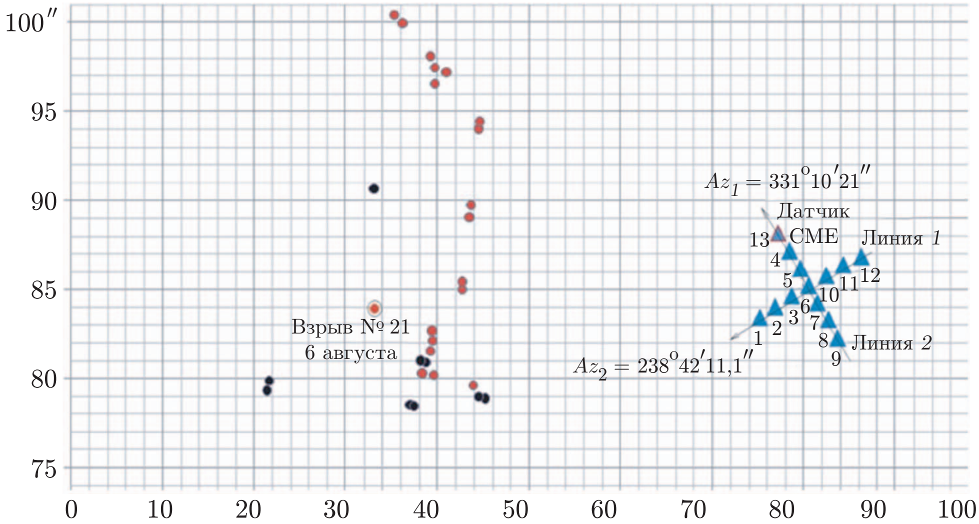

Рис. 2. Схема расстановки: ○ — калибровочные взрывы; Δ — регистрирующие датчики

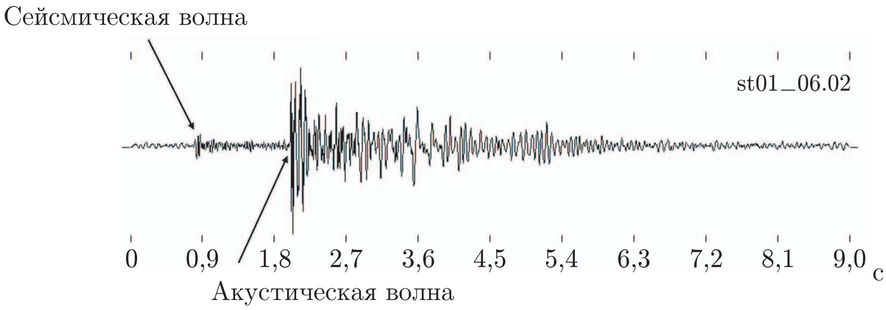

Рис. 3. Пример сейсмограммы с сейсмической и акустической волнами от небольшого взрыва на расстоянии 570 м

стообразной расстановке в каждой из линий семи сейсмических датчиков с шагом 34,5 м. Схема расположения источников и регистрирующих датчиков представлена на рис. 2.

Пространственные характеристики расстановки привязаны к карте местности, а числовые — к значениям координат на карте в секундах. В крестообразной расстановке на линиях *1*, *2* используются семь сейсмических датчиков с шагом расстановки 34,5 м. Обе линии образуют сейсмическую антенну. В качестве примера на рис. 3 приводится запись сигнала (сейсмограммы) на одном из датчиков от поверхностного взрыва мощностью 200 г в тротиловом эквиваленте на расстоянии 570 м. Особенность сейсмограммы состоит в том, что она содержит первичную низкоамплитудную сейсмическую волну и высокоамплитудную приповерхностную акустическую волну. Точность нахождения разности времён пробега между обоими типами волн определяет точность оценки расстояния от источника до приёмника.

С учётом этого и оценивания вектора времён вступлений волн в (1) в пределах сейсмической антенны решается задача геолокации.

Численное моделирование. Целью моделирования является оценивание потенциальных погрешностей определения координат при заданных точностях нахождения времён пробега волн до датчиков и рассчитанной из эксперимента скорости распространения сейсмических волн. Моделирование основывается на решении обратной задачи (1) методом сингулярного (SVD) разложения [7–10]. Наибольшее распространение в настоящее время получило синонимичное название метода — метод псевдообращения (или обобщённого обращения). Создана вычислительная программа в среде MATLAB для реализации расчётов на основе этого метода. Расчёты по описываемой программе состоят в следующем: вводятся известные координаты 21 точки взрывов и мест расстановки датчиков, затем по известной (определённой из эксперимента) скорости сейсмической волны рассчитываются времена её пробега от точек взрыва до сейсмодатчиков. Далее на эти времена «набрасываются» случайные погрешности в пределах от $-0{,}5$ % до $+0{,}5$ % времени пробега и уже эти времена задаются в программе в качестве времён вступлений сейсмических волн от взрывов на сейсмодатчиках. Программа рассчитывает для каждого взрыва следующие выходные данные: расстояние до источника — в метрах, азимутальное направление на источник — в градусах, невязку (погрешность определения координат расстояния) — в метрах. Как следует из результатов вычислений, погрешности определения расстояний при заданных погрешностях на времена вступления волн не более $\pm 0{,}5$ % не превышают 1,6 % по дальности и 2 % по азимуту. Результаты численного моделирования иллюстрируют потенциальные возможности точности геолокации. В реальной ситуации повышенные внешние шумы могут ухудшать точностные характеристики.

Полевые эксперименты и результаты. Рассмотренные выше результаты численного эксперимента являются дополнением к полевому эксперименту, в котором координаты источников оценивались на основе измерения времён вступлений сейсмических и акустических волн. Вектор времён вступлений волн $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ в (1) от каждого из взрывов на совокупности из Nдатчиков определяется в виде решения рассмотренных задач (5)–(7). При этом предварительно применяется трансформация параллельных записей в последовательные с фиксированным интервалом между ними, который впоследствии учитывался при расчёте истинных времён вступлений волн. По измеренным временам $\mathbf{t}$ методом псевдообращения определяются координаты источников в полярной системе координат путём решения (1). В таблице приведены результаты расчётов, сопоставление их с соответствующими данными из цифровой карты местности по GPS, погрешности оценивания. Сравнение экспериментально полученных значений погрешностей (см. таблицу) с данными численного моделирования показывает, что расхождение между ними не хуже 1 %. В первую очередь, это определяется точностью решения задачи (5).

Таблица

Погрешности между расчётными и полученными по GPS координатами

Номер источника	Дальность, м			Азимут, град		
	Расчётная	Данные GPS	Погрешность	Расчётный	Данные GPS	Погрешность
1	499,48	512,37	12,92	256,92	253,49	–3,43
2	569,65	576,28	6,63	264,35	260,16	–4,19
3	559,34	570,52	11,18	262,79	261,60	–1,19
4	563,39	570,70	7,3	262,79	263,09	0,3
5	509,71	519,66	9,95	269,00	269,30	0,3
6	509,20	521,51	12,31	270,18	270,48	0,3
7	520,02	533,53	13,5	282,59	281,20	–1,39
8	526,79	538,05	11,2	283,57	283,25	–0,32
9	575,23	586,68	11,45	295,16	295,16	0
10	581,15	593,02	11,8	296,80	296,27	–2
11	709,82	710,77	0,95	300,77	300,02	–0,75
12	731,04	729,54	–1,5	300,77	300,93	0,16

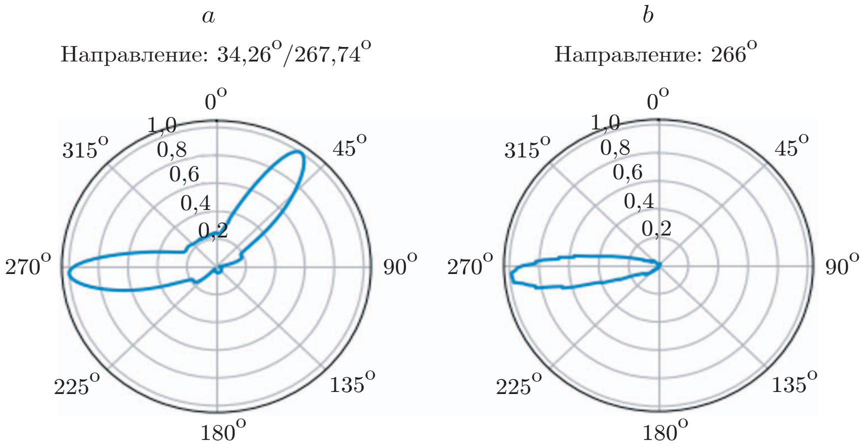

Рис. 4. Результаты вычисления КНД: *a* — для линий расстановки *2*; *b* — для линий расстановки *1*, *2*

Кроме рассмотрения полученных численных оценок местоположения источника, представляет интерес оценка функции направленности на источник, зависящей от временно́й задержки прихода волн Δt между двумя соседними датчиками, а также длины базы расстановки датчиков с шагом расстановки Δr. Такая функция описывает диаграмму направленности на источник:

$$E_{\text{сум}} = \sum_{n} (f_1(t_n) + f_2(t_n + \Delta t) + \ldots + f_k(t_n + \Delta t(k-1)))^2.$$

Её нормированное значение характеризует коэффициент направленного действия (КНД): КНД $= E_{\text{сум}}/E_{\max}$. Частные результаты вычисления КНД по данным регистрации на линии *2* и совместно линий *1*, *2* (см. рис. 2) представлены на рис. 4, *a*, *b* соответственно. Результаты получены для исходного азимутального значения на источник по данным GPS, равного 267°. Вычисленные азимутальные значения, определяемые в максимумах КНД, составляют 267,74 и 266,00° соответственно. Как видно из рис. 2 и 4, абсолютная погрешность не превышает 1°.

Заключение. Предложен новый численный подход к решению задач геолокации мощных импульсных источников сейсмических и акустических волн на основе совмещения методов решения обратных задач и задачи поисковой оптимизации при определении времён вступлений волн в целом на группе пространственно распределённых датчиков. Проведено численное моделирование, и выполнены экспериментальные исследования предлагаемых методов для оценивания точности пространственной локализации источников на примере использования калибровочных, пространственно распределённых взрывов. Так, погрешности определения местоположения пространственно распределённых источников на площади размером 400 × 600 м с помощью X-образной расстановки сейсмической группы размером 200 × 200 м при расстоянии от источника до датчика 1000 м не превышают 2,5 % по дальности и 1,6 % по азимуту.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках государственного задания Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (FWNM-2025-0004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Voskoboinikova G. M., Karavaev D. A., Khairetdinov M. S.** Numerical Simulation of Acoustic Waves Propagation in an “Atmosphere-Forestland-Ground”System // Journ. Appl. and Industrial Math. 2019. **13**, Iss. 1. P. 175–183. DOI: 10.1134/S1990478919010186.
2. **Voskoboynikova G., Imomnazarov K., Mikhailov A., Tang J.-G.** Influence of Snow Cover on the Seismic Waves Propagation // Proc. of the 6th Int. Conf. Numerical Analysis and Applications (NAA). Lozenetz, Bulgaria, 15–22 June, 2016. P. 730–736.
3. **Красненко Н. П., Раков Д. С.** Влияние снежного покрова на приземное распространение звуковых волн в атмосфере // Сб. тр. XIX сессии РАО. Нижний Новгород: ГЕОС, 2007. С. 172–175.
4. **Гольдин С. В.** Интерпретация данных сейсмического метода отражённых волн. М.: Недра, 1979. 344 с.
5. **Воскобойникова Г. М., Хайретдинов М. С.** Апостериорные алгоритмы для решения задач совместного обнаружения и оценивания сейсмических волн // Сибирский журнал индустриальной математики. 2015. **18**, № 4. С. 9–17.
6. **Хелстром К.** Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. Г. Ю. Кобзарева; под ред. Ю. Б. Кобзарева. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 431 с.
7. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Мир, Гл. редакция физ.-мат. лит., 1979. Изд. 2-е. 285 с.
8. **Яновская Т. Б., Порохова Л. Н.** Обратные задачи геофизики. 2-е изд., доп. и перераб. СП.-б.: Изд-во СПбГУ, 2004. 214 с.
9. **Каханер Д., Моулер К., Нэш С.** Численные методы и программное обеспечение: Пер. с англ., под ред. Х. Д. Икрамова. М.: Мир, 2001. 575 с.
10. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

Поступила в редакцию 11.04.2025
После доработки 28.04.2025
Принята к публикации 29.04.2025